

Übungen zu Physik der Quanteninformation SS 14

Dr. M. Marthaler
C. KarlewskiLösungsvorschlag zu Blatt 2
Besprechung, 14.05.2014

1. Die Quanten Fourier Transformation

(a) Um zu zeigen, dass $\hat{F}$ unitär ist, berechnen wir $\hat{F}^\dagger \hat{F}$

$$\hat{F}^\dagger = \sum_{jk} \frac{e^{-2\pi i j k / N}}{\sqrt{N}} |j\rangle \langle k| \quad (1)$$

$$\hat{F} = \sum_{j'k'} \frac{e^{2\pi i j' k' / N}}{\sqrt{N}} |j'\rangle \langle k'| \quad (2)$$

$$\hat{F}^\dagger \hat{F} = \frac{1}{N} \sum_{jkj'k'} e^{2\pi i (j'k' - jk) / N} |j\rangle \langle j'| \delta_{kk'} \quad (3)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{jkj'} e^{2\pi i (j' - j) k / N} |j\rangle \langle j'| \quad (4)$$

$$= \sum_{jj'} |j\rangle \langle j'| \delta_{jj'} = \mathbb{1} \quad (5)$$

(b)

$$F_j |j\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} j k} |k\rangle \quad (6)$$

$$= 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} e^{\frac{2\pi i}{2^n} j k} |k\rangle \quad (7)$$

$$(8)$$

Zur Erinnerung wie die k Werte definiert waren

$$|k\rangle = |k_1\rangle |k_2\rangle \cdots = |k_1 k_2 \cdots k_n\rangle \quad (9)$$

$$k = k_1 2^{n-1} + \cdots + k_n 2^0. \quad (10)$$

Daraus folgt

$$F_j |j\rangle = 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \cdots \sum_{k_n=0}^1 e^{\frac{2\pi i}{2^n} j \sum_{l=1}^n k_l 2^{n-l}} |k_1 \cdots k_n\rangle \quad (11)$$

$$= 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \cdots \sum_{k_n=0}^n \bigotimes_{l=1}^n e^{2\pi i j k_l 2^{-l}} |k_l\rangle \quad (12)$$

$$= 2^{-\frac{n}{2}} \bigotimes_{l=1}^n \sum_{k_l=0}^1 e^{2\pi i j k_l 2^{-l}} |k_l\rangle \quad (13)$$

$$= 2^{-\frac{n}{2}} \bigotimes_{l=1}^n \left[|0\rangle_l + e^{2\pi i j 2^{-l}} |1\rangle_l \right] \quad (14)$$

(c) Zu zeigen ist

$$e^{\frac{2\pi i}{2^n} j} = \exp \left[2\pi i \sum_{k=1}^l j_{n-l+k} 2^{-k} \right] \quad (15)$$

Wir betrachten nun den relevanten Teil des Exponenten

$$j2^{-l} = [j_1 2^{n-1} + \dots + j_{n-1} 2^1 + j_n 2^0] 2^{-l} \quad (16)$$

$$= j_1 2^{n-1-l} + \dots + j_{n-l+1} 2^{-1} + j_{n-l+2} 2^{-2} + \dots + j_n 2^{-l} \quad (17)$$

$$= \underbrace{\dots}_{\text{ganze Zahl}} + \sum_{k=1}^l j_{n-l+k} 2^{-k} \quad \text{q.e.d.} \quad (18)$$

So lange $n - k$ größer ist als l bleibt der Exponent der 2 positiv und der gesamte Term bildet eine ganze Zahl die zusammen mit $\exp[2\pi i]$ eine 1 ergibt.

(d) Wie auf dem Aufgabenblatt beschrieben wirkt das Hadamar wie

$$\mathbf{H} |0\rangle_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_k + |1\rangle_k) \quad (19)$$

$$\mathbf{H} |1\rangle_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_k - |1\rangle_k). \quad (20)$$

Daher folgt direkt für einen allgemeinen Zustand $|j_k\rangle$

$$\mathbf{H} |j_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_k + e^{i\pi j_k} |1\rangle_k). \quad (21)$$

(e) Das Hadamar Gate auf den ersten Qubit des Zustands $|j\rangle = |j_1 j_2 \dots j_n\rangle$ angewandt ergibt

$$(\mathbf{H} |j_1\rangle) |j_2 \dots j_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 + e^{2\pi i j_1 2^{-1}} |1\rangle_1) |j_2 j_3 \dots j_n\rangle \quad (22)$$

Anschließend wenden wir nun das Controlled Phase Gate nacheinander auf alle folgenden Qubits an

$$\mathbf{R}_2 \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 + e^{2\pi i j_1 2^{-1}} |1\rangle_1) |j_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 + e^{2\pi i j_1 2^{-1} j_2 2^{-2}} |1\rangle_1) |j_2\rangle \quad (23)$$

$$\mathbf{R}_3 \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 + e^{2\pi i j_1 2^{-1} j_2 2^{-2}} |1\rangle_1) |j_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 + e^{2\pi i j_1 2^{-1} j_2 2^{-2} j_3 2^{-3}} |1\rangle_1) |j_3\rangle \quad (24)$$

⋮
⋮
⋮

$$\prod_{k=2}^n \mathbf{R}_k (\mathbf{H} |j_1\rangle) |j_2 \dots j_n\rangle |j_1 j_2 \dots j_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 + e^{2\pi i \sum_{m=1}^n j_m 2^{-m}} |1\rangle_1) |j_2 j_3 \dots j_n\rangle \quad (25)$$

(f) Aufgabenteil (e) ergibt den ersten Teil des Schaltkreises

$$|j\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 + e^{2\pi i \sum_{m=1}^n j_m 2^{-m}} |1\rangle_1) |j_2 j_3 \dots j_n\rangle \quad (26)$$

Auf den letzten Ket wird nun immer wieder Aufgabenteil (e) angewandt, wobei sich die Indizes verschieben

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 + e^{2\pi i \sum_{m=1}^n j_m 2^{-m}} |1\rangle_1) |j_2 j_3 \dots j_n\rangle \quad (27)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} (|0\rangle_1 + e^{2\pi i \sum_{m=1}^n j_m 2^{-m}} |1\rangle_1) \cdot (|0\rangle_2 + e^{2\pi i \sum_{m=1}^{n-1} j_{m+1} 2^{-m}} |1\rangle_2) |j_3 j_4 \dots j_n\rangle \quad (28)$$

$$\rightarrow 2^{-\frac{n}{2}} (|0\rangle_1 + e^{2\pi i \sum_{m=1}^n j_m 2^{-m}} |1\rangle_1) \dots (|0\rangle_n + e^{2\pi i j_n 2^{-1}} |1\rangle_n) \quad (29)$$

Mit Hilfe von Aufgabenteil (c) lassen sich nun die Exponenten weiter vereinfachen

$$\rightarrow 2^{-\frac{n}{2}} \left(|0\rangle_n + \underbrace{e^{2\pi i j 2^{-n}}}_{\text{Gleichung 8 (AB) für } l=n} |1\rangle_n \right) \cdot \left(|0\rangle_{n-1} + \underbrace{e^{2\pi i j 2^{-(n-1)}}}_{\text{Gleichung 8 (AB) für } l=n-1} |1\rangle_{n-1} \right) \dots \quad (30)$$

Zusammenfassend für alle Terme ergibt sich damit

$$\rightarrow 2^{-\frac{n}{2}} \bigotimes_{l=1}^n (|0\rangle_l + e^{2\pi i j 2^l} |1\rangle_l) \quad (31)$$

(g) Der Operator $\hat{F}_j$ war in seiner ursprünglichen Form gegeben als

$$\hat{F}_j |j\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \exp \left[\frac{2\pi i}{N} jk \right] |k\rangle. \quad (32)$$

Anwenden des Operators $\hat{F}$ auf den Zustand $|\Psi\rangle$ entspricht dem anwenden von $\hat{F}_j$ auf die Basiszustände $|j\rangle$

$$\hat{F} |\Psi\rangle = \sum_j x_j \hat{F}_j |j\rangle \quad (33)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j x_j \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} jk} |k\rangle \quad (34)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_j e^{\frac{2\pi i}{N} jk} x_j |k\rangle \quad (35)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} y_k |k\rangle \quad (36)$$