

Moderne Methoden der Datenanalyse

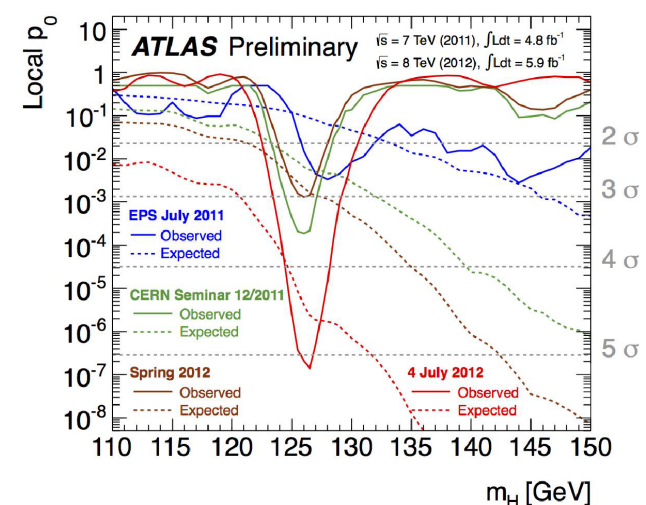
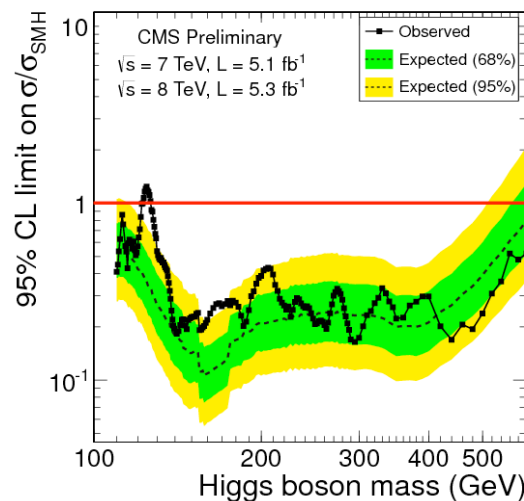
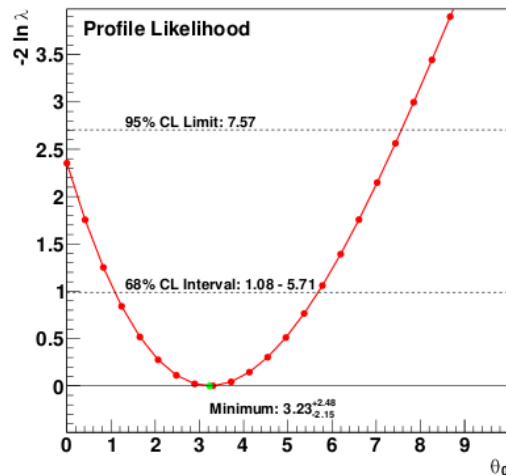
Zusammenfassung Konfidenz-Intervalle (2)

Andreas B. Meyer



20. Juni 2017

Fakultät für Physik
Institut für Experimentelle Kernphysik - IEKP



- Für sehr große Stichproben mit n Datenpunkten x_i , $n \rightarrow \infty$ gilt:
Wird eine Grundgesamtheit durch die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x_i, \mu_i)$ beschrieben, und legt die Null-Hypothese $r=m-m^{(0)}$ der Parameter fest, so folgt die Testfunktion $q = -2 \ln \lambda$ einer χ^2 Verteilung mit r Freiheitsgraden.

r = Unterschied in der Anzahl freier Parameter für H_1 und H_0

- Ausgangspunkt für sogenannte asymptotische Verfahren zur Berechnung des Likelihood-Quotienten $\lambda(x)$. Aber: Anwendbarkeit muss im allgemeinen mit Monte Carlo Simulationen überprüft werden.

- Beispiel: Signal s über Untergrund b in Zählexperiment:

$$\Delta\chi^2 = -2 \ln \lambda = -2 \ln \left(\frac{\mathcal{L}(s + b)}{\mathcal{L}(b)} \right)$$

Für $n=s+b$ groß folgt $\Delta\chi^2$ einer χ^2 -Verteilung mit 1 Freiheitsgrad.

Für gemessene Werte von s und b kann dann der p-Wert für die Signalsignifikanz berechnet werden.

S.S. Wilks, The large-sample distribution of the likelihood ratio for testing composite hypotheses. Ann. Math. Stat. **9**, 60–62 (1938)

Beispiel: Likelihood Quotient bei Zählexperiment

■ Häufiger Fall: Suche nach Signal (s) über Untergrund (b)

■ Verteilungsdichte für jedes m:

$$n(m) = s(m) + b(m)$$

■ H_0 (nur Untergrund): $s=0$

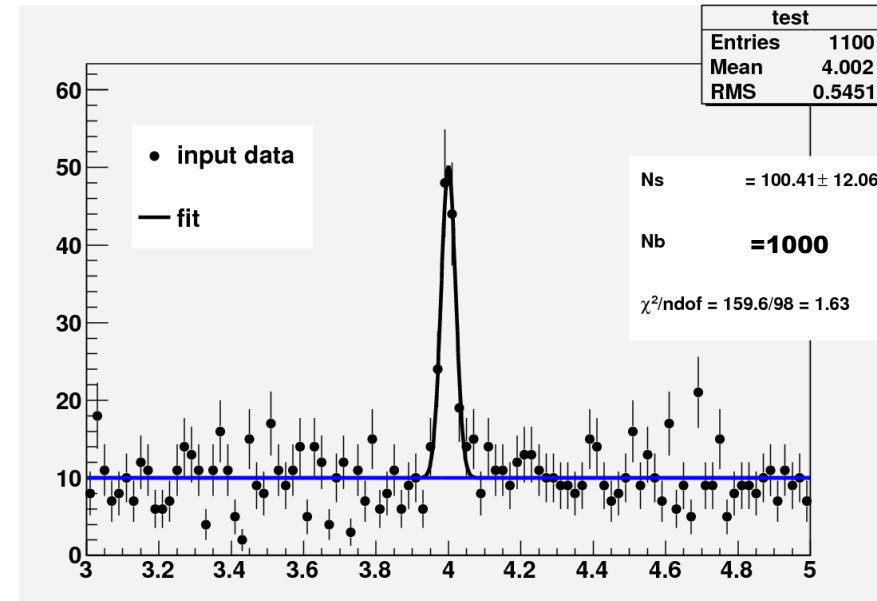
■ Anpassung mit freiem Parameter b

■ $\rightarrow \chi^2(b)$

■ H_1 : Signal-Hypothese $s \neq 0$

■ $b+s$ (=Gauß mit festem m und σ)

■ $\rightarrow \chi^2(s+b)$



$$\Delta\chi^2 = -2 \ln \lambda = -2 \ln \left(\frac{\mathcal{L}(s+b)}{\mathcal{L}(b)} \right) = -73 \text{ für diesen Fall}$$

■ Wilks: Falls H_0 (nur Untergrund) korrekt, dann folgt $\Delta\chi^2$ einer χ^2 -Verteilung mit 1 Freiheitsgrad: $p(-\chi^2 = 73) = 2 \cdot 10^{-16}$, entspricht $z = 8.5 \sigma$

Beispiel: Zählexperiment mit Poisson-Statistik

- Beobachtung von n Ereignissen mit kleinem Signal s

$$P_0(n; b) = \frac{1}{n!} b^n e^{-b} \qquad P_1(n; s + b) = \frac{1}{n!} (s + b)^n e^{-(s+b)}$$

$$q = -2 \ln \lambda = 2(n \ln(1 + \frac{s}{b}) - s)$$

- Annahme b bekannt, dann ist $n = b + s$:

$$q = 2(b + s) \ln \left(1 + \frac{s}{b}\right) - 2s$$

- Für $s \ll b$ ist:

$$\sqrt{q} = s/\sqrt{b} + \mathcal{O}((s/b)^2)$$

- In Wilks Näherung gilt für einen einzelnen Freiheitsgrad $N=1$:
Signifikanz des Signals s , ausgedrückt durch das Gaußsche Quantil z :

$$z = \sqrt{\Delta\chi^2} = \sqrt{q} = s/\sqrt{b}$$

Cowan, Cranmer, Gross and Vitelis "Asymptotic formulae for likelihood-based tests of new physics"
<https://arxiv.org/abs/1007.1727>

Profile-Likelihood Quotient

- Verwendet bei Suchen (d.h. Setzen oberer Grenzen oder Entdeckung) am LHC (z.B. Higgs-Boson) mit Signal-Hypothese μ .
- Profile-Likelihood: Bestimmung des Intervalls für (wahre) Signalstärke μ , für optimale Störparameter $\hat{\theta}_\mu$, normiert auf das globale Maximum der Likelihood
- Profile = Scan, d.h. bestimme q_μ für alle μ

Prüfgröße
Signalstärke
Störparameter $\hat{\theta}_\mu$: maximiert $\mathcal{L}(\text{data}|\mu, \hat{\theta}_\mu)$ für μ

$$q_\mu = -2 \ln \frac{\mathcal{L}(\text{data}|\mu, \hat{\Theta}_\mu)}{\mathcal{L}(\text{data}|\hat{\mu}, \hat{\Theta})}, \quad 0 \leq \hat{\mu} \leq \mu$$

Best-fit Werte aller Parameter
erzwingt einseitige Grenze

- Für $\hat{\mu} < 0$: $\hat{\mu} = 0$ (d.h. $\hat{\mu} = \mu_{\text{best}}$ kann nicht negativ werden $\rightarrow \mu$ positiv)
- Für $\hat{\mu} > \mu$: $q_\mu = 0$ (d.h. einseitige Grenze)

CCGV, Absch. 2.5 und CMS+ATLAS 2.1

$$q_\mu = -2 \ln \lambda(\mu) = -2 \Delta \ln \mathcal{L}$$

$$\approx \frac{(\mu - \hat{\mu})^2}{\sigma^2}$$

■ Im Limit großer Statistik folgt q_μ einer χ^2 -Verteilung (Parabel)

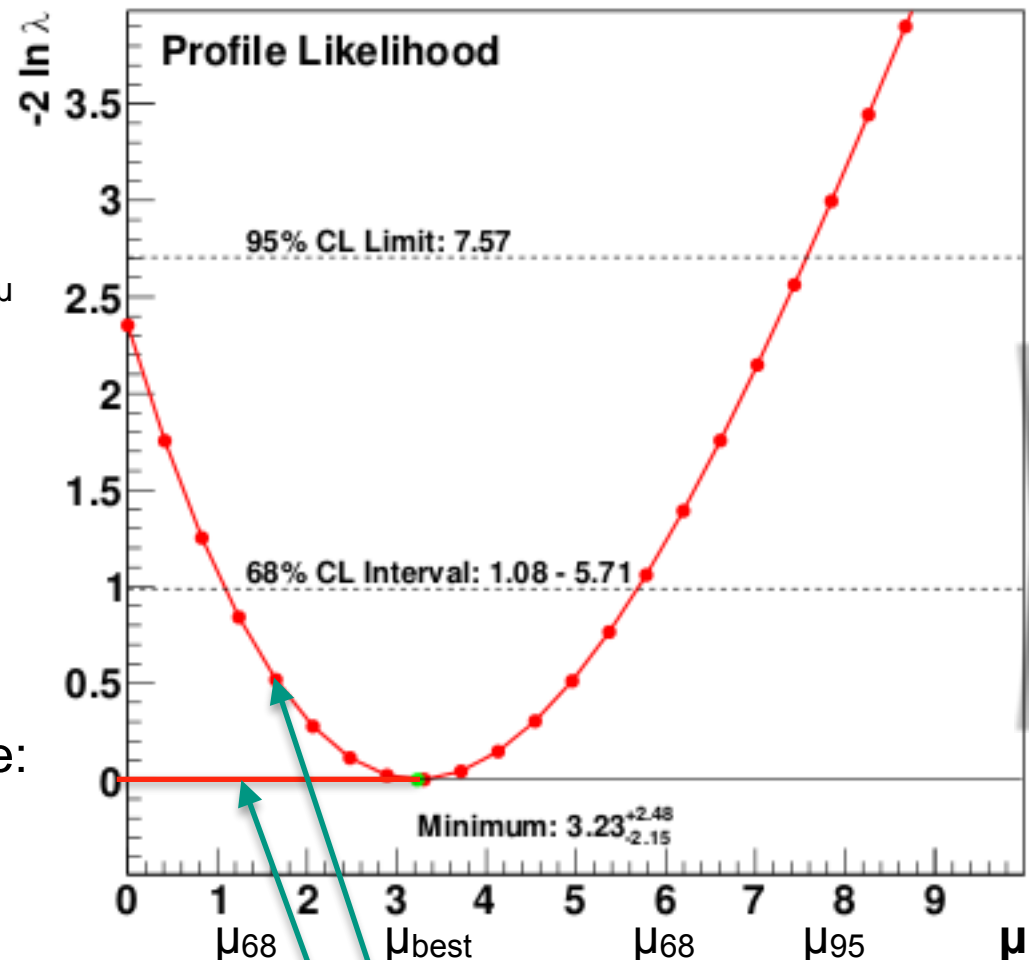
■ Profile-Likelihood liefert alle relevanten Größen:

■ Bester Schätzwert von μ :
Minimum

■ Ausschluss der Null-Hypothese:
 $q_{(\mu=0)} = z^2 = (\text{Signifikanz})^2$
Hier: $z \sim \sqrt{2.4} \approx 1.5$

■ Obere Grenze μ_{95} :

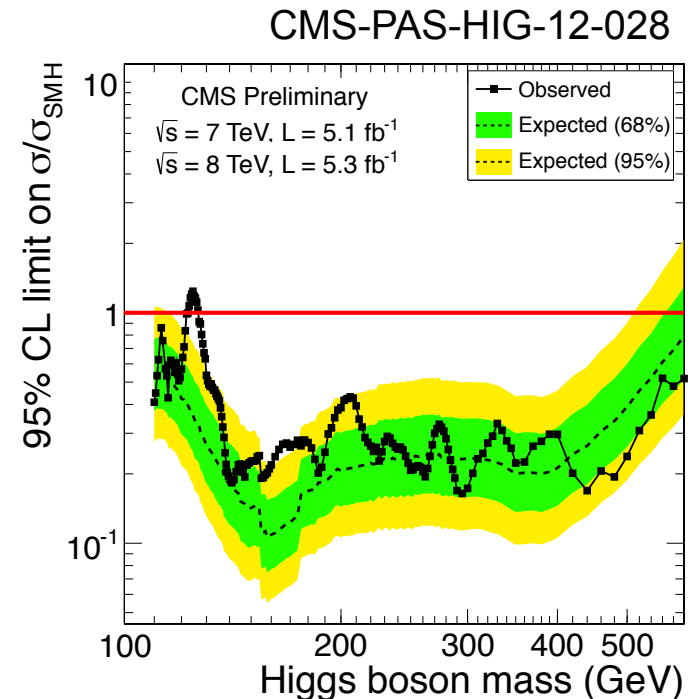
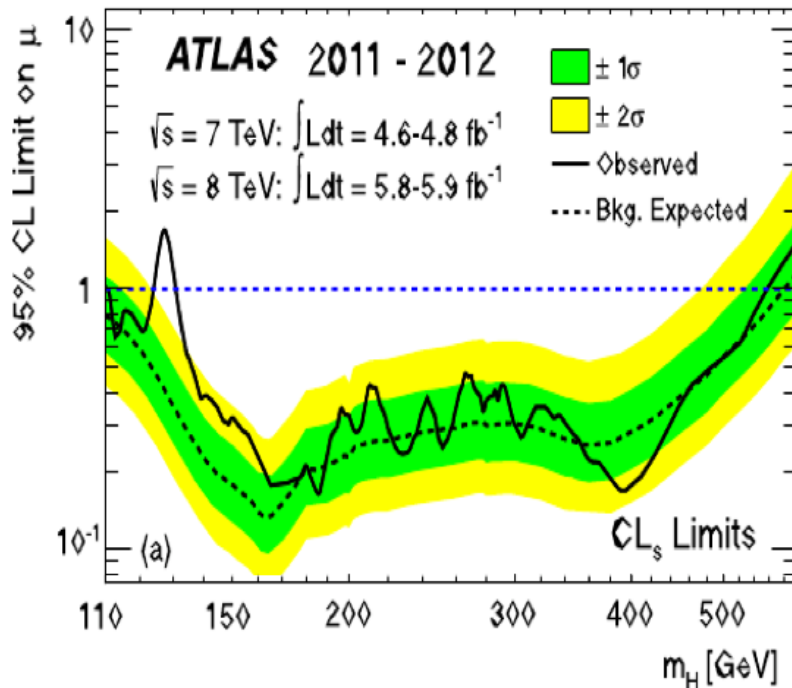
$$-2 \Delta \ln \mathcal{L}(\mu_{95}) = 1.645^2 = 2.71$$



Allgemein: 2-seitiges Intervall

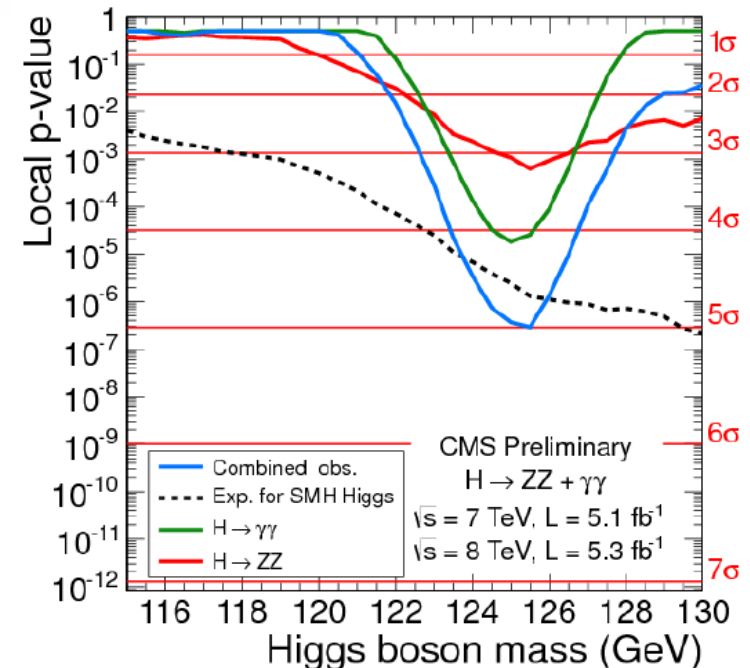
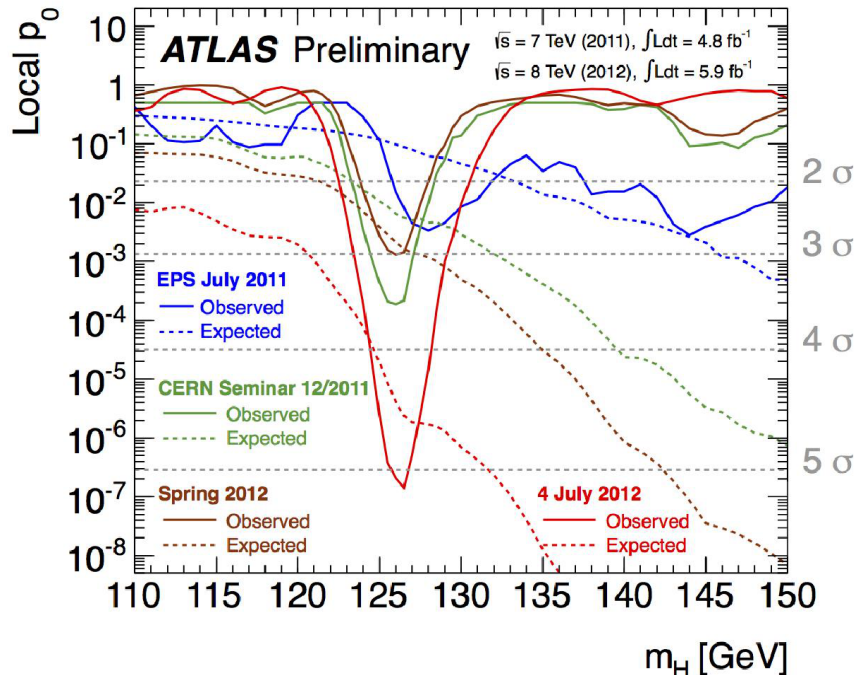
$q_\mu=0$ für $\mu < \hat{\mu}$: 1-seitige Grenze

4. Juli 2012: Bekanntgabe der Entdeckung eines “neuen Bosons” am CERN



Ausschluss von Signalen zwischen 131(128) GeV und 523(600) GeV

4. Juli 2012: Bekanntgabe der Entdeckung eines “neuen Bosons” am CERN



Bestimmung der Signalsignifikanz und Bestimmung des lokalen p-Werts durch Vergleich mit Untergrund-Hypothese

$$S_{\text{ATLAS}} = 5.9 \sigma$$

$$S_{\text{CMS}} = 5.0 \sigma$$