Übungen zu Physik der Quanteninformation SS 14

Dr. M. Marthaler
C. Karlewski

Blatt 1
Besprechung, 30.04.2014

---

1. Rabi-Oszillationen **(6 Punkte)**

Wir betrachten ein Spin-1/2 Teilchen in einem statischen Feld $B_0\vec{e}_z$ und einem zusätzlichen Wechselfeld, beschrieben durch den Hamilton-Operator

$$H(t) = -\frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \frac{1}{2}\hbar\Omega_R^{(0)}\left[\sigma_x\cos(\omega t+\phi) - \sigma_y\sin(\omega t+\phi)\right] \tag{1}$$

wobei wir annehmen, dass $\omega = \omega_0$. Wir definieren die Eigenzustände des Operators σ_z als $|+\rangle$ und $|-\rangle$, mit $\sigma_z|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$.

(a) Transformieren sie die Schrödinger Gleichung mit der unitären Transformation $|\Psi\rangle = U(t)|\Psi'\rangle$, mit $U(t) = e^{i\omega\sigma_z t/2}$. Hierbei ist $|\Psi\rangle$ die Wellenfunktion im stationären und $|\Psi'\rangle$ die Wellenfunktion im rotierenden Bezugssystem. Die Relation $U^\dagger(t)\sigma_\pm U(t) = \sigma_\pm e^{\mp i\omega t}$ kann direkt verwendet werden. Finden sie den nun zeitunabhängigen Hamilton-Operator, der die Zeitentwicklung des Teilchen in dem rotierenden Bezugssystem beschreibt.

(b) Das Spin-1/2 Teilchen ist zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand

$$|\Psi(t=0)\rangle = |+\rangle\,. \tag{2}$$

Berechnen sie nun die Zeitentwicklung des Zustandes $|\Psi'\rangle = U^\dagger(t)|\Psi\rangle$. D.h. berechnen sie die Zeitentwicklung des Zustandes im rotierenden Bezugssystem.

(c) Berechnen sie nun die Zeitentwicklung des Zustandes $|\Psi\rangle$ im stationären Bezugssystem für den Anfangszustand (2).

2. Gültigkeit der Rotating-Wave-Approximation **(4 Punkte)**

In der Vorlesung wurde ein Zweizustandssystem in ein rotiertes Bezugssystem transformiert. Der Resultierende Hamilton-Operator war gegeben durch

$$\widetilde{H}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \Delta & g(e^{2i\omega t}+1) \\ g(1+e^{-2i\omega t}) & -\Delta \end{pmatrix}.$$

Bei resonantem Treiben, $\Delta = 0$, lässt sich dieser rotierte Hamilton-Operator in der Basis

$$|e\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad |g\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \tag{3}$$

schreiben als

$$\widetilde{H}(t) = H_{R1} + H_{R2}(t), \quad H_{R1} = g\tau_z. \tag{4}$$

Hierbei gilt $\tau_z|g\rangle = -|g\rangle$, $\tau_z|e\rangle = |e\rangle$.

(a) Finden Sie den zeitabhängigen Teil des Hamilton-Operators $H_{R2}(t)$ in der Basis von $|g\rangle$ und $|e\rangle$.

(b) Finden Sie in niedrigster Ordnung einer zeitabhängigen Störungstheorie die Korrekturen zum Zustand $|g\rangle$ durch den Störhamilton-Operator $H_{R2}(t)$. Verwenden Sie dazu den Ansatz

$$|\psi\rangle = \left[|g\rangle + a_1 e^{2i\omega t}|g\rangle + b_1 e^{2i\omega t}|e\rangle + a_{-1}e^{-2i\omega t}|g\rangle + b_{-1}e^{-2i\omega t}|e\rangle\right]e^{igt/2}. \tag{5}$$

Setzen Sie $|\psi\rangle$ in die Schrödingergleichung ein und projizieren Sie nacheinander auf $\langle g|$ und $\langle e|$. Um die Zeitabhängigkeit zu entfernen, multiplizieren Sie dann mit $e^{-2i\omega t}$ und integrieren Sie über t von 0 bis π/ω.

3. Bewegungsgleichung der Dichtematrix **(4 Punkte)**

Betrachten wir nun 2 gekoppelte Spin-1/2 Teilchen,

$$H = \frac{\hbar\omega_1}{2}\sigma_z^1 + \frac{\hbar\omega_2}{2}\sigma_z^2 + \hbar g(\sigma_+^1\sigma_-^2 + \sigma_-^1\sigma_+^2). \tag{6}$$

Die ersten beiden Terme des Hamilton-Operators haben die Eigenzustände $|\sigma_1, \sigma_2\rangle = |\sigma_1\rangle \otimes |\sigma_2\rangle$, wobei $\sigma_z^{1/2}|\sigma_{1/2}\rangle = \sigma_{1/2}|\sigma_{1/2}\rangle$, $\sigma_{1/2} = \pm$. In dieser Basis hat die Dichtematrix $\hat{\rho}$ die Elemente $\rho_{(\sigma_1\sigma_2)(\sigma_1'\sigma_2')} = \langle\sigma_1\sigma_2|\hat{\rho}|\sigma_1'\sigma_2'\rangle$. Die Bewegungsgleichung der Dichtematrix ist durch die Liouville-Gleichung gegeben:

$$i\hbar\dot{\hat{\rho}} = [H, \hat{\rho}]. \tag{7}$$

Schreiben sie die Bewegungsgleichung für die Elemente $\rho_{(\sigma_1\sigma_2)(\sigma_1'\sigma_2')}$ explizit aus

$$\dot{\rho}_{(\sigma_1\sigma_2)(\sigma_1'\sigma_2')} = \frac{1}{i\hbar}\sum_{(\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2)}(H_{(\sigma_1\sigma_2)(\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2)}\rho_{(\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2)(\sigma_1'\sigma_2')} - \rho_{(\sigma_1\sigma_2)(\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2)}H_{(\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2)(\sigma_1'\sigma_2')}. \tag{8}$$

Berechnen sie dazu die Matrixelemente des Hamilton-Operators $H_{(\sigma_1\sigma_2)(\sigma_1'\sigma_2')} = \langle\sigma_1\sigma_2|H|\sigma_1'\sigma_2'\rangle$ und danach die Summe über $\tilde{\sigma}_1$ und $\tilde{\sigma}_2$.

4. Dephasierung durch Wechelwirkung mit Bad **(6 Punkte)**

Betrachten wir ein Spin-1/2-System, das an einen harmonischen Oszillator (oder eine Mode des Strahlungsfeldes) durch σ_z gekoppelt ist:

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a + \sigma_z\hbar g(a^\dagger + a) \tag{9}$$

(a) Transformieren Sie den Hamilton-Operator mit Hilfe eines Verschiebeoperators: $H' = D^\dagger(\sigma_z\alpha)HD(\sigma_z\alpha)$, wobei $D(\sigma_z\alpha) = e^{\sigma_z(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)}$. Zeigen Sie, dass durch die Wahl $\alpha = \alpha^* = -(g/\omega)$, der Kopplungsterm in dem transformierten Hamilton-Operator verschwindet. Hier sollte man sich aber erinnern, dass durch die Transformation auch die Basis der Zustände geändert wurde. Durch die Transformation zwischen den Basen werden die Zustände verschränkt. Drücken Sie den Zeitentwicklungsoperator in der alten Basis durch den Zeitentwicklungsoperator in der neuen Basis ($e^{-\frac{i}{\hbar}H't}$) und den Verschiebeoperator $D(\sigma_z\alpha)$ aus.

(b) Nehmen wir an, das am Zeitpunkt t=0 das System durch eine faktorisierte Dichtematrix dargestellt wird, $\rho(0) = \rho^s \otimes \rho^a$. Hier ist ρ^s die Dichtematrix des Spins mit Elementen $\rho^s_{\sigma\sigma'}$, und ρ^a die Dichtematrix des Strahlungsfeldes. Wir nehmen weiter an, dass das Strahlungsfeld im Grundzustand ist: $\rho^a = |0\rangle\langle 0|$. Benutzen sie den Zeitentwicklungsoperator von Aufgabenteil (a) und spuren sie über das Strahlungsfeld, um die zeitabhängige reduzierte Dichtematrix zu bekommen: $\rho^{red}(t) = \mathrm{Tr}_a(\rho(t)) = \mathrm{Tr}_a(U(t)\rho_0 U^\dagger(t))$ wobei $\mathrm{Tr}_a(...) = \sum_n \langle n|,,|n\rangle$. Zeigen sie, dass die diagonalen Elemente, $\rho_{\sigma\sigma}$, der reduzierten Dichtematrix für Zeiten $t > 0$ erhalten bleiben, d.h. $\rho^{red}_{\sigma\sigma}(t) = \rho^s_{\sigma\sigma}$ und dass die nicht-diagonalen Elemente (Kohärenzen) wie folgt modifiziert werden

$$\rho^{red}_{+-}(t) = e^{-i\omega_0 t}e^{-\gamma(t)}\rho^s_{+-} \tag{10}$$

mit $\gamma(t) = (2g/\omega)^2(1 - cos(\omega t))$. Wie verändert der Vorfaktor $e^{-\gamma(t)}$ die Kohärenzen für $t \ll 2\pi/\omega$ und wie für $t = 2\pi/\omega$?

(c) Die Berechnung für viele Moden verläuft analog und ergibt für die Kohärenzen

$$\rho^{red}_{+-}(t) = e^{-\omega_0 t}e^{-\sum_k \gamma_k(t)}\rho^s_{+-} \tag{11}$$

wobei die $\gamma_k(t)$ dieselbe Form haben wie $\gamma(t)$ aber mit $g \to g_k$ und $\omega \to \omega_k$. Um ein Gefühl dafür zu bekommen was passiert, analysieren sie erst den Fall von zwei Moden $k = 1, 2$ mit $\omega_1 \neq \omega_2$. Definieren sie danach $J(\omega)$:

$$J(\omega) = 2\pi\sum_k g_k^2\delta(\omega - \omega_k) \tag{12}$$

und zeigen sie durch die Substitution $x = \omega t$, dass für lange Zeiten die Kohärenzen eine exponentielle Abhängigkeit von t bekommen:

$$\rho^{red}_{+-} = e^{-\Gamma t}\rho^s_{+-}, \qquad \Gamma = J(0) \tag{13}$$

Hierfür brauchen sie das Integral $\int_0^\infty \mathrm{d}x(1 - \cos(x))/x^2 = \pi/2$