Karlsruher Institut für Technologie
Institut für theoretische Festkörperphysik

Prof. Dr. Gerd Schön
Dr. Michael Marthaler, Dr. Jens Michelsen

http://www.tfp.kit.edu/studium-lehre_444.php

ÜBUNGSBLATT NR. $\boxed{8}$
Theorie der kondensierten Materie II, SS 2012

Ausgabe **22.06.12**
Besprechung **29.06.12**

1 Störstellen im Supraleiter (15 Punkte)

Wir betrachten einen Supraleiter mit magnetischen und nicht-magnetischen Verunreinigungen. Diese System wird beschrieben durch den Hamilton-Operator $H = H_0 + H_\mathrm{s} + H_\mathrm{mag}$, mit

$$H_0 = \int d^3r \boldsymbol{\psi}^\dagger \epsilon(-i\nabla)\boldsymbol{\psi} - \Delta \int d^3r \left[\psi_\uparrow^\dagger \psi_\downarrow^\dagger + \psi_\downarrow \psi_\uparrow\right] , \tag{1}$$

$$H_\mathrm{s} = \int d^3r V_1(r) \boldsymbol{\psi}^\dagger \boldsymbol{\psi} , \tag{2}$$

$$H_\mathrm{mag} = \int d^3r \boldsymbol{\psi}^\dagger \mathbf{V}_2(r) \cdot \boldsymbol{\sigma\psi} . \tag{3}$$

Hierbei wird der ungestörte Supraleiter beschrieben durch H_0 (Δ wird als reel angenommen), die nicht-magnetischen Störstellen durch H_s und die magnetischen Störstellen durch H_mag. Für die Feldoperatoren, benutzen wir die Schreibweise,

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\psi}^* = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow^\dagger \\ \psi_\downarrow^\dagger \end{pmatrix} . \tag{4}$$

Die Definition von $\boldsymbol{\psi}^*$ ermöglicht es uns später, die Zeitentwicklung des Feldoperators $\boldsymbol{\psi}^\dagger = (\psi_\uparrow^\dagger \quad \psi_\downarrow^\dagger)$ kompakt zu schreiben.
Die Störstellenpotentiale sind definiert durch

$$V_1(r) = U_1 \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i), \quad \mathbf{V}_2 = U_2 \sum_\beta \mathbf{S}_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_j) . \tag{5}$$

In unserem System haben wir N_i nichtmagnetische und N_mag magnetische unkorreliert Störstellen. Verwenden sie für die magnetischen Störstellen $\langle S_{i\alpha} S_{i\beta} \rangle = \frac{1}{3} S(S+1) \delta_{\alpha\beta}$.

a) (3 Punkte) Zeigen sie, dass der 4-Komponentenvektor

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{\psi}^* \end{pmatrix} \tag{6}$$

durch folgende Bewegungsgleichung beschrieben wird,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \tau} = -\epsilon(-i\nabla)\tau_3 \boldsymbol{\Phi} - \tau_2 \sigma_2 \Delta \boldsymbol{\Phi} - V_1 \tau_3 \boldsymbol{\Phi} - \mathbf{V_2} \cdot \boldsymbol{\alpha\Phi}, \tag{7}$$

mit

$$\alpha_i = \frac{1}{2}\sigma_i (1 + \tau_3) + \frac{1}{2}\sigma_2 \sigma_i \sigma_2 (1 - \tau_3) . \tag{8}$$

und den Matrizen $\sigma_i = \mathbf{1} \otimes \sigma_\mathbf{i}$ und $\tau_i = \sigma_i \otimes \mathbf{1}$.

b) (2 Punkte) Finden sie auch die Bewegungsgleichung für die Green'sche Funktion

$$G(1,2) = -\langle T\mathbf{\Phi}(1)\mathbf{\Phi}^\dagger(2)\rangle\,. \tag{9}$$

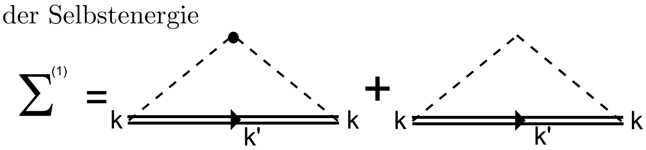
c) (2 Punkte) Zeigen sie, dass die ungestörte Green'sche Funktion ($U_1 = U_2 = 0$), im Impuls und Energieraum gegeben ist durch

$$G_0(k, i\omega) = (i\omega - \epsilon_k\tau_3 - \Delta\tau_2\sigma_2)^{-1}\,. \tag{10}$$

d) (8 Punkte) Entwickeln sie nun die Green'sche Funktion in einer Störreihe in U_1 und U_2. Die volle Greensche Funktion ist dann gegeben durch

$$G^{-1} = G_0^{-1} - \Sigma\,. \tag{11}$$

mit der Selbstenergie



wobei der Punkt Streuung an einer magnetischen Störstelle darstellt. Die volle Green'sche Funktion kann nun in folgender Form geschrieben werden:

$$G = (i\tilde{\omega} - \epsilon_k\tau_3 - \tilde{\Delta}\tau_2\sigma_2)^{-1}\,. \tag{12}$$

Finden sie eine Gleichung, mit der sich $\tilde{\omega}$ und $\tilde{\Delta}$ bestimmen lassen.

2 | Renormalisierung der supraleitenden Lücke durch nichtmagnetische Störstellen (5 Punkte)

In einem Supraleiter mit nichtmagnetischen Störstellen lassen sich folgende Gleichungen finden für die renormalisierte Matsubara Frequenz und die renormalisierte supraleitende Lücke:

$$\tilde{\omega} = \omega + \frac{1}{2\tau}\frac{\tilde{\omega}}{(\tilde{\omega}^2 + \tilde{\Delta}^2)^{1/2}}\,, \tag{13}$$

$$\tilde{\Delta} = \Delta + \frac{1}{2\tau}\frac{\tilde{\Delta}}{(\tilde{\omega}^2 + \tilde{\Delta}^2)^{1/2}}\,. \tag{14}$$

Dies sind dieselben Gleichungen die in Aufgabe 1d) bestimmt wurden, im Grenzfall $U_2 = 0$. Der Effekt der nichtmagnetischen Störstellen wird charakterisiert durch die bekannte Streurate τ^{-1}. Zusammen mit der Gleichung

$$\Delta = k_B T\pi V N(0)\sum_{\omega_n}\frac{\tilde{\Delta}}{(\tilde{\Delta}^2 + \tilde{\omega}_n^2)^{1/2}}\,, \tag{15}$$

lässt sich nun die supraleitende Lücke bestimmen. Wie hängt die supraleitende Lücke von der Streurate τ^{-1} ab?