Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theoretische Festkörperphysik

**Übungen zu Physik der Quanteninformation SS 14**

**Dr. M. Marthaler**
**C. Karlewski**

**Blatt 3**
**Besprechung, 28.05.2014**

---

## 1. Präparierung eines Zustandes **8 Punkte**

Wie in der Vorlesung besprochen, wollen wir einen Zustand $|\Psi_m\rangle = \sum_{i=0}^{2^m-1} \sqrt{p_i^{(m)}}\, |i\rangle$ initialisieren, wobei $m$ die Anzahl der von uns verwendeten Qubits ist und die $p_i^m$ gegeben sind durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x)$. Dies beruht auf dem Paper von Lov Grover und Terry Rudolph von 2002 (arXiv:quant-ph/0208112v1). Wir nehmen an das $p(x)$ auf den Bereich 0 bis $x_T$ beschränkt ist. Die $p_i^m$ sind Abhängig von der Anzahl der Unterteilungen des Bereichs 0 bis $x_T$, welche wiederum durch die Anzahl der verwendeten Qubits gegeben ist. Der Index $i$ gibt an in welchem Teil der Unterteilung man sich befindet. Um einen endgültigen gewünschten Superpositionszustand aus $N$ Qubits zu erreichen wird nun iterativ der gewünschte Endzustand aufgebaut, $m = 1, 2, \ldots, N$. Dabei wird dir Größe $f^{(m)}(i)$ nützlich sein, welche die Wahrscheinlichkeit angibt, sich in der linken Hälfte des Teilstück $i$ zu befinden, wobei $x_L^i$ die linke und $x_R^i$ die rechte Regionsgrenze bilden

$$f^{(m)}(i) = \frac{\int_{x_L^i}^{(x_L^i - x_R^i)/2 + x_L^i} p(x)dx}{\int_{x_L^i}^{x_R^i} p(x)dx} \tag{1}$$

Für den ersten Schritt (1 Qubit, $x_L^0 = 0$, $x_R^0 = x_T$) ergibt dies

$$f^{(1)}(0) = \frac{\int_0^{x_T/2} p(x)dx}{\underbrace{\int_0^{x_T} p(x)dx}_{=1}} = \int_0^{x_T/2} p(x)dx \tag{2}$$

Die gewünschte Superposition mit den richtigen Amplituden wird durch eine Rotation erreicht

$$\Theta_0 = \arccos(\sqrt{f^{(1)}(0)}) \tag{3}$$

$$|\Psi_1\rangle = \cos(\Theta_0)\,|0\rangle + \sin(\Theta_0)\,|1\rangle \tag{4}$$

$$\Rightarrow p_0^1 = f^{(1)}(0); \quad p_1^1 = 1 - f^{(1)}(0) \tag{5}$$

$$|\Psi_1\rangle = \sqrt{f^{(1)}(0)}\,|0\rangle + \sqrt{1 - f^{(1)}(0)}\,|1\rangle \tag{6}$$

**(a) (3 Pkt.)** Berechnen sie die Wahrscheinlichkeiten $p_0^2$, $p_1^2$, $p_2^2$, $p_2^3$ für 2 Qubits ausgehend von der Lösung für einen Qubit. Dabei ist nun die Rotation gegeben durch $\Theta_i^m = \arccos(\sqrt{f^{(m)}(i)})$.

**(b) (2 Pkt.)** Es gilt

$$p_i^{m-1} = \int_{x_L^i}^{x_R^i} p(x)dx. \tag{7}$$

Berechnen sie $p_j^m$ für die beiden Unterteilungen von dem Bereich $i$ und zeigen sie, dass dann auch $p_j^m = \int_{x_L^j}^{x_R^j} p(x)dx$ (Induktionsschritt).

**(c) (3 Pkt.)** Wir definieren die Wahrscheinlichkeitsdichte als

$$p(x) = 2x\Theta(x)\Theta(1-x), \qquad x_T = 1. \tag{8}$$

Berechnen sie $|\Psi_3\rangle$.

**2. 7-Qubit Steane Code** **(12 Punkte)**

Wir nutzen den 7-Qubit Steane Code aus der Vorlesung um Bit-Flip Fehler in einem beliebigen initial Zustand $|\Psi\rangle_I^0 = \alpha |0\rangle_L + \beta |1\rangle_L$ zu untersuchen. Die Stabiliser für diesen Code sind:

$$\begin{array}{ccc} K^1 = 111XXXX; & K^2 = X1X1X1X; & K^3 = 1XX11XX \\ K^4 = 111ZZZZ; & K^5 = Z1Z1Z1Z; & K^6 = 1ZZ11ZZ \end{array} \tag{9}$$

In der Abbildung 1 ist der Steane Code zur Korrektur von Bit-Flip Fehlern dargestellt.

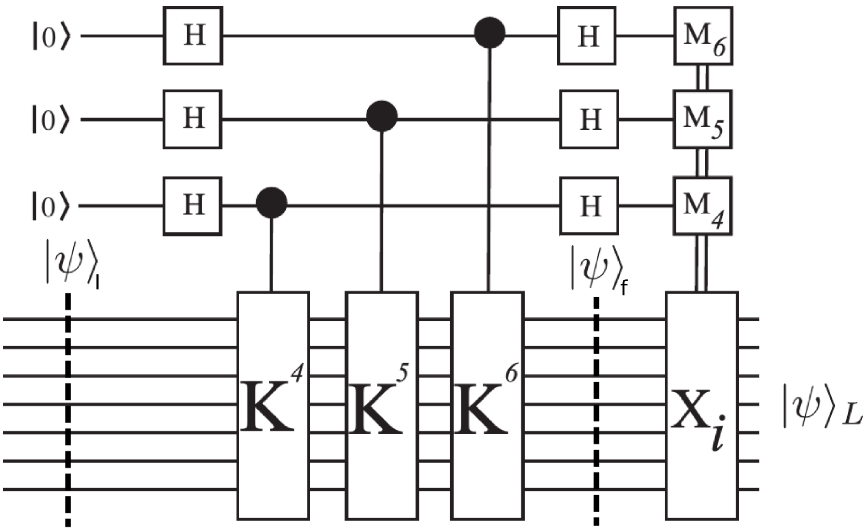


Abbildung 1: Schaltkreisabbildung des Steane Codes zur Korrektur von Bit-Flip Fehlern

**(a) (3 Pkt.)** Berechnen sie $|\Psi\rangle_f$ für alle möglichen Messungen von $M_4$, $M_5$ und $M_6$ in Abhängigkeit von allgemeinem Zustand $|\Psi\rangle_I$, der nicht ein Superpositionszustand von $|0\rangle_L$ und $|1\rangle_L$ sein muss.

**(b) (2 Pkt.)** Zeigen sie, welche Korrektur zu den Messungen 001, 011, und 111 gemacht werden müssen, um 000 zu erhalten.

**(c) (3 Pkt.)** Ein Bit-Flip Fehler im dritten Qubit kann geschrieben werden als $X_3 = 11X1111$, d.h. $|\Psi\rangle_I = X_3 |\Psi\rangle_I^0$. Berechnen sie $|\Psi\rangle_f$ sowie $M_4$, $M_5$ und $M_6$ und zeigen sie, dass $X_i$ mit $i = 1 \cdot M_5 + 2 \cdot M_6 + 4 \cdot M_4$ den richtigen Qubit korrigiert. Zeigen sie, dass das Ergebnis $|\Psi\rangle_L$ nach der Korrektur $|\Psi\rangle_I^0$ ist.

**(d) (2 Pkt.)** Nehmen sie an, dass die Fehler $X_1$ und $X_2$ passiert sind. Was wird gemessen und ist $|\Psi\rangle_L$ (Zustand nach Korrektur wie in (c)) ein Eigenzustand zu $K^4, K^5, K^6$ mit positiven Eigenwerten?

**(e) (2 Pkt.)** Nehmen sie an, dass die Fehler $X_5$ und $Z_5$ passiert sind. Betrachten sie den gesamten Steane Code mit Phase-Flip Fehlerkorrektur und berechnen sie $M^i$ mit $i = 1, \ldots, 6$ und ist $|\Psi\rangle_L = |\Psi\rangle_I^0$?