

Moderne Methoden der Datenanalyse – Konfidenzinterfalle –

Roger Wolf
25. Juni 2020

Inhalt dieser Vorlesung

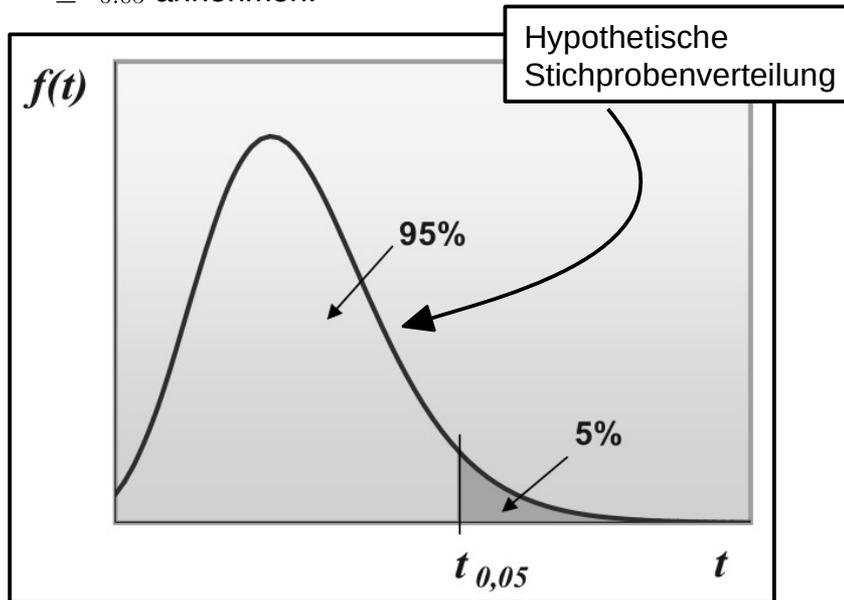
- Konfidenzintervalle (ein- und zweiseitig).
- Inklusions- und Repräsentationsschluss.
- Genauere Diskussion der oberen Grenze („upper limit“):
 - Frequentistisch (Neyman Konstruktion).
 - Abdeckung.
 - Bayesianisch (mit verschiedenen priors).
 - Signal auf bekanntem Untergrund.
 - Obere Grenzen nahe bei physikalischen Grenzen (z.B. für positive Signale).
 - Obere Grenzen und systematische Unsicherheiten.
 - Beispiele von LEP und LHC.

Konfidenzintervall

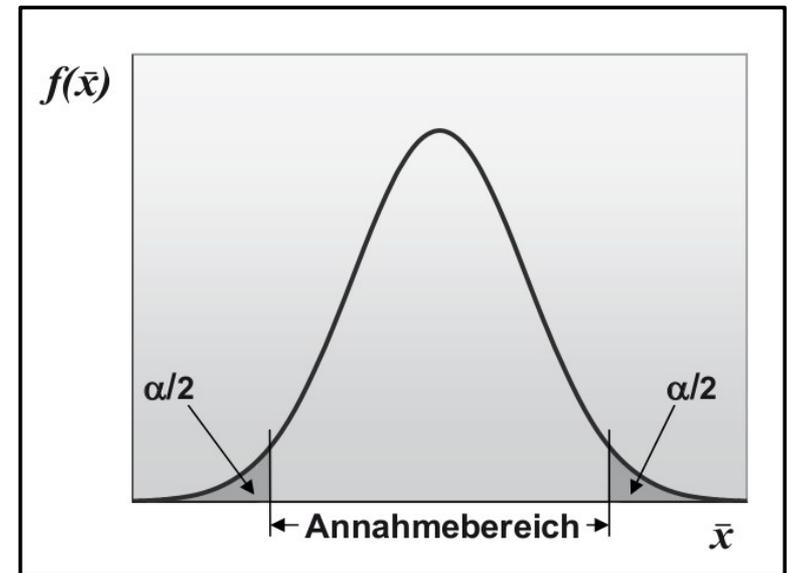
Das Konfidenzintervall (Vertrauensintervall) zu einer vorgegebenem Wahrscheinlichkeit α gibt den Wertebereich einer Teststatistik t an, in den eine mögliche Realisation mit einer Wahrscheinlichkeit α fallen wird.

- Ein Konfidenzintervall kann ein- oder zweiseitig sein:

D.h. t wird mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit Werte $t \leq t_{0,05}$ annehmen.

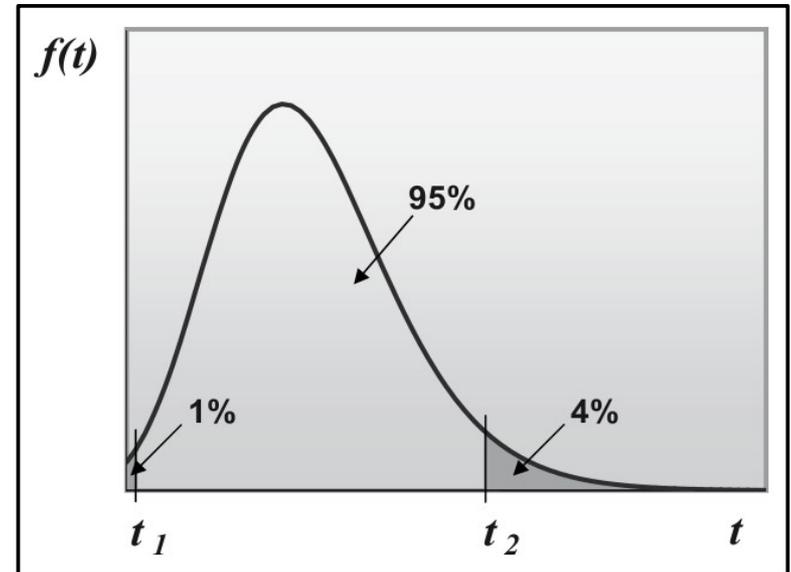
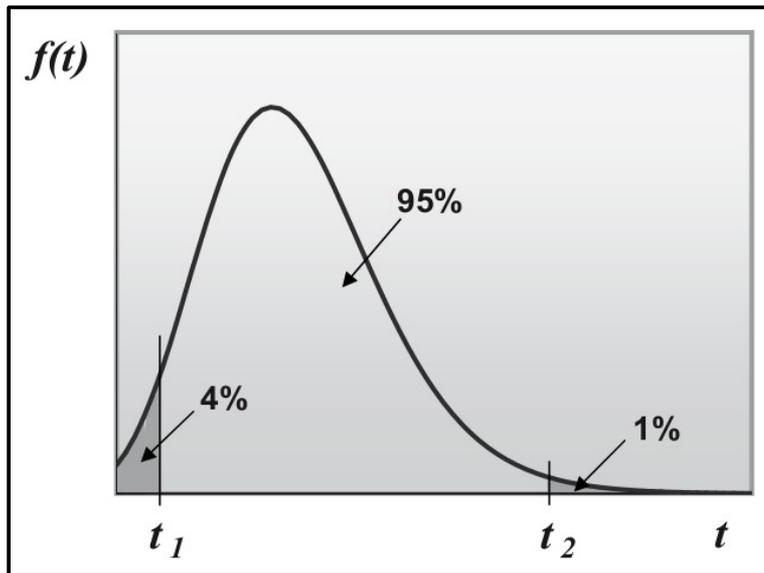
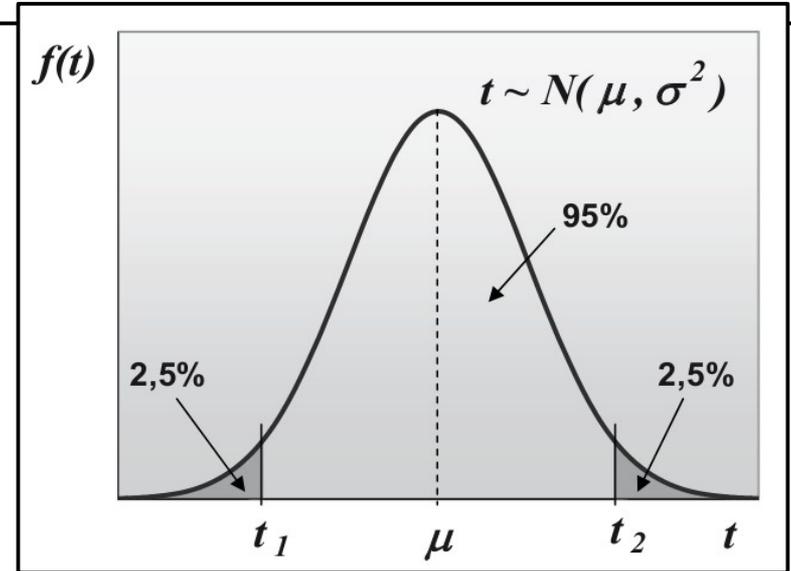


D.h. t wird mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ Werte im Annahmebereich annehmen.



Konfidenzintervall – zweiseitig

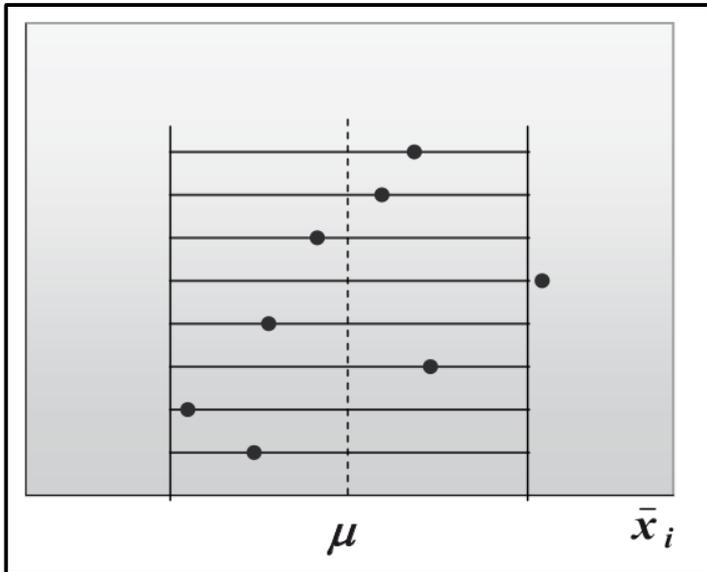
- Die Angabe zweiseitiger Intervalle kann auf verschiedene Art und Weisen erfolgen.
- Üblich ist die Angabe symmetrischer Intervalle, auch bei asymmetrischen Stichprobenverteilungen, d.h. ober- und unterhalb des Schätzwertes liegen gleichviele Anteile außerhalb des Intervalls.



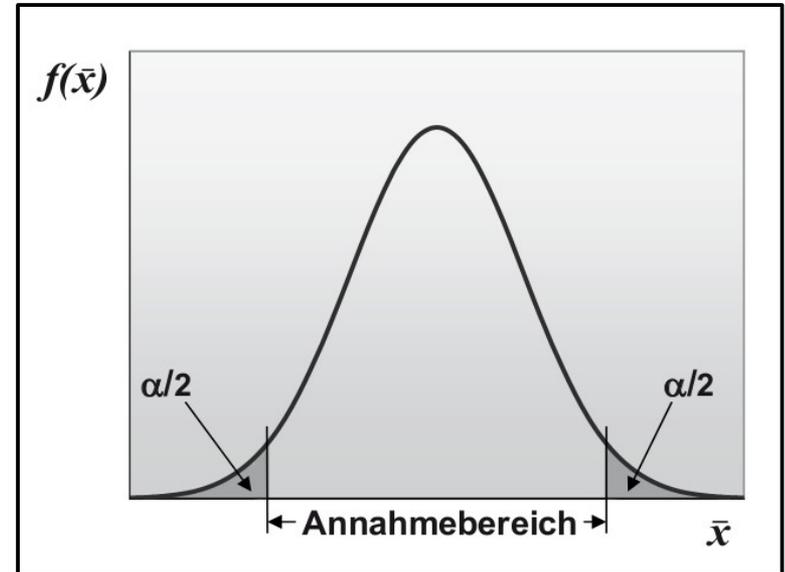
Inklusionsschluss

- Bei angenommener Stichprobenverteilung vor der Stichprobenziehung (=Messung).

Schätzverfahren:



Testverfahren:



- Anteil der Stichproben, die ins angegebene Konfidenzintervall fallen:

$$\mathcal{P}(\mu - z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_{\bar{x}} \leq \hat{x} \leq \mu - z_{1+\alpha/2} \cdot \sigma_{\bar{x}}) = 1 - \alpha$$

$$|e| \equiv z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_{\bar{x}} \quad (\text{Stichprobenfehler})$$

- Wahrscheinlichkeit dafür, dass Stichprobe ins angegebene Konfidenzintervall fällt:

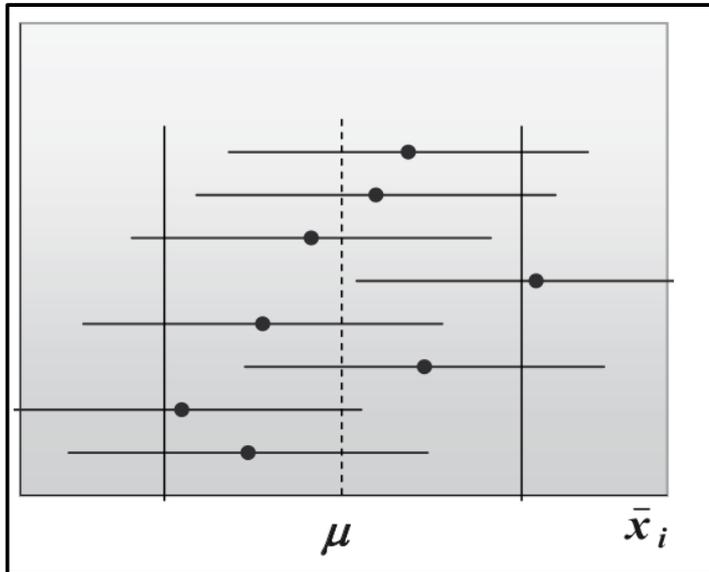
$$\mathcal{P}(\mu - z_{1-\alpha/2} \leq \hat{X} \leq \mu - z_{1+\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

- Falsche Beurteilung erfolgt mit Wahrscheinlichkeit α .

Repräsentationsschluss

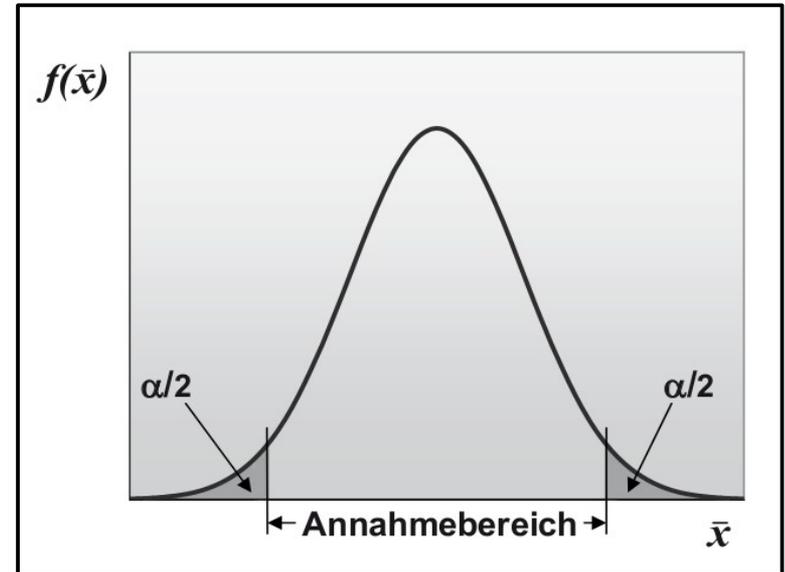
- Bei angenommener Stichprobenverteilung nach der Stichprobenziehung (=Messung).

Schätzverfahren:



- Anteil $1 - \alpha$ der Stichprobenergebnisse überdeckt den wahren Wert μ mit ihren Konfidenzintervallen $[\bar{x} - |e|; \bar{x} + |e|]$ (→ Abdeckung).

Testverfahren:



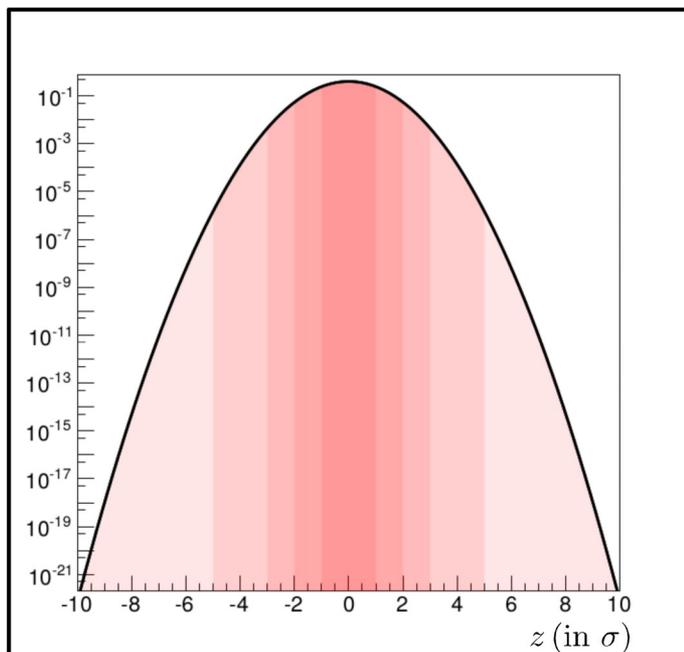
- Stichprobenziehung und Auswertung:
- $\hat{x} \in [\bar{x} - |e|; \bar{x} + |e|]$: Annahme von H_0 mit Irrtumswahrscheinlichkeit α .
- $\hat{x} \notin [\bar{x} - |e|; \bar{x} + |e|]$: Ablehnung von H_0 mit unbekannter Irrtumswahrscheinlichkeit.

Anmerkungen: Inklusions- und Repräsentationsschluss

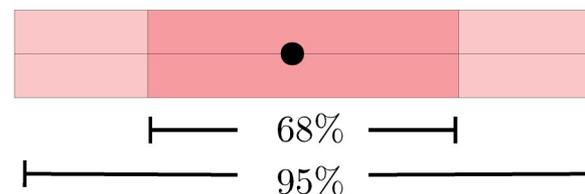
- Das Unsicherheitsband einer Vorhersage folgt dem Inklusionsschluss.
- Der klassische „Fehlerbalken“ an einem Datenpunkt folgt (insbesondere im frequentistischen Ansatz) dem Repräsentationsschluss.
- In der frequentistischen Statistik gibt es keine Unsicherheit für den Messwert.
- In der Bayesianischen Statistik kann das Konfidenzintervall als Quantil einer Wahrscheinlichkeitsdichte für den wahren Wert interpretiert werden.

Zweiseitige Intervallgrenzen – „Fehlerbalken“

- Dem „Fehlerbalken“, den Sie kennen liegt üblicherweise eine Normalverteilung zugrunde. Der zentrale Schätzwert entspricht μ und die Länge des Balkens $\pm\sigma$.



$$\mu \pm \sigma_{0.68} @ 68\% \text{ CL}$$



$1 - \alpha$	α	z (in σ)
0.683	0.317	1
0.90	0.1	1.65
0.95	0.05	1.96
0.955	0.045	2
0.997	0.003	3
0.999	5.7×10^{-7}	5

- In den Naturwissenschaften sind 68% ($\approx \pm 1\sigma$) und 95% ($\approx \pm 2\sigma$) Konfidenzintervalle üblich, in der Astro(teilchen-)physik auch 90%. In den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften auch 25%, 50% und 75% Konfidenzintervalle.

Beispiel: Untere Grenze

- Ein Angestellter muss jeden Tag um 8:00 Uhr morgens bei der Arbeit sein. Der Arbeitsweg dauert im Mittel 30 min mit einer Gaußförmig angenommenen Streuung von $\sigma = 10$ min.
- **Frage:**
Wann muss er das Haus verlassen, um nur einmal im Jahr zu spät zu sein? Wir nehmen 200 Arbeitstage an. Er kommt dann in 0.5% aller möglichen Fälle zu spät.

Eine Integraltabelle aus der Schule GK13 finden Sie z.B. [hier](#).

Beispiel: Untere Grenze

- Ein Angestellter muss jeden Tag um 8:00 Uhr morgens bei der Arbeit sein. Der Arbeitsweg dauert im Mittel 30 min mit einer Gaußförmig angenommenen Streuung von $\sigma = 10$ min.
- **Frage:**
Wann muss er das Haus verlassen, um nur einmal im Jahr zu spät zu sein? Wir nehmen 200 Arbeitstage an. Er kommt dann in 0.5% aller möglichen Fälle zu spät.

$$1 - \alpha = \int_{t_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (t - \mu)^2\right) dt$$

Eine Integraltabelle aus der Schule GK13 finden Sie z.B. [hier](#).

$$t_\alpha = 8:00 \quad \sigma = 10 \text{ min}$$

$$\bar{t} = 30 \text{ min} \quad 1 - \alpha = 0.005$$

Einseitiges Limit $\equiv 2.6\sigma$ (aus Tabelle ausgelesen)

$$\begin{aligned} \text{Abfahrtszeit: } t_{\text{Abfahrt}} &= \underbrace{8:00}_{\equiv t_\alpha} - \underbrace{0:30}_{\equiv \bar{t}} - \underbrace{2.6 \times 0:10}_{\equiv 2.6\sigma} = 7:04 \\ &\quad \equiv t_\alpha \quad \equiv \bar{t} \quad \equiv 2.6\sigma \end{aligned}$$

Obere Grenze

- Im folgenden werden wir die Konstruktion einseitiger Konfidenzintervalle für die „obere Grenze“ eines wahren Wertes diskutieren.
- Die Vorgehensweise zur Bestimmung der „unteren Grenze“ und das zweiseitige Intervall können aus dieser Diskussion abgeleitet werden.
- Die Diskussion von Komplikationen bei der Entscheidung, über die Angabe von ein- oder zweiseitigen Konfidenzintervallen oblasse ich der Lektüre der Folien von Meyer/Quast. Diese Fälle sind ohnehin nicht sehr praxisnah. Im Zweifel geben Sie beides an.

Obere Grenze

Die obere Grenze auf einen Modellparameter μ bei gegebener Beobachtung y_{obs} (oder N_{obs}) entspricht dem größten Wert von μ , für den die Wahrscheinlichkeit eine Beobachtung von $y \leq y_{\text{obs}}$ oder $N \leq N_{\text{obs}}$ zu machen kleiner als α ist.

Wir werden diesen Wert im folgenden als “upper limit at $1 - \alpha$ confidence level (CL), $\mu_{1-\alpha}$ ” bezeichnen.

- In der Teilchenphysik verwenden wir üblicherweise $\alpha = 0.05$ (d.h. 95% CL limits).
- **Bedeutung:**
Für $\mu = \mu_{0.95}$ wäre (dem Modell folgend) in 95% aller möglichen Ausgänge des Experiments ein Wert von $y > y_{\text{obs}}$ oder $N > N_{\text{obs}}$ zu erwarten. Für $\mu > \mu_{0.95}$ wäre dieser Anteil noch größer. Die Beobachtung schränkt den Parameter μ mit 95% CL auf Werte nicht größer als $\mu_{0.95}$ ein.

„Mit 95% CL ist μ kleiner als $\mu_{0.95}$.“

Obere Grenze

Die obere Grenze auf einen Modellparameter μ bei gegebener Beobachtung y_{obs} (oder N_{obs}) entspricht dem größten Wert von μ , für den die Wahrscheinlichkeit eine Beobachtung von $y \leq y_{\text{obs}}$ oder $N \leq N_{\text{obs}}$ zu machen kleiner als α ist.

Wir werden diesen Wert im folgenden als “upper limit at $1 - \alpha$ confidence level (CL), $\mu_{1-\alpha}$ ” bezeichnen.

- In der Teilchenphysik verwenden wir üblicherweise $\alpha = 0.05$ (d.h. 95% CL limits).
- **Bedeutung:**
Für $\mu = \mu_{0.95}$ wäre (dem Modell folgend) in 95% aller möglichen Ausgänge des Experiments ein Wert von $y > y_{\text{obs}}$ oder $N > N_{\text{obs}}$ zu erwarten. Für $\mu > \mu_{0.95}$ wäre dieser Anteil noch größer. Die Beobachtung schränkt den Parameter μ mit 95% CL auf Werte nicht größer als $\mu_{0.95}$ ein.

„Mit 95% CL ist μ kleiner als $\mu_{0.95}$.“

- **Frage:**
Ist $\mu_{0.90}$ kleiner oder größer als $\mu_{0.95}$ und was bedeutet das?

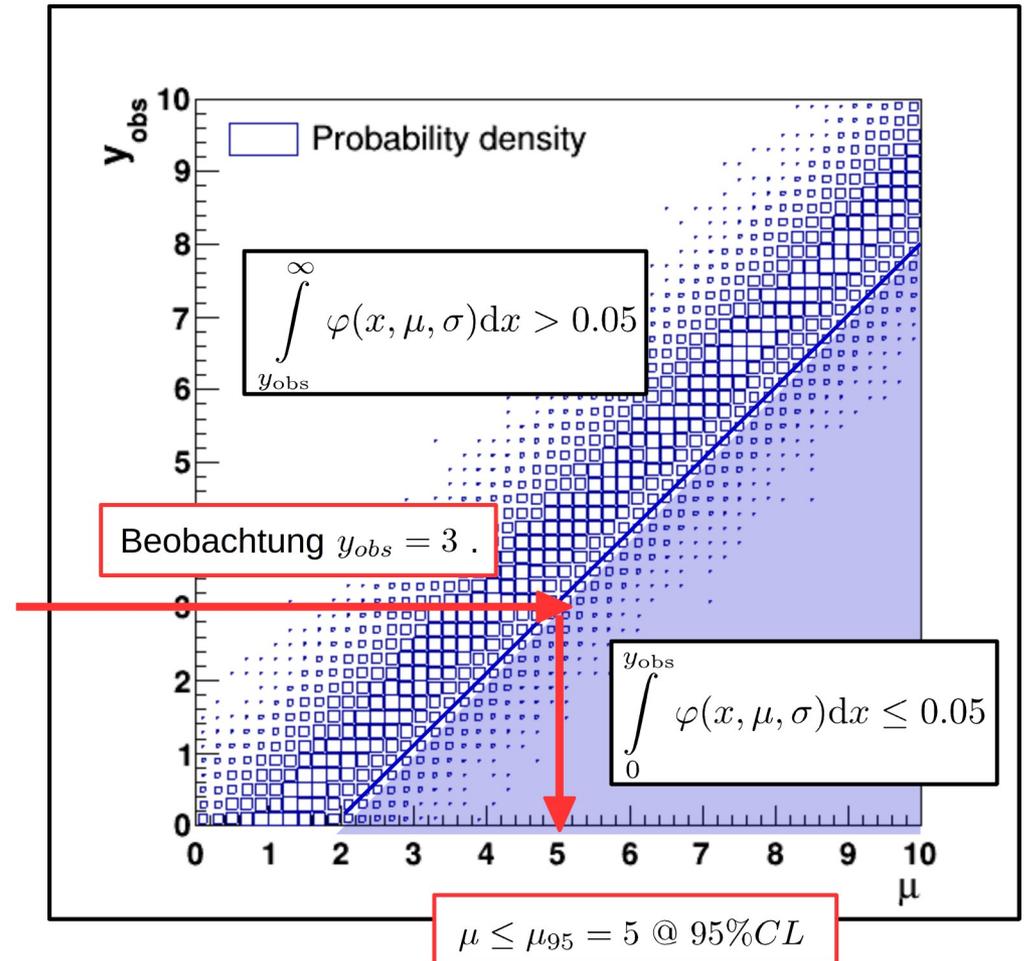
Neyman Konstruktion (Normalverteilung)

- Im folgenden ist gezeigt, wie die obere Grenze $\mu_{0.95}$ im frequentistischen Ansatz konstruiert wird. Die Diskussion findet am Beispiel der Normalverteilung statt:

Ein lauffähiges Root macro finden Sie [hier](#).

- Neyman Konstruktion:**

- Evaluiere *pdf* für verschiedene μ .
- Bestimme $\mu_{0.95}$ (blaue Linie im plot).
- Verbinde an den Rändern.
- Für gegebenes $y_{obs} = 3$ kann $\mu_{0.95}$ wie durch die roten Pfeile dargestellt abgelesen werden.



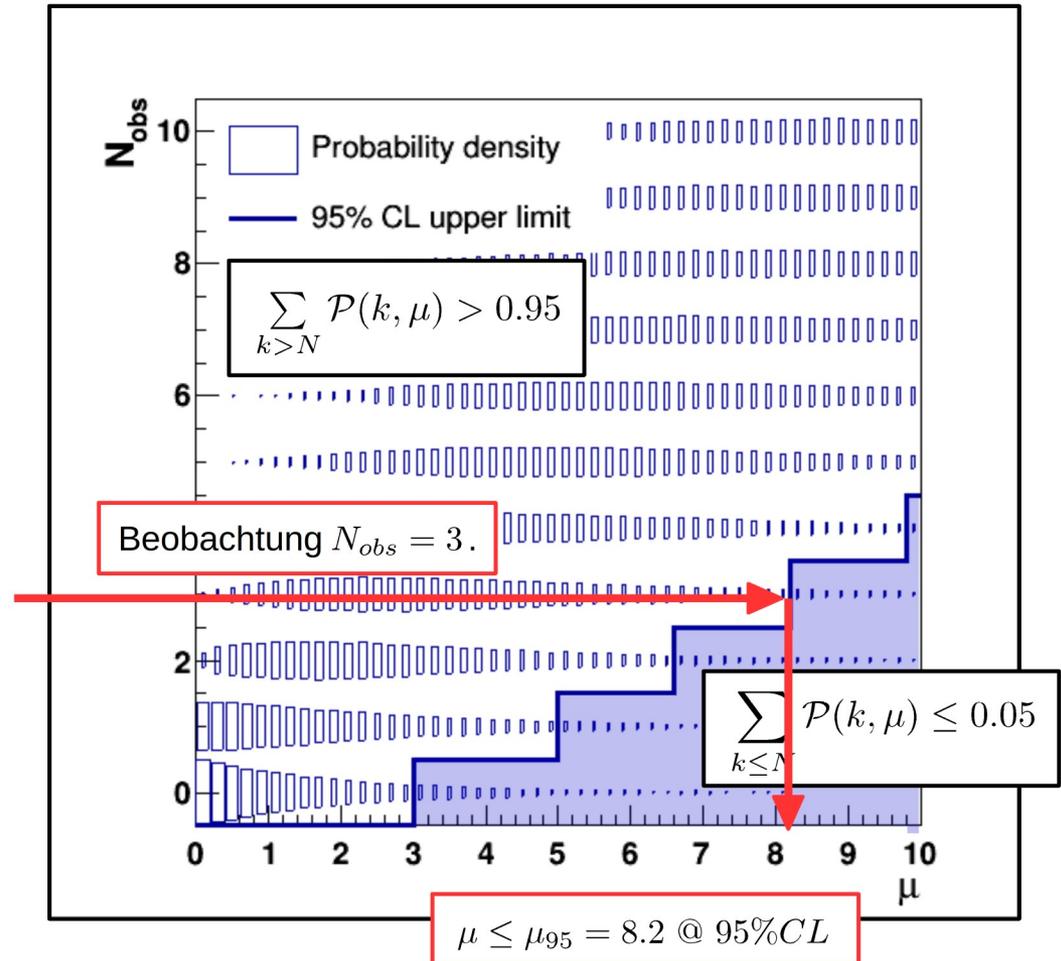
Neyman Konstruktion (Poissonverteilung)

- Im folgenden ist gezeigt, wie die obere Grenze $\mu_{0.95}$ im frequentistischen Ansatz konstruiert wird. Die Diskussion findet am Beispiel der Poissonverteilung statt:

Ein lauffähiges Root macro finden Sie [hier](#).

- Neyman Konstruktion:**

- Evaluieren Sie die *pdf* für verschiedene μ .
- Bestimmen Sie $\mu_{0.95}$ (blaue Linie im Plot).
- Verbinden Sie an den Rändern.
- Für gegebenes $y_{obs} = 3$ kann $\mu_{0.95}$ wie durch die roten Pfeile dargestellt abgelesen werden.
- Die Stufen aus der Verteilung kommen von der diskreten Poissonverteilung.



Abdeckung

- Die beschriebene Prozedur zur Bestimmung der oberen Grenze für μ lässt sich mit der exakten Wahrscheinlichkeit das entsprechende Modell auszuschließen vergleichen:

Ein lauffähiges Root macro finden Sie [hier](#).

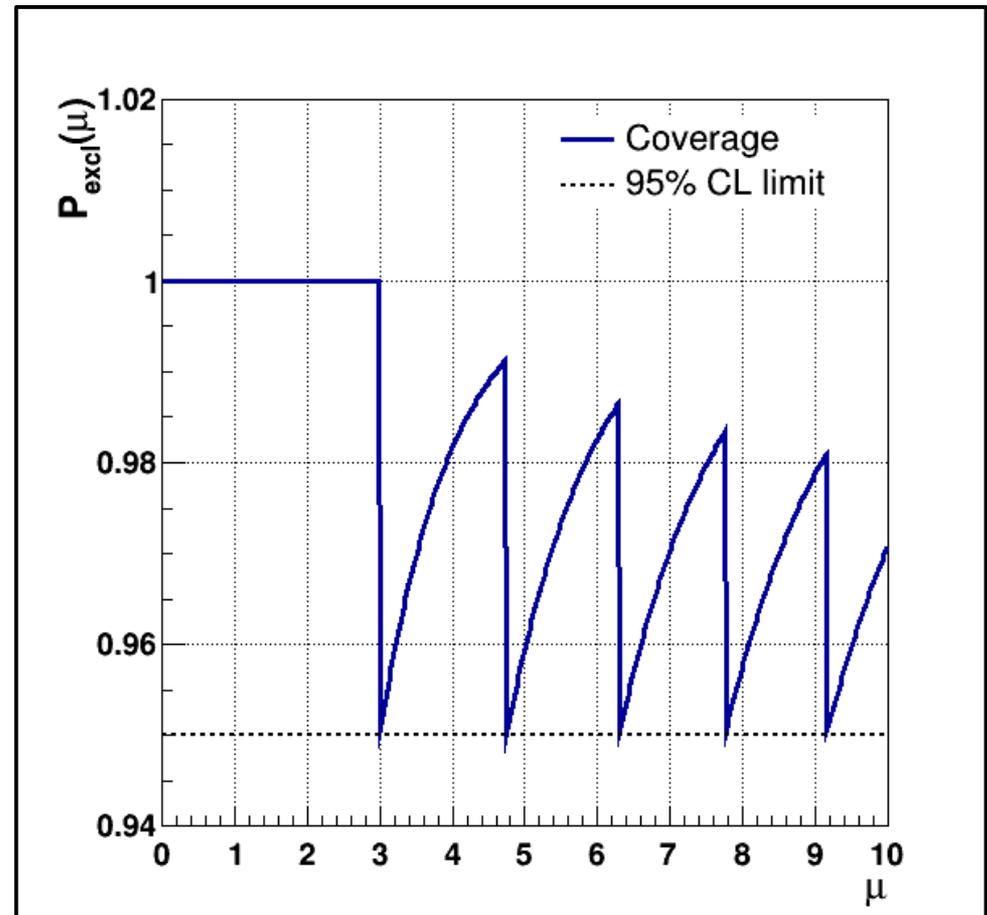
- Abdeckung:**

- Im Fall der Poissonverteilung sieht die tatsächliche Ausschlusswahrscheinlichkeit so aus, wie rechts dargestellt:

$$P_{\text{excl}}(\mu) = \sum_{N \geq N_{\text{obs}}} P_{\mu}(N) \cdot \theta(\mu \leq \mu_{0.95})$$

$$P_{\text{excl}}(\mu) \begin{cases} > 0.95 & \text{Überabdeckung} \\ = 0.95 & \text{Exakte Abdeckung} \\ < 0.95 & \text{Unterabdeckung} \end{cases}$$

- NB:** Im Fall der Normalverteilung ist die Abdeckung exakt.



Beispiele zum selber rechnen

- Im folgenden finden Sie einige Beispiele zur Bestimmung oberer Grenzen zum selber rechnen. Sie können diese Beispiele sehr leicht mit Hilfe der angegebenen ROOT Funktionen durchführen. Zum Verständnis benötigen Sie die folgenden Relationen:
- Zusammenhang zwischen den Summanden der Poissonverteilung und der χ^2 -Funktion:

$$\chi^2(2\mu, 2(N+1)) = \frac{(2\mu)^N e^{-2\mu/2}}{2^{N+1} \Gamma(N+1)} = \frac{1}{2} \frac{\mu^N}{N!} e^{-\mu} = \frac{1}{2} \mathcal{P}(N, \mu)$$

$$\alpha(\mu, N) = \sum_{k=0}^N \mathcal{P}(k, \mu) = \int_{2\mu}^{\infty} \chi^2(x, 2(N+1)) dx = 2 \int_{\mu}^{\infty} \chi^2(2\mu', 2(N+1)) d\mu'$$

- Standard ROOT-Funktion zur Evaluation der χ^2 -Wahrscheinlichkeit, und der χ^2 -Quantile:

$$\text{TMath::Prob}(2\mu, 2(N+1)) = \int_{2\mu}^{\infty} \chi^2(x, 2(N+1)) dx = \alpha(\mu, N)$$

$$\underbrace{\text{TMath::ChisquareQuantile}(1 - \alpha, 2(N+1)) / 2}_{\equiv 2\mu \text{ für:}} = \mu_{1-\alpha}$$

$$\equiv 2\mu \text{ für: } \int_0^{2\mu} \chi^2(x, 2(N+1)) dx = 1 - \alpha$$

Obere Grenze (frequentistischer Ansatz)

- In einem Neutrino-Experiment beobachten Sie 1 Ereignis, wo Sie aus allen bekannten Untergrundprozessen 0 erwarten. Sie möchten eine obere Grenze mit 95% CL für ein Poissonverteiltes Signal μ angeben:
- Berechnen Sie die Ausschlusswahrscheinlichkeit $\mathcal{P}_{\text{excl}}$ (d.h. die Wahrscheinlichkeit dafür mind 2 Ereignisse zu beobachten) für die Werte von μ in Tabelle (1).
- Berechnen Sie die obere Grenze mit 95% CL $\mu_{0.95}$ für die in Tabelle (2) angegebenen Werte von N_{obs} .

(1)	(2)
μ	N_{obs}
$\mathcal{P}_{\text{excl}}$	$\mu_{0.95}$
2	0
3	1
4	2
5	4

für $N_{\text{obs}} = 1$

$$\text{TMath::Prob}(2\mu, 2(N+1)) = \int_{2\mu}^{\infty} \chi^2(x, 2(N+1)) dx = \alpha(\mu, N)$$

$$\underbrace{\text{TMath::ChisquareQuantile}(1 - \alpha, 2(N+1)) / 2}_{\equiv 2\mu \text{ für:}} = \mu_{1-\alpha}$$

$$\equiv 2\mu \text{ für: } \int_0^{2\mu} \chi^2(x, 2(N+1)) dx = 1 - \alpha$$

Obere Grenze (frequentistischer Ansatz)

- In einem Neutrino-Experiment beobachten Sie 1 Ereignis, wo Sie aus allen bekannten Untergrundprozessen 0 erwarten. Sie möchten eine obere Grenze mit 95% CL für ein Poissonverteiltes Signal μ angeben:
- Berechnen Sie die Ausschlusswahrscheinlichkeit $\mathcal{P}_{\text{excl}}$ (d.h. die Wahrscheinlichkeit dafür mind 2 Ereignisse zu beobachten) für die Werte von μ in Tabelle (1).
- Berechnen Sie die obere Grenze mit 95% CL $\mu_{0.95}$ für die in Tabelle (2) angegebenen Werte von N_{obs} .

(1)		(2)	
μ	$\mathcal{P}_{\text{excl}}$	N_{obs}	$\mu_{0.95}$
2	0.59	0	3.00
3	0.80	1	4.74
4	0.91	2	6.30
5	0.96	4	9.15

für $N_{\text{obs}} = 1$

$$\text{TMath::Prob}(2\mu, 2(N+1)) = \int_{2\mu}^{\infty} \chi^2(x, 2(N+1)) dx = \alpha(\mu, N)$$

$$\underbrace{\text{TMath::ChisquareQuantile}(1-\alpha, 2(N+1)) / 2}_{\equiv 2\mu \text{ für:}} = \mu_{1-\alpha}$$

$$\equiv 2\mu \text{ für: } \int_0^{2\mu} \chi^2(x, 2(N+1)) dx = 1 - \alpha$$

Obere Grenze (Bayesianischer Ansatz)

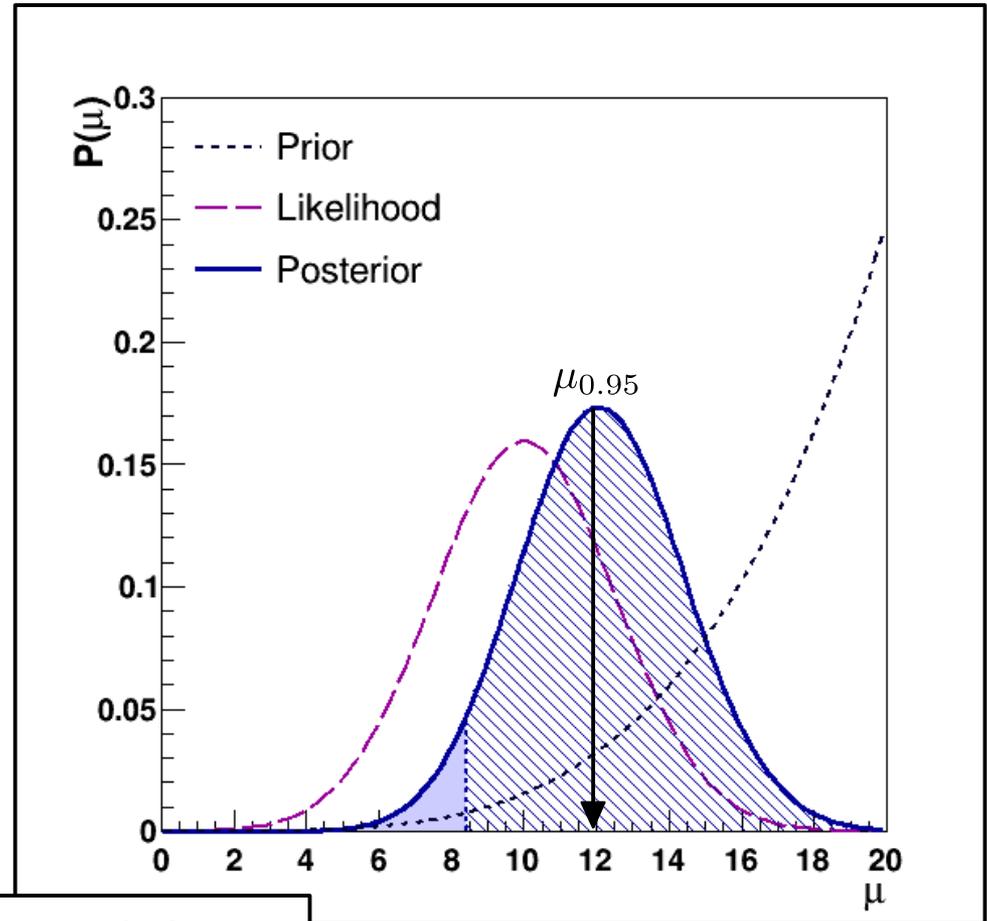
- Im folgenden ist gezeigt, wie die obere Grenze $\mu_{0.95}$ im Bayesianischen Ansatz ermittelt wird. Die Diskussion findet am Beispiel einer Normalverteilung statt:

Ein lauffähiges Root macro finden Sie [hier](#).

- Bayesianische obere Grenze:**

- Ordne prior $\pi(\text{model})$ und Likelihood $\mathcal{L}(x|\text{model})$ zu.
- Bestimme posterior $\mathcal{P}(\text{model}|x_{\text{obs}})$ bei geg. $\pi(\text{model})$, $\mathcal{L}(x|\text{model})$ und x_{obs} .
- Bestimme $\mu_{0.95}$ aus:

$$\frac{\int_0^{\mu_{0.95}} \mathcal{P}(\text{model}|x_{\text{obs}}) \pi(\text{model}) d\mu}{\int_0^{\infty} \mathcal{P}(\text{model}|x_{\text{obs}}) \pi(\text{model}) d\mu} \leq 0.05$$



Erfordert numerische Integration des Posteriors.

Obere Grenze (Bayesianischer Ansatz)

- In einem Neutrino-Experiment beobachten Sie 1 Ereignis, wo Sie aus allen bekannten Untergrundprozessen 0 erwarten. Sie möchten eine obere Grenze mit 95% CL für ein Poissonverteiltes Signal μ angeben:
- Berechnen Sie die obere Grenze mit 95% CL $\mu_{0.95}$ unter Annahme eines flachen priors für die in Tabelle (1) angegebenen Werte.
- Nehmen Sie die gleiche Berechnung vor für einen prior $\pi(\text{model}) \propto \mu$ und tragen Sie die Werte in Tabelle (2) ein.

(1)		(2)	
N_{obs}	μ_{95}	N_{obs}	μ_{95}
1		1	
2		2	
3		3	
5		5	

$\pi(\text{model}) = \text{const}$ $\pi(\text{model}) \propto \mu$

Verwenden Sie das ROOT macro:

`GetPosterior.C(μ, N) = $\alpha(\mu, N)$`

für die zweite Aufgabe modifizieren Sie die Funktion

`GetBayesPosterior(mu)`

Obere Grenze (Bayesianischer Ansatz)

- In einem Neutrino-Experiment beobachten Sie 1 Ereignis, wo Sie aus allen bekannten Untergrundprozessen 0 erwarten. Sie möchten eine obere Grenze mit 95% CL für ein Poissonverteiltes Signal μ angeben:
- Berechnen Sie die obere Grenze mit 95% CL $\mu_{0.95}$ unter Annahme eines flachen priors für die in Tabelle (1) angegebenen Werte.
- Nehmen Sie die gleiche Berechnung vor für einen prior $\pi(\text{model}) \propto \mu$ und tragen Sie die Werte in Tabelle (2) ein.

(1)		(2)	
N_{obs}	μ_{95}	N_{obs}	μ_{95}
1	3.00	1	4.75
2	4.74	2	6.27
3	6.30	3	7.76
5	9.15	5	10.51

$\pi(\text{model}) = \text{const}$ $\pi(\text{model}) \propto \mu$

Verwenden Sie das ROOT macro:

`GetPosterior.C`(μ, N) = $\alpha(\mu, N)$

für die zweite Aufgabe modifizieren Sie die Funktion

`GetBayesPosterior(mu)`

Signal auf bekanntem Untergrund – revisited –

- Wir kehren im folgenden zu Beispiel-2 „Kleines Signal auf bekanntem Untergrund“ auf Folie 15 von [Lecture-08](#) zurück:
- Signal und Untergrund bezeichnen wir wie folgt:

$$\mu = s + b$$

s : erwartetes Signal

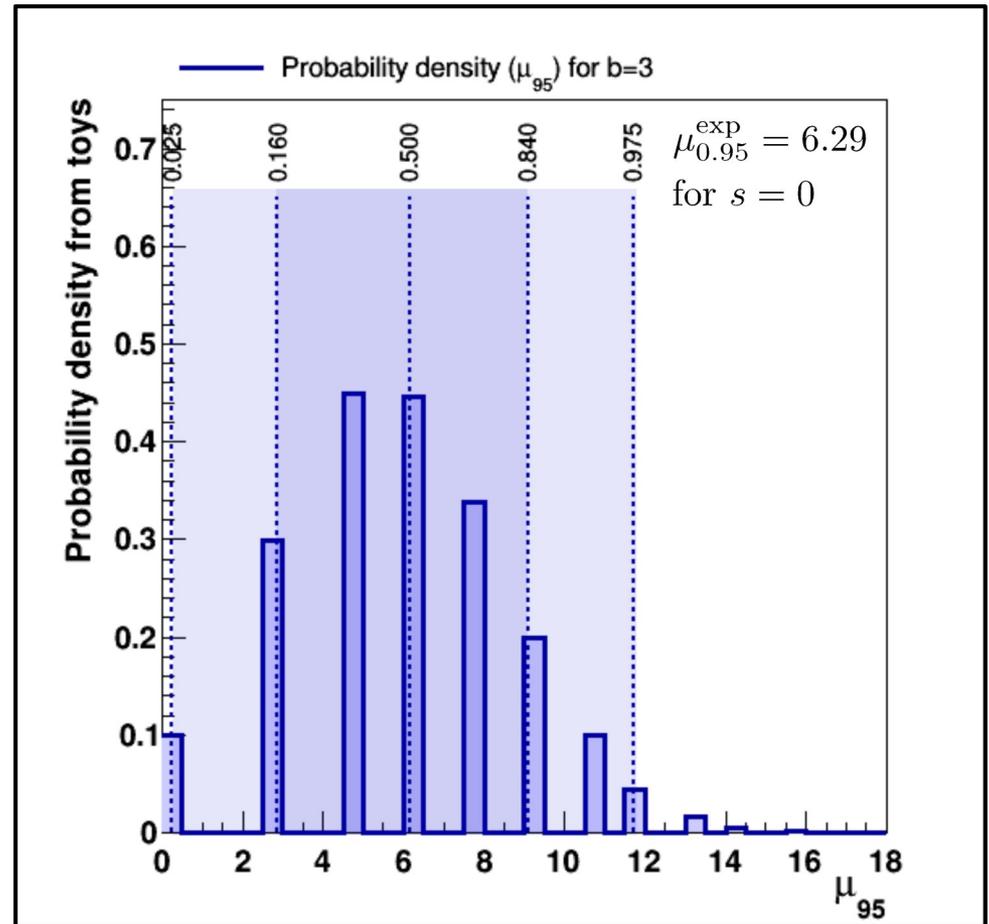
b : erwarteter Untergrund

- Der Einfachheit halber nehmen wir vorerst an, dass b exakt bekannt ist. Wir bestimmen die obere Grenze auf μ , unter Annahme der $(s+b)$ -Hypothese.

Sensitivität auf Ausschluss

- Für $b > 0$ ist es nötig die Sensitivität der Messung ein bestimmtes Modell auszuschliessen mit Hilfe der *b-only-Hypothese* zu quantifizieren.
- Berechne $\mu_{0.95}$ für Pseudoexperimente mit $s = 0$.
- Beispiel:** $\mu_{0.95}$ aus Pseudoexperimenten mit $\mu = b = 3$ (freq).
- Median der Stichprobenverteilung
Maß für Ausschluss-Sensitivität.
Quantilen Maß für die Variation.
- Vollständige Einschätzung:
vergleiche Beobachtung mit
Sensitivität der Messung.
- Hier: Beobachtung von $N_{\text{obs}} \leq 12$
immer noch innerhalb von $\pm 2\sigma$ mit
 $s = 0$ kompatibel.

Ein lauffähiges Root macro finden Sie [hier](#).



Ausschlussgrenzen nahe bei physikalischen Grenzen

- **Annahme:** konkreter Ausgang der Messung mit einem beobachteten Ereignis ($N_{\text{obs}} = 1$).
- Führt zu oberer Ausschlussgrenze von $\mu_{0.95}^{\text{obs}} = 4.74 < \mu_{0.95}^{\text{exp}}$ unabhängig von b .
- Experiment mit größter Erwartung für b hat stärkstes Limit auf s :

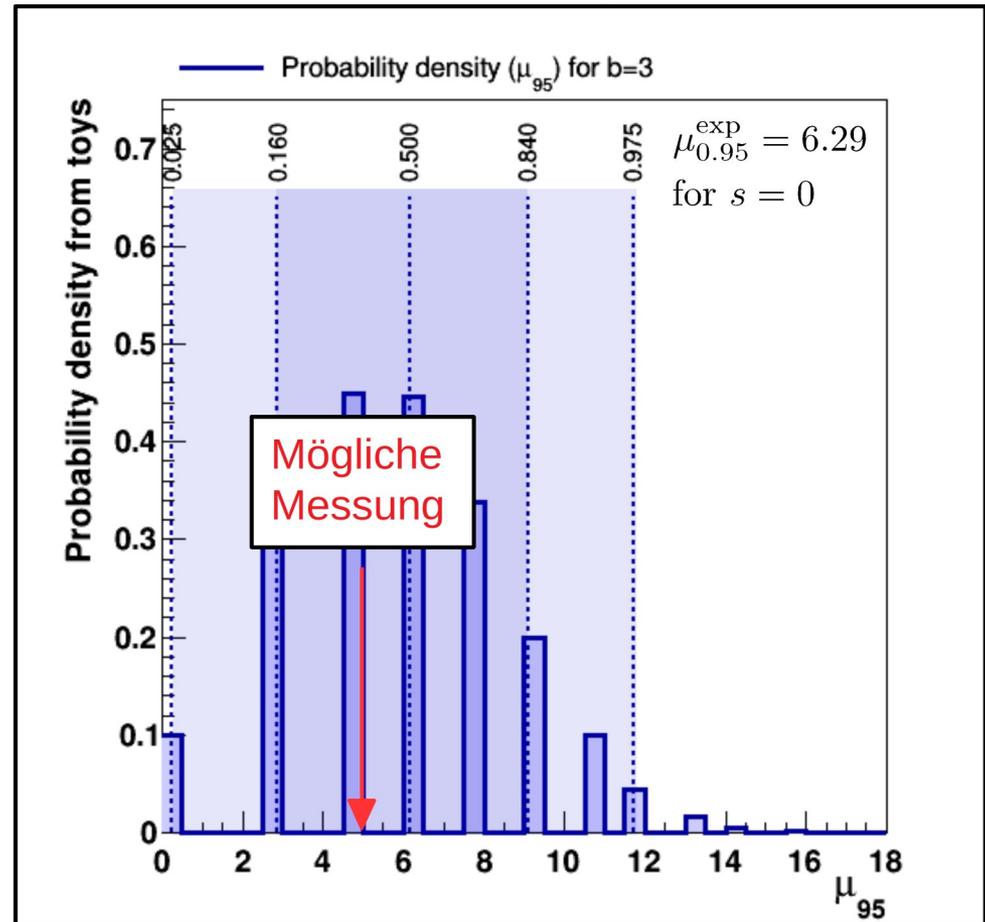
b	$\mu_{0.95}^{\text{exp}}(s=0)$	$s_{0.95}^{\text{obs}} = \mu_{0.95}^{\text{obs}} - b$
0	0	4.74
2	$4.75 \pm_{1.75}^{1.55}$	2.74
3	$6.29 \pm_{3.30}^{2.86}$	1.74
5	$9.15 \pm_{2.86}^{2.69}$	—

Uncert' aus 68% Quantile.

für $N_{\text{obs}} = 1$

- D.h. bei gleichem Messausgang hat das Experiment mit der schlechtesten Sensitivität das stärkste Limit $s_{0.95}^{\text{obs}}$.

Ein lauffähiges Root macro finden Sie [hier](#).



Ausschlussgrenzen nahe bei physikalischen Grenzen

- Wir werden im folgenden zwei Möglichkeiten diskutieren, um solche Paradoxa zu vermeiden:
 - Einführung eines geeigneten Bayesian priors (siehe [Folie 17](#) – im folgenden als Übung).
 - Modifikation des frequentistischen Zugangs.

Physikalische Grenze: Bayesian prior

- **Annahme:** Sie beobachten 1 Ereignis, wobei Sie 0, 2, 3, 5 Ereignisse aus einem bekannten Untergrundprozess erwarten. Sie möchten eine obere Ausschlussgrenze $\mu_{0.95}$ mit 95% CL bei zugrundeliegender Poissonverteilung angeben.
- Verwenden Sie das ROOT Macro `GetPosterior.C` und modifizieren Sie es so, dass der Untergrund mit b bei der Integration berücksichtigt werden kann:

$$\text{GetPosteriorWithBackground.C}(s, b, N) = \alpha(s, N)$$

- Vervollständigen Sie die unten stehende Tabelle:

b	$\mu_{\text{exp}}^{\text{freq}}(s = 0)$	$\mu_{0.95}^{\text{bayes}} N_{\text{obs}} = 1$
0	0	
2	4.75 ± 1.55	
3	6.29 ± 2.86	
5	9.15 ± 2.69	

Uncert' aus 68% Quantile.

NB: Für einen vollständigen Vergleich sollten Sie die Tabelle um $\mu_{\text{exp}}^{\text{bayes}}$ erweitern.

Physikalische Grenze: Bayesian prior

- **Annahme:** Sie beobachten 1 Ereignis, wobei Sie 0, 2, 3, 5 Ereignisse aus einem bekannten Untergrundprozess erwarten. Sie möchten eine obere Ausschlussgrenze $\mu_{0.95}$ mit 95% CL bei zugrundeliegender Poissonverteilung angeben.
- Verwenden Sie das ROOT Macro `GetPosterior.C` und modifizieren Sie es so, dass der Untergrund mit b bei der Integration berücksichtigt werden kann:

$$\text{GetPosteriorWithBackground.C}(s, b, N) = \alpha(s, N)$$

- Vervollständigen Sie die unten stehende Tabelle:

b	$\mu_{\text{exp}}^{\text{freq}}(s = 0)$	$\mu_{0.95}^{\text{bayes}} N_{\text{obs}} = 1$
0	0	4.74
2	$4.75 \pm_{1.75}^{1.55}$	5.80
3	$6.29 \pm_{3.30}^{2.86}$	6.60
5	$9.15 \pm_{2.86}^{2.69}$	8.45

Uncert' aus 68% Quantile.

NB: Für einen vollständigen Vergleich sollten Sie die Tabelle um $\mu_{\text{exp}}^{\text{bayes}}$ erweitern.

Modifizierter frequentistischer Ansatz

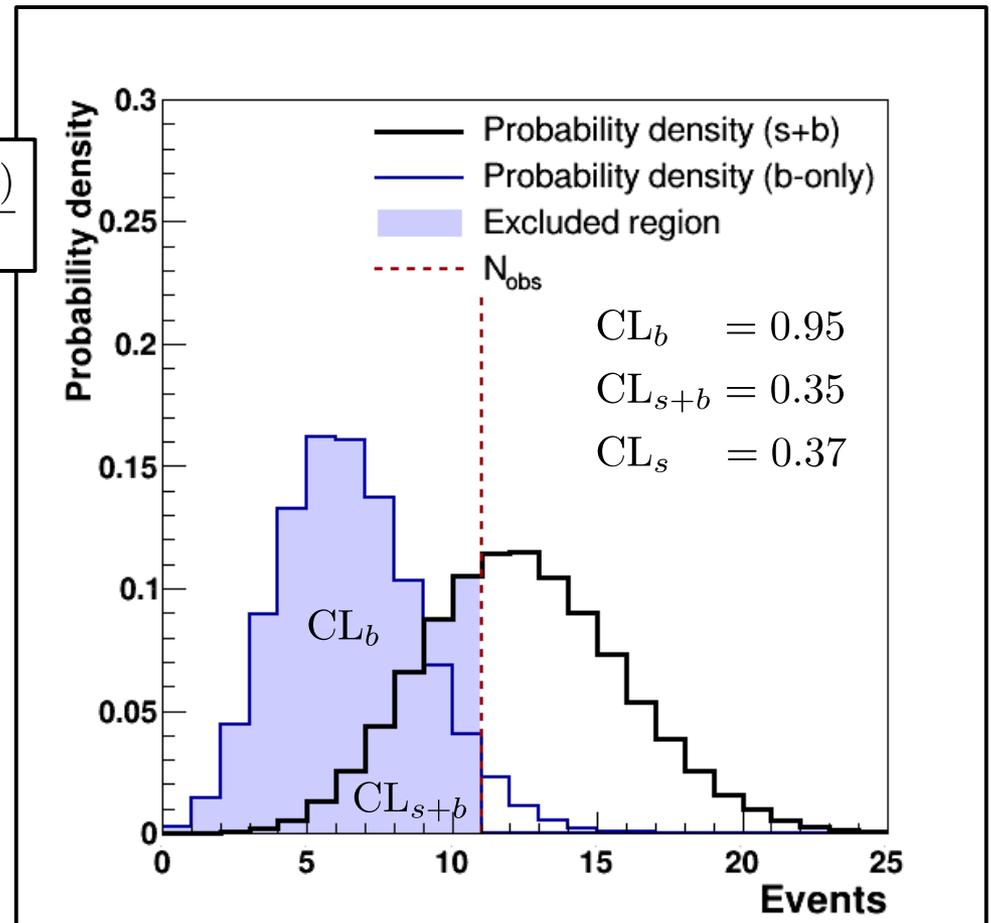
- Eine weitere Möglichkeit obere Schranken jenseits der Sensitivität einer Messung zu vermeiden besteht im modifizierten frequentistischen Ansatz:

Ein lauffähiges RooT macro finden Sie [hier](#).

- Hier betrachtet man ein modifiziertes Konfidenzintervall:

$$CL_s = \frac{CL_{s+b}}{CL_b} = \frac{\mathcal{P}(N \leq N_{\text{obs}} | \mu = s + b)}{\mathcal{P}(N \leq N_{\text{obs}} | \mu = b)}$$

- D.h. man skaliert die Erwartung der $(s+b)$ -Hypothese nochmal mit dem Kehrwert der Erwartung für die b -only Hypothese.
- $CL_b \leq 1 \Rightarrow CL_{s+b} \leq CL_s$, d.h. konservativerer Ausschluss.
- Beispiel rechts für:
 $b = 6, \quad s = 6, \quad N_{\text{obs}} = 11$



Physikalische Grenze: CL_s

- **Annahme:** Sie beobachten 1 Ereignis, wobei Sie 0, 2, 3, 5 Ereignisse aus einem bekannten Untergrundprozess erwarten. Sie möchten eine obere Ausschlussgrenze $\mu_{0.95}$ mit 95% CL bei zugrundeliegender Poissonverteilung angeben.
- Berechnen Sie die obere Grenze mit Hilfe des CL_s -Ansatzes. Verwenden Sie hierzu das ROOT macro:

$$\text{GetCLs.C}(s, b, N) = \alpha(s, N)$$

- Vervollständigen Sie die unten stehende Tabelle:

b	$\mu_{\text{exp}}^{\text{freq}}(s = 0)$	$\mu_{0.95}^{\text{bayes}} N_{\text{obs}} = 1$	$\mu_{0.95}^{\text{CL}_s} N_{\text{obs}} = 1$
0	0	4.74	
2	4.75 ± 1.55 1.75	5.80	
3	6.29 ± 2.86 3.30	6.60	
5	9.15 ± 2.69 2.86	8.45	

Uncert' aus 68% Quantile.

Physikalische Grenze: CL_s

- **Annahme:** Sie beobachten 1 Ereignis, wobei Sie 0, 2, 3, 5 Ereignisse aus einem bekannten Untergrundprozess erwarten. Sie möchten eine obere Ausschlussgrenze $\mu_{0.95}$ mit 95% CL bei zugrundeliegender Poissonverteilung angeben.
- Berechnen Sie die obere Grenze mit Hilfe des CL_s -Ansatzes. Verwenden Sie hierzu das ROOT macro:

$$\text{GetCLs.C}(s, b, N) = \alpha(s, N)$$

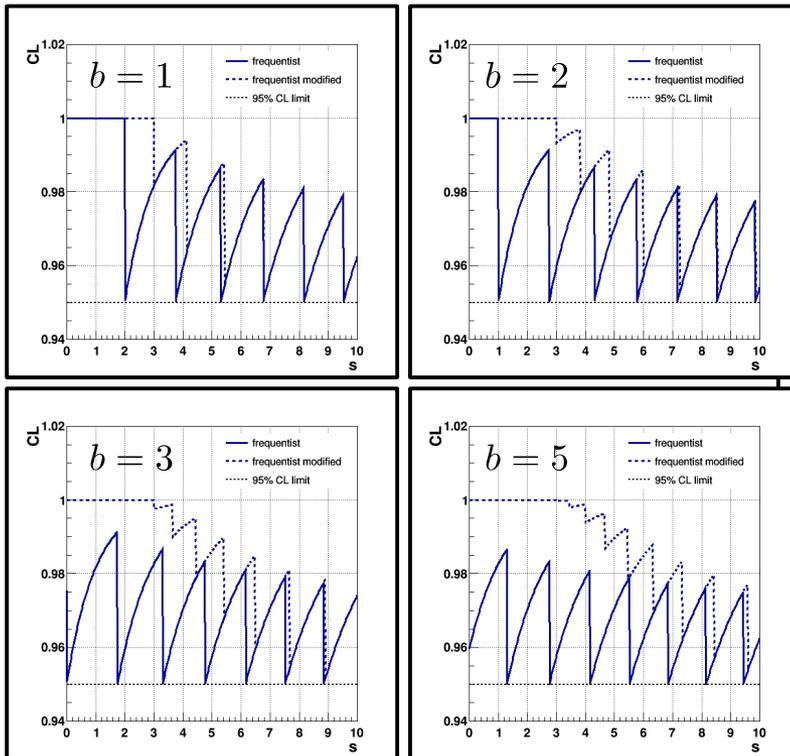
- Vervollständigen Sie die unten stehende Tabelle:

b	$\mu_{\text{exp}}^{\text{freq}}(s = 0)$	$\mu_{0.95}^{\text{bayes}} N_{\text{obs}} = 1$	$\mu_{0.95}^{\text{CL}_s} N_{\text{obs}} = 1$
0	0	4.74	4.75
2	$4.75 \pm_{1.75}^{1.55}$	5.80	5.81
3	$6.29 \pm_{3.30}^{2.86}$	6.60	6.65
5	$9.15 \pm_{2.86}^{2.69}$	8.45	8.45

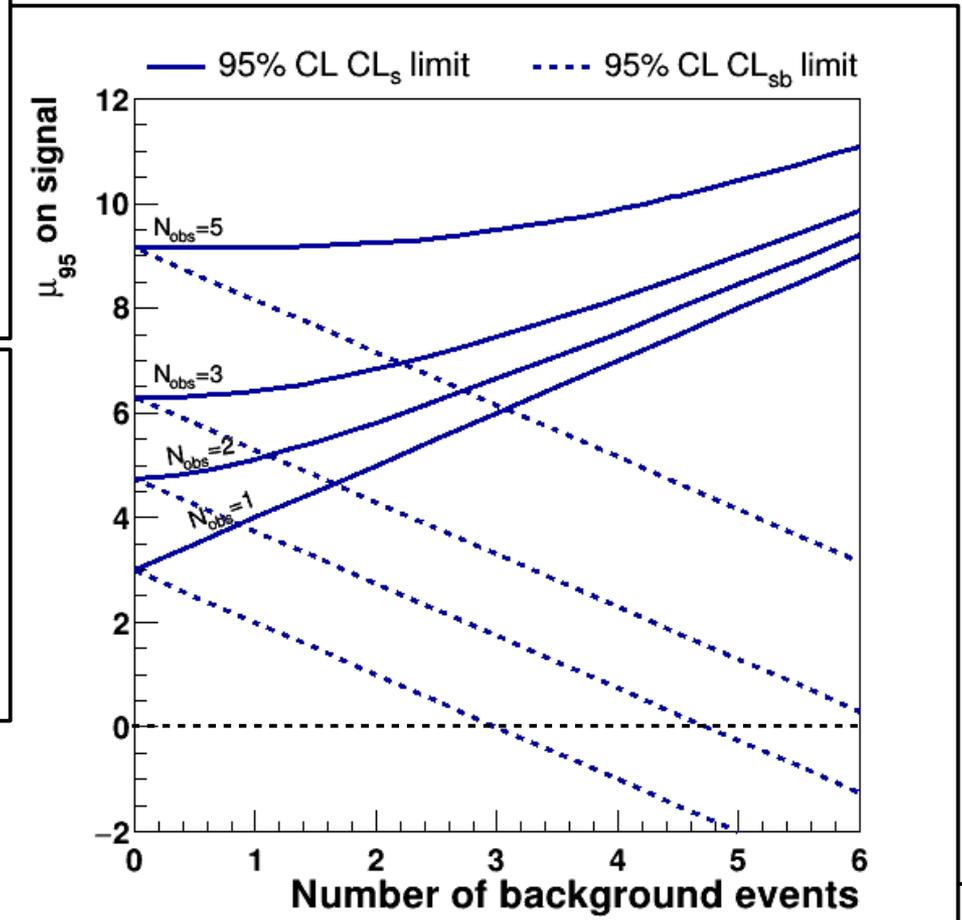
Uncert' aus 68% Quantile.

Abdeckung des CL_s Intervalls

- Das CL_s Intervall hat immer Überabdeckung (siehe links). Unphysikalische obere Grenzen (z.B. $s_{0,95}^{obs} < 0$) kommen mit dem CL_s Intervall nicht vor (siehe rechts). Stattdessen konvergiert das CL_s basierte Limit bei Unterfluktuationen auf die Erwartung für die *b-only Hypothese* (hier nicht explizit gezeigt).



Ein lauffähiges Root macro finden Sie [hier](#).



Systematische Unsicherheiten

- In [Lecture-08](#) (Folie 17) haben wir diskutiert, wie man systematische Unsicherheiten in ein Likelihoodmodell integriert.
- Wir werden im folgenden unser vorheriges Modell von Folie 19 um zwei systematische Unsicherheiten erweitern:

Einfaches Likelihood Modell:

$$\mathcal{L}(N_{\text{obs}}, L_{\text{int}}, b) = \mathcal{P}(N_{\text{obs}}, \mu(s, b, L_{\text{int}}))$$

$$\rho(L_{\text{int}}, \Delta L_{\text{int}}) = \varphi(x, L_{\text{int}}, \Delta L_{\text{int}}), x \geq 0$$

$$\rho(b, \Delta b) = \varphi(x, b, \Delta b), x \geq 0$$

Signalmodell:

$$\mu = L_{\text{int}} \cdot (s + b)$$

L_{int} : Integrierte Luminosität

s : Erwartetes Signal

b : Erwarteter Untergrund

Uncertainty model:

$$L_{\text{int}} = \hat{L}_{\text{int}} \pm \Delta L_{\text{int}}$$

$$b = \hat{b} \pm \Delta b$$

$\Delta L_{\text{int}}, \Delta b$ modelled by (truncated) Gaussian's.

- Wir diskutieren hier den Hybridansatz der LEP (und Tevatron) Teststatistik von [Lecture-08](#).

Systematische Unsicherheiten – Diskussion

- Eine Likelihood Abschätzung würde in diesem Beispiel in drei Parametern erfolgen mit drei Abschätzungen \hat{L}_{int} , \hat{b} (Störparameter) und \hat{s} (*parameter of interest*, POI) und potentiellen Einschränkungen (*constraints*) auf $\Delta\hat{L}_{\text{int}}$ und $\Delta\hat{b}$.
- In diesem Beispiel werden wir aus Gründen der Klarheit auf eine ML-Abschätzung verzichten und die verwendeten Parameter \hat{L}_{int} , \hat{b} und \hat{s} als angenommen und wahr voraussetzen. Die Vorgehensweise entspricht damit der LEP Teststatistik.
- Die Likelihood für dieses einfache Problem nimmt bereits 3 Dimensionen an → bereits einfache Probleme können rasch auf komplexe Likelihoodmodelle führen. Higgs Analysen bei CMS arbeiten mit einigen 100 bis zu einigen 1000 Störparametern.

Systematische Unsicherheiten und obere Grenzen

- Eine Neyman Konstruktion in allen Dimensionen ist i.a. nicht möglich, woraus die bereits in [Lecture-08](#) diskutierten Likelihood Ansätze zur Berechnung oberer Grenzen resultieren:

Frequentist:

Integriere Störparameter aus und führe Neyman-Konstruktion (nur) für POI durch.

Bayesianisch:

Integriere Störparameter aus und führe Bayesianische Konstruktion der oberen Schranke für POI durch.

Physikalische Grenze: CL_s + Unsicherheiten

- **Annahme:** Sie beobachten 1 Ereignis, wobei Sie 0, 2, 3, 5 Ereignisse aus einem bekannten Untergrundprozess erwarten. Sie möchten eine obere Ausschlussgrenze $\mu_{0.95}$ mit 95% CL bei zugrundeliegender Poissonverteilung angeben.
- Berechnen Sie die obere Grenze mit Hilfe des CL_s -Ansatzes und zusätzlich 10% Unsicherheit auf die Luminosität. Verwenden Sie hierzu das ROOT macro:

$$\text{GetCLsSys.C}(s, b, \Delta L_{\text{int}}, N) = \alpha(s, N)$$

- Vervollständigen Sie die unten stehende Tabelle:

b	$\mu_{\text{exp}}^{\text{freq}}(s = 0)$	$\mu_{0.95}^{\text{bayes}} N_{\text{obs}} = 1$	$\mu_{0.95}^{CL_s} N_{\text{obs}} = 1$	$\mu_{0.95}^{CL_s} N_{\text{obs}} = 1(\Delta L_{\text{int}})$
0	0	4.74	4.75	
2	$4.75 \pm \begin{matrix} 1.55 \\ 1.75 \end{matrix}$	5.80	5.81	
3	$6.29 \pm \begin{matrix} 2.86 \\ 3.30 \end{matrix}$	6.60	6.65	
5	$9.15 \pm \begin{matrix} 2.69 \\ 2.86 \end{matrix}$	8.45	8.45	

Uncert' aus 68% Quantile.

Physikalische Grenze: CL_s + Unsicherheiten

- **Annahme:** Sie beobachten 1 Ereignis, wobei Sie 0, 2, 3, 5 Ereignisse aus einem bekannten Untergrundprozess erwarten. Sie möchten eine obere Ausschlussgrenze $\mu_{0.95}$ mit 95% CL bei zugrundeliegender Poissonverteilung angeben.
- Berechnen Sie die obere Grenze mit Hilfe des CL_s -Ansatzes und zusätzlich 10% Unsicherheit auf die Luminosität. Verwenden Sie hierzu das ROOT macro:

$$\text{GetCLsSys.C}(s, b, \Delta L_{\text{int}}, N) = \alpha(s, N)$$

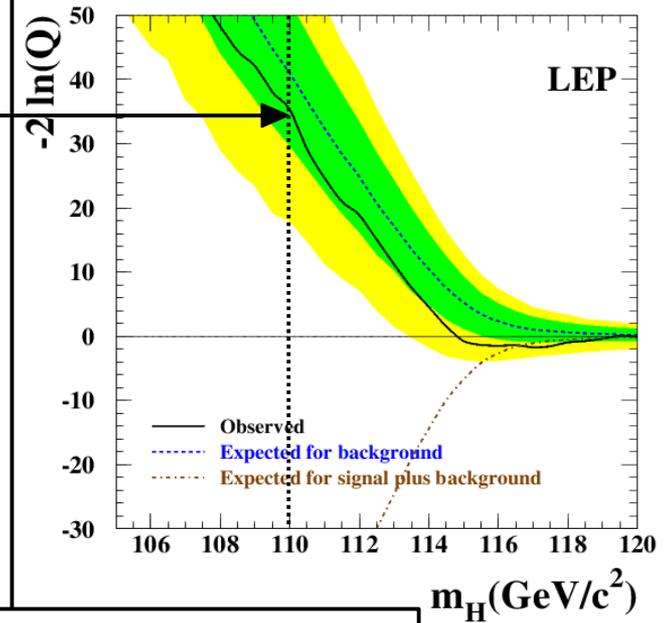
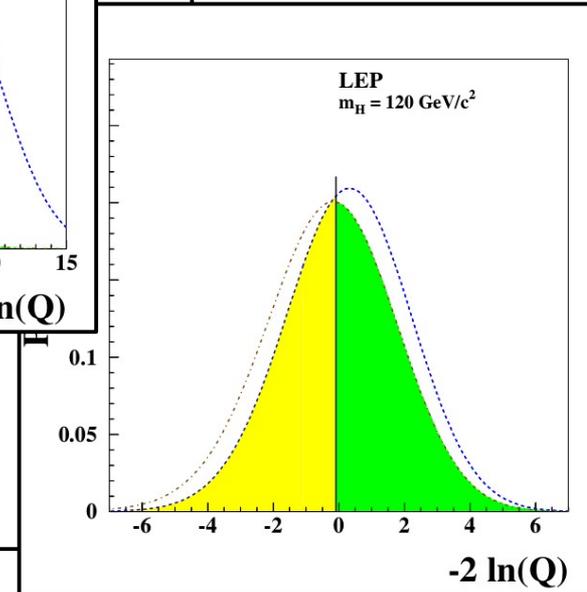
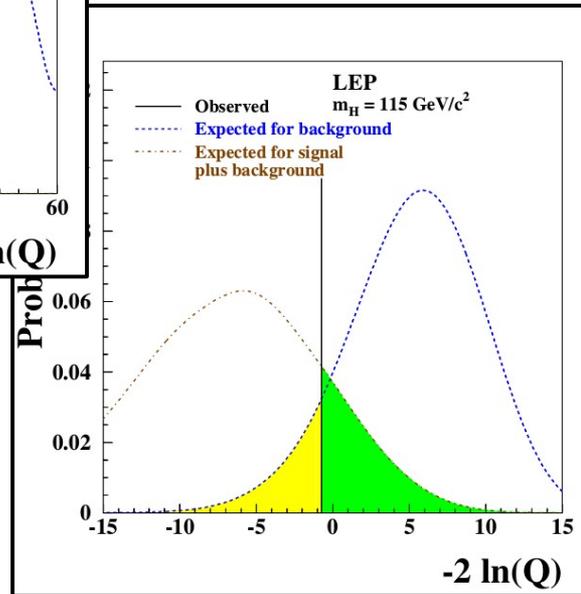
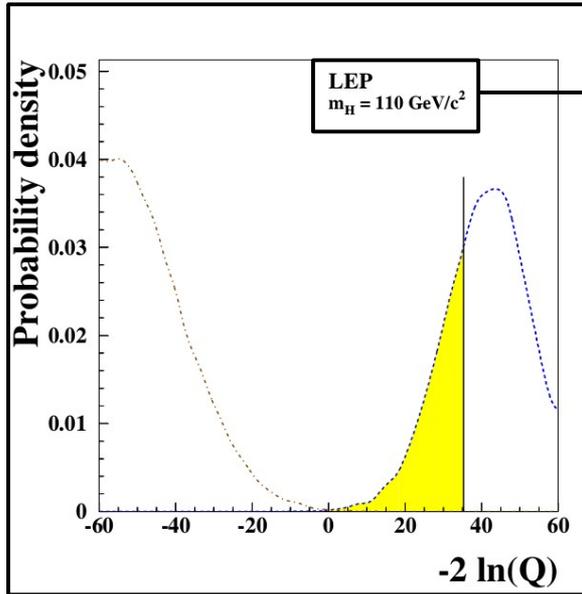
- Vervollständigen Sie die unten stehende Tabelle:

b	$\mu_{\text{exp}}^{\text{freq}}(s = 0)$	$\mu_{0.95}^{\text{bayes}} N_{\text{obs}} = 1$	$\mu_{0.95}^{CL_s} N_{\text{obs}} = 1$	$\mu_{0.95}^{CL_s} N_{\text{obs}} = 1(\Delta L_{\text{int}})$
0	0	4.74	4.75	4.84
2	$4.75 \pm \begin{smallmatrix} 1.55 \\ 1.75 \end{smallmatrix}$	5.80	5.81	5.96
3	$6.29 \pm \begin{smallmatrix} 2.86 \\ 3.30 \end{smallmatrix}$	6.60	6.65	6.84
5	$9.15 \pm \begin{smallmatrix} 2.69 \\ 2.86 \end{smallmatrix}$	8.45	8.45	9.62

Uncert' aus 68% Quantile.

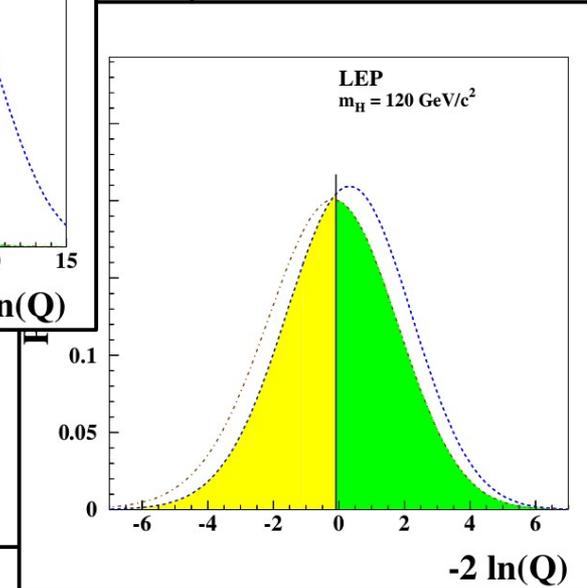
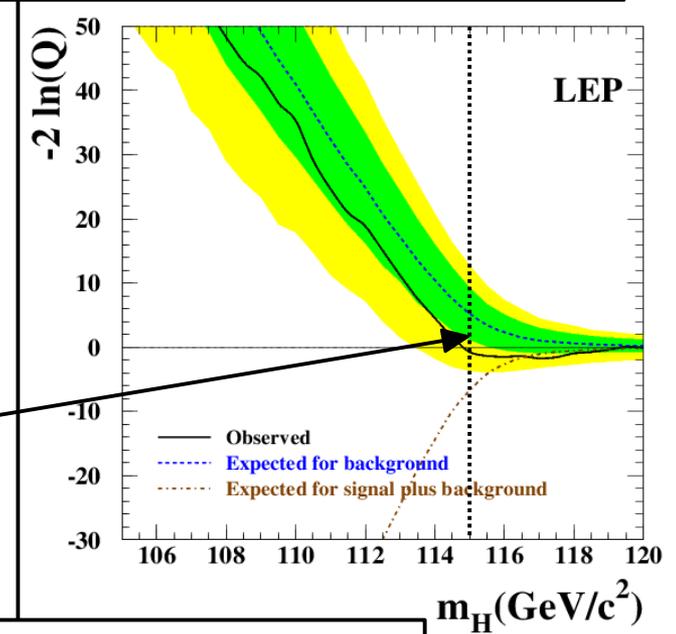
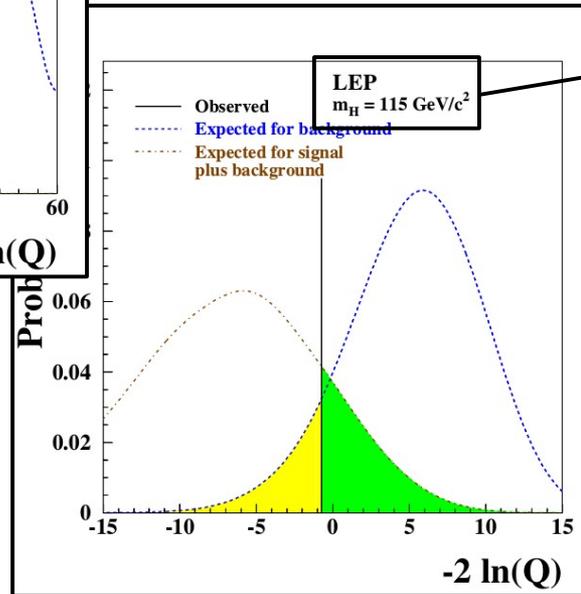
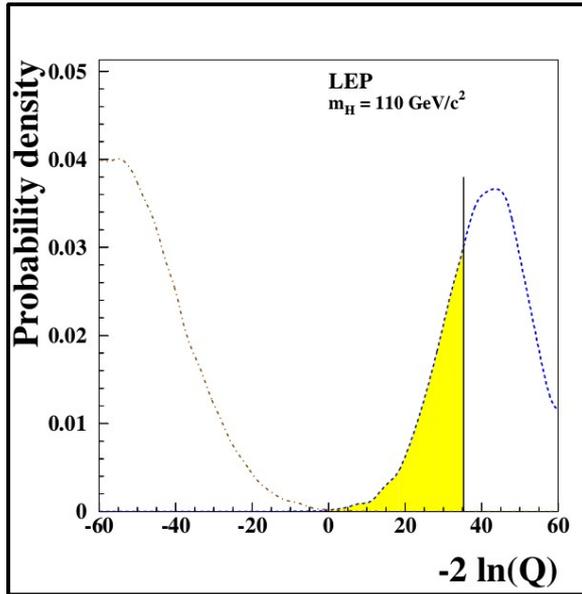
SM Higgs Boson Suche @ LEP

$$q_\mu = -2 \ln \left(\frac{\mathcal{L}(n|\mu s+b)}{\mathcal{L}(n|b)} \right), \quad 0 \leq \mu$$



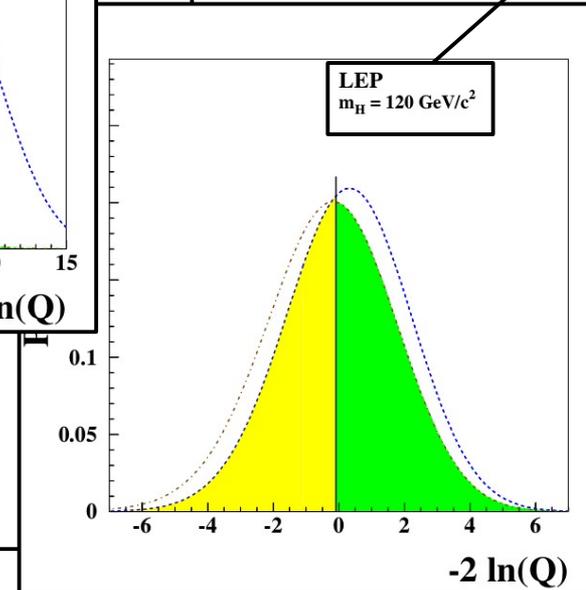
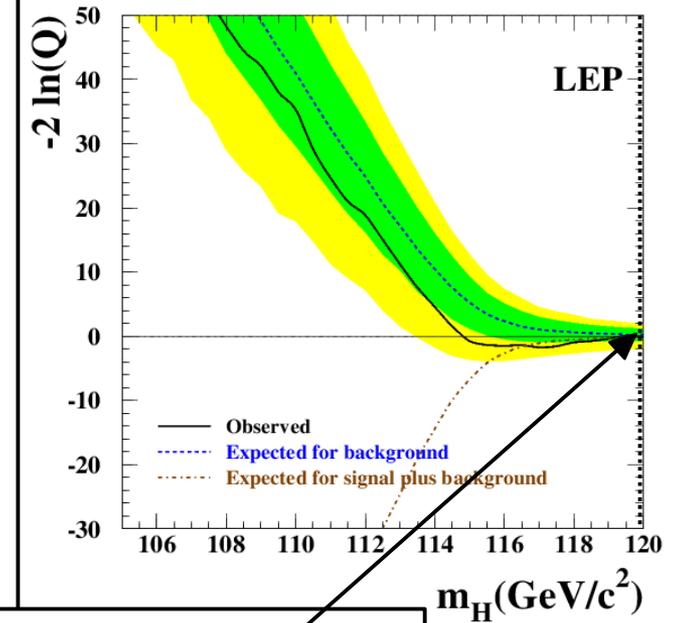
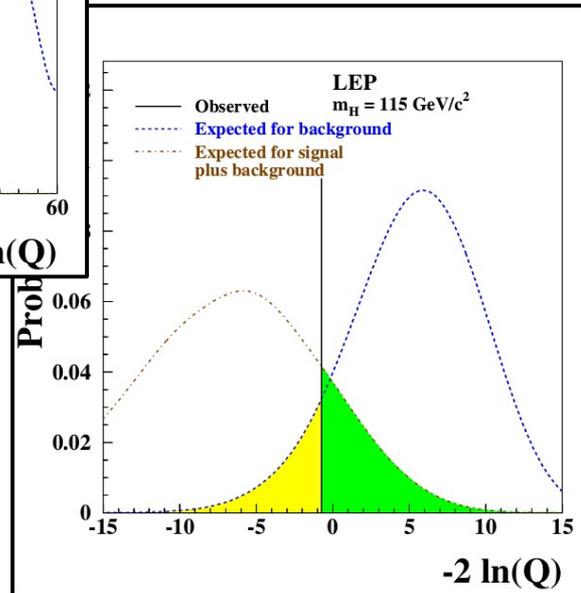
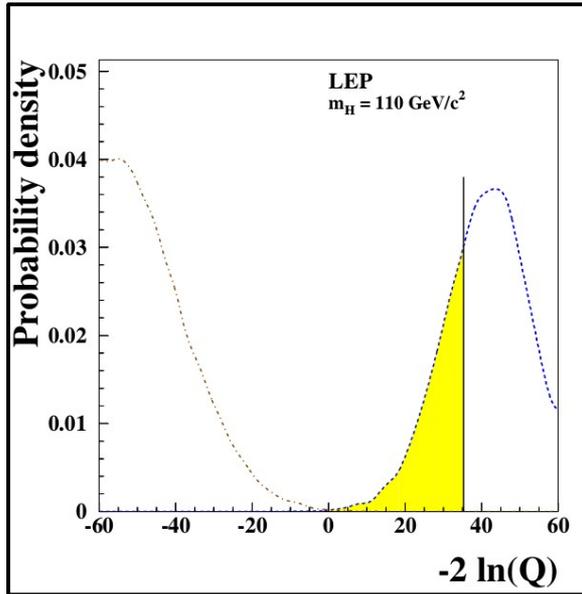
SM Higgs Boson Suche @ LEP

$$q_\mu = -2 \ln \left(\frac{\mathcal{L}(n|\mu s+b)}{\mathcal{L}(n|b)} \right), \quad 0 \leq \mu$$

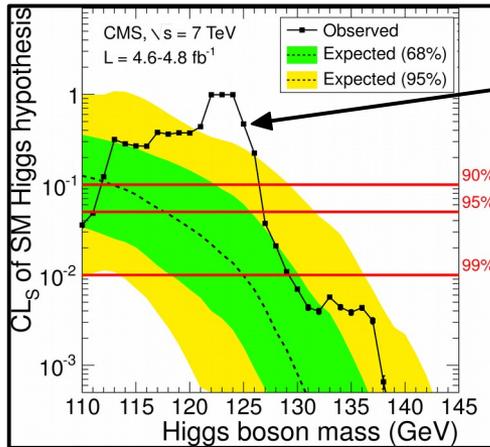


SM Higgs Boson Suche @ LEP

$$q_\mu = -2 \ln \left(\frac{\mathcal{L}(n|\mu s+b)}{\mathcal{L}(n|b)} \right), \quad 0 \leq \mu$$



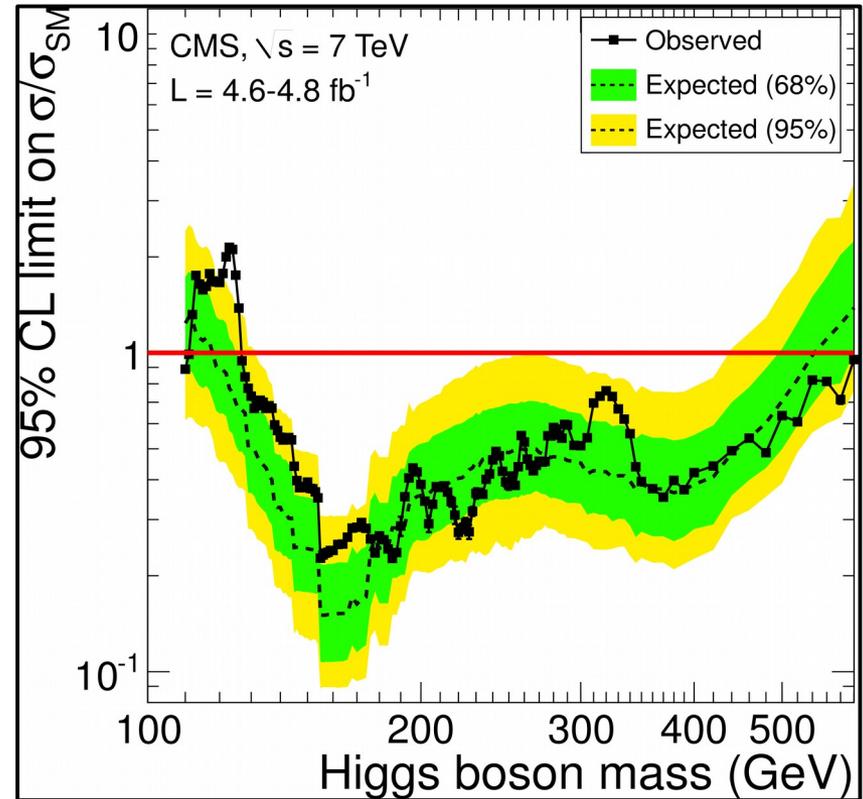
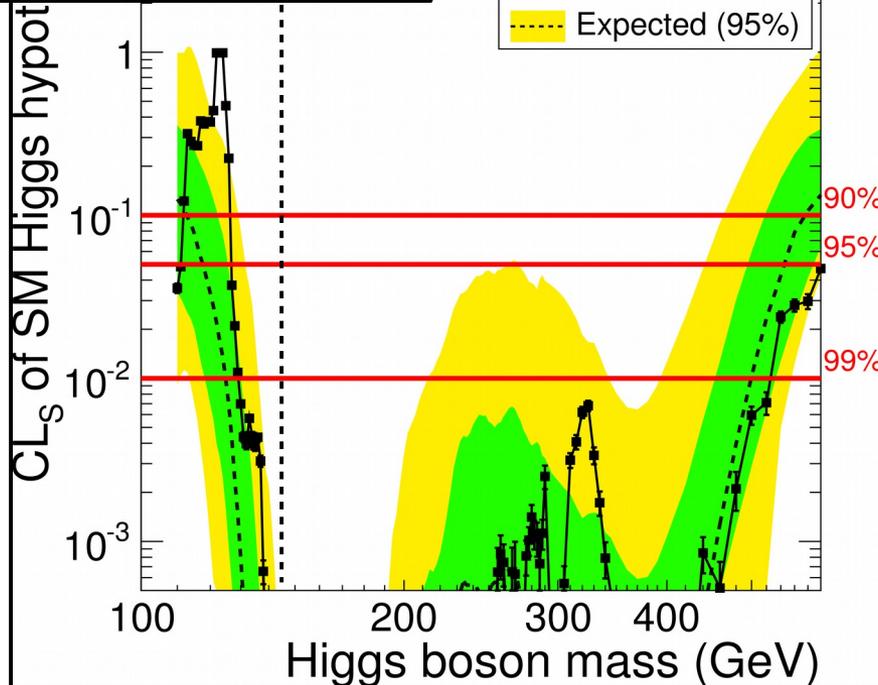
SM Higgs Boson Suche @ LHC



local significance
 of 3σ @ 125 GeV.

PLB710(2012)26-48

- Letzte veröffentlichte obere Grenze der CMS Kollaboration vor Entdeckung des Higgs Bosons.
- Fünf Endzustände und ~ 2500 Störparametern (LHC Teststatistik).



Backup
