KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR THEORETISCHE FESTKÖRPERPHYSIK

Prof. Dr. Gerd Schön
Dr. Michael Marthaler, Dr. Jens Michelsen

http://www.tfp.kit.edu/studium-lehre_444.php

ÜBUNGSBLATT NR. 9
Theorie der kondensierten Materie II, SS 2012

Ausgabe **29.06.12**
Besprechung **06.07.12**

1 | Lösung der homogenen Eilenberger-Gleichung (10 Punkte)

a) (3 Punkte) Für ein homogenes System mit $1/\tau_s = 0$, $\boldsymbol{A} = 0$ und $\Sigma_{\rm ph} = -i\Delta\tau_1$, nimmt die Eilenberger-Gleichung die Form

$$[\omega_n\tau_3 + \Delta\tau_1, \hat{g}_0] = 0, \qquad \hat{g}_0\hat{g}_0 = \hat{1} \tag{1}$$

Benutzen Sie den Ansatz $\hat{g}_0 = g\tau_3 + f\tau_1$ um die quasiklassische Green'sche Funktion zu finden. Um eventuelle Vorzeichen zu bestimmen können Sie den Normalfall $g = \text{sign}(\omega_n)$ benutzen.

b) (7 Punkte) Betrachten Sie für das gleiche System die Selbstkonsistenzbedingung

$$\Delta = \pi\lambda\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n} f(\omega_n) \tag{2}$$

Nahe $T \approx T_c$ ist Δ klein, und die nebendiagonale Green'sche Funktion f kann in $\Delta/\omega_n \propto \Delta/T$ entwickelt werden. D.h. wir haben

$$\Delta = \pi\lambda\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n} f^{(1)}(\omega_n) + \pi\lambda\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n} f^{(3)}(\omega_n) + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta^5}{T^5}\right) \tag{3}$$

wobei $f^{(n)} \sim \mathcal{O}(\Delta^n/T^n)$ [Anmerkung: die geraden Potenzen von Δ/T verschwinden da f eine ungerade Funktion von Δ ist]. Die erste Summe divergiert und der natürliche obere cut-off ω_D muss benutzt werden. Der zweite Term ist aber regulär und braucht keinen cut-off.

Betrachten Sie zuerst den Grenzfall $T = T_c$ und behalten Sie dafür nur den ersten Term auf der rechten Seite. Die Gleichung wird dann unabhängig von Δ. Benutzen Sie diese um T_c zu bestimmen.

Betrachten Sie danach den Fall $T = T_c + \delta T$ mit $|\delta T/T_c| = |(T - T_c)/T_c| \ll 1$ und behalten auch den zweiten Term auf der rechten Seite. Zeigen Sie, dass die Gleichung auf die Form

$$0 = \alpha\Delta + \beta\Delta^3, \tag{4}$$

mit $\alpha = (T - T_c)/T_c$ und $\beta = 7\zeta(3)/8\pi^2T^2$ gebracht werden kann, wobei $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ die Riemann-Zeta-Funktion ist mit $\zeta(3) \approx 1.202$. Zeigen Sie, anhand einer graphischen Lösung, dass es nur für $T < T_c$ Lösungen mit $|\Delta| \neq 0$ geben kann.

2 | Lösung der Usadel-Gleichung mit räumlichen Variationen (10 Punkte)

In dieser Aufgabe wird eine räumliche Variation des Ordnungsparameters $\Delta(\boldsymbol{r}) = |\Delta(\boldsymbol{r})|e^{i\theta(\boldsymbol{r})}$ erlauben. Die Usadel-Gleichung nimmt dann die Form

$$[\omega_n \tau_3 + \hat{\Delta}, \hat{g}_0] = D\boldsymbol{\nabla}\left(\hat{g}_0 \boldsymbol{\nabla} \hat{g}_0\right), \qquad \hat{g}_0\hat{g}_0 = \hat{1} \tag{5}$$

wobei $\hat{\Delta} = |\Delta(\boldsymbol{r})|e^{i\tau_3\theta(\boldsymbol{r})}\tau_1$, und $D = v_F^2\tau/3$ die Diffusionskonstante darstellt.

a) (4 Punkte) Benutzen Sie den Ansatz $\hat{g}_0 = g(\boldsymbol{r})\tau_1 + f(\boldsymbol{r})e^{i\tau_z\theta(\boldsymbol{r})}\tau_1$ und zeigen Sie, dass die Usadel-Gleichung auf folgende zwei Gleichungen zurückgeführt werden kann

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\nabla}\left[(\boldsymbol{\nabla}\theta)f^2\right] = 0, \\ &\omega_n f - |\Delta| g = \frac{D}{2}\Big[-(\boldsymbol{\nabla}\theta)^2 g f + g\boldsymbol{\nabla}^2 f - f\boldsymbol{\nabla}^2 g\Big] \end{aligned} \tag{6}$$

Anmerkung: Die erste Gleichung besagt, dass die Superstromdichte $j_s \propto (\boldsymbol{\nabla}\theta)f^2$ konstant ist.

b) (6 Punkte) Lösen Sie die zweite Gleichung für $T \approx T_c$ und langsame räumliche Variationen. Setzen Sie dann die Lösung für f in die Selbstkonsistenzgleichung ein und zeigen Sie, ähnlich wie in der vorigen aufgabe, dass die Gleichung für $T \approx T_c$ auf die folgende Form gebracht werden kann

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha\Delta + \beta\Delta^3 - \xi^2\Big[(\boldsymbol{\nabla}\theta)^2|\Delta| - \boldsymbol{\nabla}^2|\Delta|\Big] \\ &= \alpha\Delta + \beta\Delta^3 - \xi^2\boldsymbol{\nabla}^2\Delta \end{aligned} \tag{7}$$

wobei α, β wie in Aufgabe 1, und $\xi^2 = \pi D/8T$.

[**Hinweis:** Benutzen Sie für die Green'sche Funktionen auf der rechten Seite der unteren Gleichung (6) die Lösung der Gleichung $\omega_\mu f_0 - |\Delta(\boldsymbol{r})|g_0 = 0$ in erster Ordnung von $|\Delta|/T$ um die verlangte Näherung von f zu bekommen. In der Selbstkonsistenzgleichung sollten allerdings auch Terme $\propto (\Delta/T)^3$ berücksichtigt werden.