TKM2 Übungsblatt 7: Lösungen

June 27, 2012

1 | Nambu-Gorkov Green'sche Funktion

a) Die Nambu-Gorkov Green'sche Funktion hat die explizite Form

$$\hat{G}(\boldsymbol{k},\tau) = -\begin{pmatrix} \langle T_\tau c_{\boldsymbol{k}\uparrow}(\tau) c^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow}(0)\rangle & \langle T_\tau c_{\boldsymbol{k}\uparrow}(\tau) c_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(0)\rangle \\ \langle T_\tau c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(\tau) c^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow}(0)\rangle & \langle T_\tau c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(\tau) c_{-\boldsymbol{k}\downarrow}(0)\rangle \end{pmatrix} \tag{1}$$

Für $\tau = 0^+$ haben wir

$$\hat{G}(\boldsymbol{k},0^+) = -\begin{pmatrix} \langle c_{\boldsymbol{k}\uparrow} c^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow}\rangle & \langle c_{\boldsymbol{k}\uparrow} c_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\rangle \\ \langle c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow} c^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow}\rangle & \langle c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow} c_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\rangle \end{pmatrix} \tag{2}$$

und für $\tau = 0^-$ haben wir

$$\hat{G}(\boldsymbol{k},0^-) = \begin{pmatrix} \langle c^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} c_{\boldsymbol{k}\uparrow}\rangle & \langle c_{-\boldsymbol{k}\downarrow} c_{\boldsymbol{k}\uparrow}\rangle \\ \langle c^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\rangle & \langle c_{-\boldsymbol{k}\downarrow} c^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow}\rangle \end{pmatrix} \tag{3}$$

Durch die Vertauschungsregeln haben wir dann

$$\hat{G}(\boldsymbol{k},0^+) - \hat{G}(\boldsymbol{k},0^-) = -\hat{1} \tag{4}$$

b) In Matrixform haben wir

$$\hat{G}^{-1}(\boldsymbol{k},i\omega_n) = (i\omega_n - \xi_{\boldsymbol{k}}\tau_z + \Delta\tau_+ + \Delta^*\tau_-) = \begin{pmatrix} i\omega_n - \xi_{\boldsymbol{k}} & \Delta \\ \Delta^* & i\omega_n + \xi_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Die Inverse ist dann

$$\begin{aligned} \hat{G}(\boldsymbol{k},i\omega_n) &= \frac{1}{(i\omega_n - \xi_{\boldsymbol{k}})(i\omega_n + \xi_{\boldsymbol{k}}) - |\Delta|^2}\begin{pmatrix} i\omega_n + \xi_{\boldsymbol{k}} & -\Delta \\ -\Delta^* & i\omega_n - \xi_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(i\omega_n)^2 - \xi_{\boldsymbol{k}}^2 - |\Delta|^2}\begin{pmatrix} i\omega_n + \xi_{\boldsymbol{k}} & -\Delta \\ -\Delta^* & i\omega_n - \xi_{\boldsymbol{k}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{i\omega_n + \xi_{\boldsymbol{k}}\tau_3 - \Delta\tau_+ - \Delta^*\tau_-}{-\omega_n^2 - \xi_{\boldsymbol{k}}^2 - |\Delta|^2} \end{aligned} \tag{6}$$

2 | Josephson Effekt

a) Da für $t=0$ der Strom $I=0$ ist, können wir den Aussdruck für den Strom auf die folgende Form vereinfachen:

$$I = \frac{e}{i\hbar}\sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'\sigma}\langle[(tc^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,L}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,R}+\text{c.c.}),N_L]\rangle = t\sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'\sigma}\left(\langle[c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,L}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,R},N_L]\rangle + \langle[c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,R}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,L},N_L]\rangle\right) \tag{7}$$

Wir haben[1]

$$\begin{aligned}
[c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,R}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,L},N_L] &= \sum_{\boldsymbol{q}\sigma'}[c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,L}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,R},c^\dagger_{\boldsymbol{q}\sigma',L}c_{\boldsymbol{q}\sigma',L}]\\
&= \sum_{\boldsymbol{q}\sigma'}\left(c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,R}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,L}c^\dagger_{\boldsymbol{q}\sigma',L}c_{\boldsymbol{q}\sigma',L} - c^\dagger_{\boldsymbol{q}\sigma',L}c_{\boldsymbol{q}\sigma',L}c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,R}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,L}\right)\\
&= \sum_{\boldsymbol{q}\sigma'}\left(c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,R}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,L}c^\dagger_{\boldsymbol{q}\sigma',L}c_{\boldsymbol{q}\sigma',L} + c^\dagger_{\boldsymbol{q}\sigma',L}c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,R}c_{\boldsymbol{q}\sigma',L}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,L}\right)\\
&= \sum_{\boldsymbol{q}\sigma'}\left(c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,R}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,L}c^\dagger_{\boldsymbol{q}\sigma',L}c_{\boldsymbol{q}\sigma',L} + c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,R}c^\dagger_{\boldsymbol{q}\sigma',L}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,L}c_{\boldsymbol{q}\sigma',L}\right)\\
&= \sum_{\boldsymbol{q}\sigma'}\left(c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,R}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,L}c^\dagger_{\boldsymbol{q}\sigma',L}c_{\boldsymbol{q}\sigma',L} + \delta_{\boldsymbol{k}',\boldsymbol{q}}\delta_{\sigma,\sigma'}c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,R}c_{\boldsymbol{q}\sigma',L} - c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,R}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,L}c^\dagger_{\boldsymbol{q}\sigma',L}c_{\boldsymbol{q}\sigma',L}\right)\\
&= \sum_{\boldsymbol{q}\sigma}\left(\delta_{\boldsymbol{k}',\boldsymbol{q}}\delta_{\sigma,\sigma'}c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,R}c_{\boldsymbol{q}\sigma',L}\right)\\
&= c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,R}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,L}
\end{aligned} \tag{8}$$

und

$$\begin{aligned}
[c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,L}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,R},N_L] &= \sum_{\boldsymbol{q}\sigma'}[c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,L}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,R},c^\dagger_{\boldsymbol{q}\sigma',L}c_{\boldsymbol{q}\sigma',L}]\\
&= \sum_{\boldsymbol{q}\sigma'}\left(c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,L}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,R}c^\dagger_{\boldsymbol{q}\sigma',L}c_{\boldsymbol{q}\sigma',L} - c^\dagger_{\boldsymbol{q}\sigma',L}c_{\boldsymbol{q}\sigma',L}c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,L}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,R}\right)\\
&= \sum_{\boldsymbol{q}\sigma'}\left(c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,L}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,R}c^\dagger_{\boldsymbol{q}\sigma',L}c_{\boldsymbol{q}\sigma',L} - \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{q}}\delta_{\sigma,\sigma'}c^\dagger_{\boldsymbol{q}\sigma',L}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,R} + c^\dagger_{\boldsymbol{q}\sigma',L}c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,L}c_{\boldsymbol{q}\sigma',L}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,R}\right)\\
&= \sum_{\boldsymbol{q}\sigma'}\left(c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,L}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,R}c^\dagger_{\boldsymbol{q}\sigma',L}c_{\boldsymbol{q}\sigma',L} - \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{q}}\delta_{\sigma,\sigma'}c^\dagger_{\boldsymbol{q}\sigma',L}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,R} + c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,L}c^\dagger_{\boldsymbol{q}\sigma',L}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,R}c_{\boldsymbol{q}\sigma',L}\right)\\
&= \sum_{\boldsymbol{q}\sigma'}\left(c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,L}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,R}c^\dagger_{\boldsymbol{q}\sigma',L}c_{\boldsymbol{q}\sigma',L} - \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{q}}\delta_{\sigma,\sigma'}c^\dagger_{\boldsymbol{q}\sigma',L}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,R} - c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,L}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,R}c^\dagger_{\boldsymbol{q}\sigma',L}c_{\boldsymbol{q}\sigma',L}\right)\\
&= \sum_{\boldsymbol{q}\sigma'}\left(-\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{q}}\delta_{\sigma,\sigma'}c^\dagger_{\boldsymbol{q}\sigma',L}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,R}\right)\\
&= -c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,L}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,R}
\end{aligned} \tag{9}$$

[1] Anmerkung: $[c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,R},c^\dagger_{\boldsymbol{k}'\sigma',L}] = [c^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma,R},c_{\boldsymbol{k}'\sigma',L}] = [c_{\boldsymbol{k}\sigma,R},c^\dagger_{\boldsymbol{k}'\sigma',L}] = [c_{\boldsymbol{k}\sigma,R},c_{\boldsymbol{k}'\sigma',L}] = 0$

Also haben wir

$$I = -\frac{et}{i\hbar}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\sum_{\sigma}\left(\langle c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\sigma,L}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,R}\rangle - \langle c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\sigma,R}c_{\boldsymbol{k}'\sigma,L}\rangle\right) \tag{10}$$

Da der Hamilton-Operator invariant unter Spin-Rotationen ist, haben wir $\langle c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow,L}c_{\boldsymbol{k}'\uparrow,R}\rangle = \langle c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\downarrow,L}c_{\boldsymbol{k}'\downarrow,R}\rangle$ und wir können den Strom schreiben als

$$I = -\frac{2et}{i\hbar}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\left(\langle c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\uparrow,L}c_{\boldsymbol{k}'\uparrow,R}\rangle - \langle c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\downarrow,R}c_{\boldsymbol{k}'\downarrow,L}\rangle\right) \tag{11}$$

b) Die Green'sche Funktion $\hat{G}_{LR}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',\tau)$ hat die explizite Darstellung

$$\hat{G}_{LR}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',\tau) = -\begin{pmatrix} \langle T_\tau c_{\boldsymbol{k}\uparrow,L}(\tau)c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}'\uparrow,R}(0)\rangle & \langle T_\tau c_{\boldsymbol{k}\uparrow,L}(\tau)c_{-\boldsymbol{k}'\downarrow,R}(0)\rangle \\ \langle T_\tau c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow,L}(\tau)c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}'\uparrow,R}(0)\rangle & \langle T_\tau c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow,L}(\tau)c_{-\boldsymbol{k}'\downarrow,R}(0)\rangle \end{pmatrix} \tag{12}$$

Nehmen wir die Spur haben wir

$$\mathrm{Tr}\ \hat{G}_{LR}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',\tau) = -\langle T_\tau c_{\boldsymbol{k}\uparrow,L}(\tau)c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}'\uparrow,R}(0)\rangle - \langle T_\tau c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow,L}(\tau)c_{-\boldsymbol{k}'\downarrow,R}(0)\rangle \tag{13}$$

Für $\tau = 0^-$ haben wir

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\ \hat{G}_{LR}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',\tau) &= \langle c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}'\uparrow,R}c_{\boldsymbol{k}\uparrow,L}\rangle + \langle c_{-\boldsymbol{k}'\downarrow,R}c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow,L}\rangle = \langle c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}'\uparrow,R}c_{\boldsymbol{k}\uparrow,L}\rangle - \langle c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow,L}c_{-\boldsymbol{k}'\downarrow,R}\rangle \\ &= -\left(\langle c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow,L}c_{-\boldsymbol{k}'\downarrow,R}\rangle - \langle c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}'\uparrow,R}c_{\boldsymbol{k}\uparrow,L}\rangle\right)\end{aligned} \tag{14}$$

Also haben wir

$$I = \frac{2et}{i\hbar}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\mathrm{Tr}\ \hat{G}_{LR}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',0^-) = \frac{2et}{i\hbar}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\mathrm{Tr}\ \hat{G}_{LR}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',i\omega_n) \tag{15}$$

c) Wir haben die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\partial_\tau c_{\boldsymbol{k}\uparrow,L} &= -\xi_{\boldsymbol{k}}c_{\boldsymbol{k}\uparrow,L} + \Delta_L c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow,L} - \sum_{\boldsymbol{k}'} t c_{\boldsymbol{k}'\uparrow,R} \\ \partial_\tau c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow,L} &= \xi_{\boldsymbol{k}}c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}\downarrow,L} + \Delta^*_L c_{\boldsymbol{k}\uparrow,L} + \sum_{\boldsymbol{k}'} t c^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}'\downarrow,R}\end{aligned} \tag{16}$$

was für die Green'sche Funktion bedeutet (Anmerkung: Da $[c_{\boldsymbol{k}\sigma,L}, c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}'\sigma',R}] = 0$ haben wir *keine Deltafunktion* wegen der Diskontinuität des Zeitordnungsoperators)

$$(-\partial_\tau - \xi_{\boldsymbol{k}}\tau_z + \Delta_L\tau_+ + \Delta^*_L\tau_-)\hat{G}_{LR}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',\tau) = \sum_{\boldsymbol{q}} t\tau_z\hat{G}_{RR}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}',\tau) \tag{17}$$

oder im Frequenzraum

$$(i\omega_n - \xi_{\boldsymbol{k}}\tau_z + \Delta_L\tau_+ + \Delta^*_L\tau_-)\hat{G}_{LR}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',i\omega_n) = \sum_{\boldsymbol{q}} t\tau_z\hat{G}_{RR}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}',i\omega_n) \tag{18}$$

Definieren wir $\hat{G}^{-1}_{L,0}(\boldsymbol{k},i\omega_n) = (i\omega_n - \xi_{\boldsymbol{k}}\tau_z + \Delta_L\tau_+ + \Delta^*_L\tau_-)$ haben wir

$$\begin{aligned}\hat{G}^{-1}_{L,0}(\boldsymbol{k},i\omega_n)\hat{G}_{LR}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',i\omega_n) &= \sum_{\boldsymbol{q}} t\tau_z\hat{G}_{RR}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}',i\omega_n) \\ \Rightarrow \hat{G}_{LR}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',i\omega_n) &= t\hat{G}_{L,0}(\boldsymbol{k},i\omega_n)\tau_z\sum_{\boldsymbol{q}}\hat{G}_{RR}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}',i\omega_n)\end{aligned} \tag{19}$$

wobei $\hat{G}_{L,0} = \frac{i\omega_n + \xi_{\boldsymbol{k}}\tau_3 - \Delta_L\tau_+ - \Delta_L^*\tau_-}{-\omega_n^2 - \epsilon_{\boldsymbol{k}}^2 - |\Delta_L|^2}$ wie in der ersten Aufgabe berechnet. Um die Bewegungsgleichung exakt zu lösen müssten wir auch die Bewegungsgleichung für $\hat{G}_{RR}$ aufschreiben und dann die gekoppelten Bewegungsgleichungen lösen. Dies kann zwar gemacht werden (und ist nicht so schwierig) aber hier machen wir nur eine Berechnung in erster Ordnung in t.

Da t bereits auf der rechten Seite vorkommt können wir die Green'sche Funktion $\hat{G}_{RR}$ mit der ungestörten Green'schen Funktion ersetzen, $\hat{G}_{RR}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{k}', i\omega_n) = \delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}'}\hat{G}_{R,0}(\boldsymbol{k}', i\omega_n)$ mit $\hat{G}_{R,0}(\boldsymbol{k}, i\omega_n) = \frac{i\omega_n + \xi_{\boldsymbol{k}}\tau_3 - \Delta_R\tau_+ - \Delta_R^*\tau_-}{-\omega_n^2 - \epsilon_{\boldsymbol{k}}^2 - |\Delta_R|^2}$, um die erste Ordnung zu bekommen. Also haben wir

$$\hat{G}_{LR}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}', i\omega_n) = t\hat{G}_{L,0}(\boldsymbol{k}, i\omega_n)\tau_z\hat{G}_{R,0}(\boldsymbol{k}', i\omega_n) + \mathcal{O}(t^2) \tag{20}$$

Setzen wir dies in den Ausdruck für den Strom hinein bekommen wir ein Beitrag in zweiter Ordnung in t:

$$I = \frac{2et^2}{i\hbar}\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\mathrm{Tr}\left(\hat{G}_{L,0}(\boldsymbol{k}, i\omega_n)\tau_z\hat{G}_{R,0}(\boldsymbol{k}', i\omega_n)\right) \tag{21}$$

Die ungestörte Nambu-Gorkov Green'sche Funktionen können auf die folgende Form geschrieben werden

$$\hat{G}_{L/R,0}(\boldsymbol{k}, i\omega_n) = \begin{pmatrix} G_{L/R}(\boldsymbol{k}, i\omega_n) & F_{L/R}^*(\boldsymbol{k}, i\omega_n) \\ F_{L/R}(\boldsymbol{k}, i\omega_n) & -G_{L/R}^*(\boldsymbol{k}, i\omega_n) \end{pmatrix} \tag{22}$$

wobei $G_{L/R}(\boldsymbol{k}, i\omega_n) = \frac{i\omega_n + \xi_{\boldsymbol{k}}}{-\omega_n^2 - \epsilon_{\boldsymbol{k}}^2 - |\Delta_{L/R}|^2}$ und $F_{L/R}(\boldsymbol{k}, i\omega_n) = \frac{-\Delta_{L/R}^*}{-\omega_n^2 - \epsilon_{\boldsymbol{k}}^2 - |\Delta_{L/R}|^2}$. Also haben wir

$$I = \frac{2et^2}{i\hbar}\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\Big(G_L(\boldsymbol{k}, i\omega_n)G_R(\boldsymbol{k}', i\omega_n) - F_L^*(\boldsymbol{k}, i\omega_n)F_R(\boldsymbol{k}', i\omega_n) - \text{c.c.}\Big) \tag{23}$$

d) Da

$$G_L(\boldsymbol{k}, i\omega_n)G_R(\boldsymbol{k}', i\omega_n) = \frac{(i\omega_n + \xi_{\boldsymbol{k}})(i\omega_n + \xi_{\boldsymbol{k}'})}{(\omega_n^2 + \xi_{\boldsymbol{k}}^2 + |\Delta|^2)(\omega_n^2 + \xi_{\boldsymbol{k}'}^2 + |\Delta|^2)} \tag{24}$$

haben wir

$$G_L(\boldsymbol{k}, i\omega_n)G_R(\boldsymbol{k}', i\omega_n) - \text{c.c.} = \frac{i\omega_n(\xi_{\boldsymbol{k}} + \xi_{\boldsymbol{k}'})}{(\omega_n^2 + \xi_{\boldsymbol{k}}^2 + |\Delta|^2)(\omega_n^2 + \xi_{\boldsymbol{k}'}^2 + |\Delta|^2)} \tag{25}$$

Benutzen wir dann die Näherung $\sum_{\boldsymbol{k}} = \frac{N_0}{2}\int d\xi$ sehen wir dann, dass dieser Term unter der integration über ξ und ξ' verschwindet. Also haben wir nur den Term

$$F_L^*(\boldsymbol{k}, i\omega_n)F_R(\boldsymbol{k}', i\omega_n) - \text{c.c.} = \frac{|\Delta|^2(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})}{(\omega_n^2 + \xi_{\boldsymbol{k}}^2 + |\Delta|^2)(\omega_n^2 + \xi_{\boldsymbol{k}'}^2 + |\Delta|^2)} \tag{26}$$

und wir haben

$$I = I_c \sin\varphi \tag{27}$$

wobei

$$I_c = \frac{2et^2|\Delta|^2}{\hbar}\frac{2}{\beta}\sum_{\omega_n}\left(\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\omega_n^2 + \xi_{\boldsymbol{k}}^2 + |\Delta|^2}\right)^2 \tag{28}$$

Benutzen wir die Näherung $\sum_{\boldsymbol{k}} = \frac{N_0}{2} \int d\xi$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{1}{\xi^2 + \omega_n^2 + |\Delta|^2} = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_n^2 + |\Delta|^2}} \tag{29}$$

haben wir

$$I_c = \frac{e\pi^2 N_0^2 t^2 |\Delta|^2}{\hbar} \frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} \frac{1}{\omega_n^2 + |\Delta|^2} \tag{30}$$

Die Matsubara Summe kann wie gewöhnlich durch ein Konturintegration berechnet werden wobei wir die zwei Pole $z = \pm|\Delta|$ mit den Residuen $\frac{1}{2|\Delta|}$ in betracht ziehen müssen. Wir haben dann

$$I_c = \frac{e\pi^2 N_0^2 t^2 |\Delta|^2}{\hbar} \frac{1}{2|\Delta|} \left(n_F(\Delta) - n_F(-\Delta)\right) = \frac{e\pi^2 N_0^2 t^2 |\Delta|}{2\hbar} \tanh\left(\frac{\beta\Delta}{2}\right) \tag{31}$$

Mit $R_N^{-1} = \pi e^2 t^2 N_0^2 / \hbar$ haben wir dann

$$I_c = \frac{\pi|\Delta|}{2eR_N} \tanh\left(\frac{\beta\Delta}{2}\right) \tag{32}$$

Volle Lösung

Allgemein können wir die Bewegungsgleichungen für $\hat{G}_{LL}$, $\hat{G}_{LR}$ etc auf die Form

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\hat{G}_{L,0}^{-1}(\boldsymbol{k},i\omega_n) & 0\\ 0 & \hat{G}_{R,0}^{-1}(\boldsymbol{k},i\omega_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{G}_{LL}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',i\omega_n) & \hat{G}_{LR}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',i\omega_n)\\ \hat{G}_{RL}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',i\omega_n) & \hat{G}_{RR}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',i\omega_n)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} & 0\\ 0 & \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\end{pmatrix}+\sum_{\boldsymbol{q}}\begin{pmatrix}0 & t\\ t & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{G}_{LL}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}',i\omega_n) & \hat{G}_{LR}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}',i\omega_n)\\ \hat{G}_{RL}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}',i\omega_n) & \hat{G}_{RR}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}',i\omega_n)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{33}$$

oder

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\hat{G}_{LL}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',i\omega_n) & \hat{G}_{LR}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',i\omega_n)\\ \hat{G}_{RL}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',i\omega_n) & \hat{G}_{RR}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',i\omega_n)\end{pmatrix}=\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\begin{pmatrix}\hat{G}_{L,0}(\boldsymbol{k},i\omega_n) & 0\\ 0 & \hat{G}_{R,0}(\boldsymbol{k},i\omega_n)\end{pmatrix}\\ &+\begin{pmatrix}\hat{G}_{L,0}(\boldsymbol{k},i\omega_n) & 0\\ 0 & \hat{G}_{R,0}(\boldsymbol{k},i\omega_n)\end{pmatrix}\sum_{\boldsymbol{q}}\begin{pmatrix}0 & t\\ t & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{G}_{LL}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}',i\omega_n) & \hat{G}_{LR}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}',i\omega_n)\\ \hat{G}_{RL}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}',i\omega_n) & \hat{G}_{RR}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}',i\omega_n)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{34}$$