Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik

Prof. Dr. Gerd Schön
Dr. Michael Marthaler, Dr. Jens Michelsen

http://www.tfp.kit.edu/studium-lehre_444.php

ÜBUNGSBLATT NR. 7
Theorie der kondensierten Materie II, SS 2012

Ausgabe **15.06.12**
Besprechung **22.06.12**

1 | Nambu-Gorkov Green'sche Funktion **(4 Punkte)**

In der Vorlesung wurden die Nambu-Spinoren

$$\alpha_{\boldsymbol{k}} = \begin{pmatrix} c_{\boldsymbol{k}\uparrow} \\ c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \alpha^\dagger_{\boldsymbol{k}} = (c^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow},\ c_{-\boldsymbol{k}\downarrow}). \tag{1}$$

und die Nambu-Gorkov Green'sche Funktion

$$\hat{G}(\boldsymbol{k},\tau) = -\langle T_\tau \alpha_{\boldsymbol{k}}(\tau)\alpha^\dagger_{\boldsymbol{k}}(0)\rangle \tag{2}$$

eingefürt.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Diskontinuität wegen der Zeitordnung gegeben ist durch

$$\hat{G}(\boldsymbol{k},0^+) - \hat{G}(\boldsymbol{k},0^-) = -\hat{1} \tag{3}$$

b) (2 Punkte) Im Frequenzraum genügt die Green'sche Funktion der Bewegungsgleichung $[i\omega_n - \xi_{\boldsymbol{k}}\tau_3 + \Delta\tau_+ + \Delta^*\tau_-]\,\hat{G}(\boldsymbol{k},i\omega_n) = \hat{1}$. Zeigen Sie, dass

$$\hat{G}(\boldsymbol{k},i\omega_n) = [i\omega_n - \xi_{\boldsymbol{k}}\tau_z + \Delta\tau_+ + \Delta^*\tau_-]^{-1} = \frac{i\omega_n + \xi_{\boldsymbol{k}}\tau_3 - \Delta\tau_+ - \Delta^*\tau_-}{-\omega_n^2 - \epsilon^2_{\boldsymbol{k}} - |\Delta|^2} \tag{4}$$

wobei $\tau_\pm = \frac{1}{2}(\tau_1 \pm i\tau_2)$ und τ_1, τ_2, τ_3 die Pauli-Matrizen im Nambu-Gorkov-Raum sind.

2 | Josephson Effekt **(16 Punkte)**

Wir betrachten zwei Supraleiter gekennzeichnet durch indices "L" (Links) und "R" (Rechts) die durch eine dünne isolierende Schicht von einander getrennt sind. Elektronen können mit geringer Wahrscheinlichkeit zwischen den beiden Supraleitern tunneln. Das System wird durch den Hamiltonoperator

$$H = \sum_{i=L,R}\sum_{\boldsymbol{k}}\left(\sum_\sigma \epsilon_{\boldsymbol{k}} c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,i}c_{\boldsymbol{k}\sigma,i} - \left(\Delta_i c^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow,i}c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow,i} + \text{h.c.}\right)\right) + \left(\sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}',\sigma} t c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,L}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,R} + \text{h.c.}\right) \tag{5}$$

beschrieben. Links und rechts sei das gleiche Material, d.h. die Ordnungsparameter unterscheiden sich nur durch eine relative Phase $\Delta_L = \Delta^*_R = |\Delta|e^{i\frac{\varphi}{2}}$. Wir definieren die Elektronenzahlen $N_{L/R} = \sum_{\boldsymbol{k}\sigma}\langle c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,L/R}c_{\boldsymbol{k}\sigma,L/R}\rangle$, durch die wir den Strom zwischen den zwei Supraleitern ausdrücken können:

$$I = e\dot{N}_L = -e\dot{N}_R = \frac{e}{i\hbar}\langle[H,N_L]\rangle \tag{6}$$

a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass der Strom auf die folgende Form gebracht werden kann

$$I = -\frac{2et}{i\hbar}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\left(\langle c^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow,L}c_{\boldsymbol{k}\uparrow,R}\rangle - \langle c^\dagger_{\boldsymbol{k}\downarrow,R}c_{\boldsymbol{k}\downarrow,L}\rangle\right) \tag{7}$$

b) (3 Punkte) Wir definieren die Nambu-Spinoren

$$\alpha_{\boldsymbol{k},L} = \begin{pmatrix} c_{\boldsymbol{k}\uparrow,L} \\ c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow,L}\end{pmatrix}, \qquad \alpha_{\boldsymbol{k},R} = \begin{pmatrix} c_{\boldsymbol{k}\uparrow,R} \\ c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow,R}\end{pmatrix}. \tag{8}$$

sowie die Nambu-Gorkov Green'schen Funktionen

$$\begin{aligned}\hat{G}_{LL}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',\tau) &= -\langle T_\tau \alpha_{\boldsymbol{k},L}(\tau)\alpha^\dagger_{\boldsymbol{k}',L}(0)\rangle, \quad \hat{G}_{LR}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',\tau) = -\langle T_\tau \alpha_{\boldsymbol{k},L}(\tau)\alpha^\dagger_{\boldsymbol{k}',R}(0)\rangle, \\ \hat{G}_{RL}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',\tau) &= -\langle T_\tau \alpha_{\boldsymbol{k},R}(\tau)\alpha^\dagger_{\boldsymbol{k}',L}(0)\rangle, \quad \hat{G}_{RR}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',\tau) = -\langle T_\tau \alpha_{\boldsymbol{k},R}(\tau)\alpha^\dagger_{\boldsymbol{k}',R}(0)\rangle.\end{aligned} \tag{9}$$

Zeigen Sie, dass der Strom durch $\hat{G}_{LR}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}';\tau)$ ausgedrückt werden kann mit der folgenden Form

$$I = \frac{2et}{i\hbar}\sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\mathrm{Tr}\ \hat{G}_{LR}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',0^-) \tag{10}$$

c) (6 Punkte) Berechnen Sie die Nambu-Gorkov Green'sche Funktion $\hat{G}_{LR}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',i\omega_n)$ in erster Ordnung in t durch ihre Bewegungsgleichung. Benutzen Sie diese um zu zeigen, dass der Strom gegeben ist durch

$$I = \left(\frac{2et^2}{i\hbar}\right)\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\Big(G_L(\boldsymbol{k},i\omega_n)G_R(\boldsymbol{k}',i\omega_n) - F^*_L(\boldsymbol{k},i\omega_n)F_R(\boldsymbol{k}',i\omega_n) - \text{c.c.}\Big) \tag{11}$$

wobei $G_{L/R}(\boldsymbol{k},i\omega_n) = \frac{i\omega_n+\xi_{\boldsymbol{k}}}{-\omega_n^2-\epsilon^2_{\boldsymbol{k}}-|\Delta_{L/R}|^2}$ und $F_{L/R}(\boldsymbol{k},i\omega_n) = \frac{-\Delta^*_{L/R}}{-\omega_n^2-\epsilon^2_{\boldsymbol{k}}-|\Delta_{L/R}|^2}$.

d) (4 Punkte) Benutzen Sie die Näherung $\sum_{\boldsymbol{k}} \approx N(0)\int_0^\infty d\epsilon$ um zu zeigen, dass

$$I = I_c \sin\varphi, \qquad \text{mit} \quad I_c = \frac{\pi\Delta}{2eR_N}\tanh\left(\frac{\beta\Delta}{2}\right) \tag{12}$$

wobei $R_N^{-1} = \pi e^2(tN(0))^2/\hbar$.

[**Hinweis:** Sie werden sehen, dass der Term $\propto (G_LG_R - \text{c.c.})$ ausfällt. Das liegt daran, dass wir eine Gleichgewichtsberechnung machen. Wenn eine Spannung über den Kontakt gelegt wird, gibt dieser Term einen endlichen Beitrag.]