

## Übungen zu Physik der Quanteninformation SS 14

Dr. M. Marthaler  
C. KarlewskiLösungsvorschlag zu Blatt 3  
Besprechung, 28.05.2014

## 1. Präparierung eines Zustandes

8 Punkte

- (a) (3 Pkt.) Die neuen Grenzen für die einzelnen Abschnitte im zweiten Schritt sind:  $x_L^1 = 0$ ,  $x_R^1 = x_T/2$ ,  $x_L^2 = x_T/2$ ,  $x_R^2 = x_T$ . Daraus folgt für die Wahrscheinlichkeiten  $f^{(2)}(i)$

$$f^{(2)}(0) = \frac{\int_0^{x_T/4} p(x) dx}{\int_0^{x_T/2} p(x) dx} = \frac{\int_0^{x_T/4} p(x) dx}{f^{(1)}(0)} \quad (1)$$

$$f^{(2)}(1) = \frac{\int_{x_T/2}^{x_T/4} p(x) dx}{\int_{x_T/2}^{x_T} p(x) dx} = \frac{\int_0^{x_T/4} p(x) dx}{1 - f^{(1)}(0)} \quad (2)$$

Der neue Zustand ergibt sich aus den Multiplikationen der einzelnen Rotationen an den jeweiligen Zustand

$$|\Psi_2\rangle = \sqrt{p_0^1} |0\rangle \left( \sqrt{f^{(2)}(0)} |0\rangle + \sqrt{1 - f^{(2)}(0)} |1\rangle \right) + \sqrt{p_1^1} |1\rangle \left( \sqrt{f^{(2)}(1)} |0\rangle + \sqrt{1 - f^{(2)}(1)} |1\rangle \right) \quad (3)$$

$$= \sqrt{f^{(1)}(0)} \frac{\sqrt{\int_0^{x_T/4} p(x) dx}}{\sqrt{f^{(1)}(0)}} |00\rangle + \sqrt{f^{(1)}(0)} \sqrt{\frac{f^{(1)}(0) - \int_0^{x_T/4} p(x) dx}{f^{(1)}(0)}} |01\rangle \quad (4)$$

$$+ \sqrt{1 - f^{(1)}(0)} \frac{\sqrt{\int_{x_T/2}^{x_T/4} p(x) dx}}{\sqrt{1 - f^{(1)}(0)}} |10\rangle + \sqrt{1 - f^{(1)}(0)} \sqrt{\frac{1 - f^{(1)}(0) - \int_{x_T/2}^{x_T/4} p(x) dx}{1 - f^{(1)}(0)}} |11\rangle \quad (5)$$

$$= \underbrace{\sqrt{\int_0^{x_T/4} p(x) dx}}_{\sqrt{p_0^2}} |00\rangle + \underbrace{\sqrt{\int_{x_T/4}^{x_T/2} p(x) dx}}_{\sqrt{p_1^2}} |01\rangle + \underbrace{\sqrt{\int_{x_T/2}^{x_T/4} p(x) dx}}_{\sqrt{p_2^2}} |10\rangle + \underbrace{\sqrt{\int_{x_T/4}^{x_T} p(x) dx}}_{\sqrt{p_3^2}} |11\rangle \quad (6)$$

- (b) (2 Pkt.) Es gilt

$$p_i^{m-1} = \int_{x_L^i}^{x_R^i} p(x) dx. \quad (7)$$

Für die Grenzen im nächsten Schritt gilt  $x_L^i = x_L^j$  und  $x_R^i = x_R^j$ . Daraus folgt für die Wahrscheinlichkeiten  $f^{(m)}(j)$

$$f^{(m)}(j) = \frac{\int_{x_L^j}^{(x_L^j - x_R^j)/2 + x_L^j} p(x) dx}{\int_{x_L^j}^{x_R^j} p(x) dx} = \frac{\int_{x_L^j}^{(x_L^j - x_R^j)/2 + x_L^j} p(x) dx}{p_i^{m-1}} \quad (8)$$

Für den nächsten Schritt der Unterteilung folgt dann

$$\sqrt{p_i^{m-1}} |i\rangle \left( \sqrt{f^{(m)}(j)} |0\rangle + \sqrt{1 - f^{(m)}(j)} |1\rangle \right) \quad (9)$$

$$= \sqrt{p_i^{m-1}} \sqrt{\frac{\int_{x_L^j}^{(x_L^j - x_R^j)/2 + x_L^j} p(x) dx}{p_i^{m-1}}} |i0\rangle + \sqrt{p_i^{m-1}} \sqrt{\frac{p_i^{m-1} - \int_{x_L^j}^{(x_L^j - x_R^j)/2 + x_L^j} p(x) dx}{p_i^{m-1}}} |i1\rangle \quad (10)$$

$$= \underbrace{\sqrt{\int_{x_L^j}^{(x_L^j - x_R^j)/2 + x_L^j} p(x) dx}}_{p_j^m} |i0\rangle + \underbrace{\sqrt{\int_{(x_L^j - x_R^j)/2 + x_L^j}^{x_R^j} p(x) dx}}_{p_{j+1}^m} |i1\rangle \quad (11)$$

(c) (3 Pkt.) Es sind die 8 Wahrscheinlichkeiten  $\int_{k/8}^{(k+1)/8} p(x) dx$  mit  $p(x) = 2x$  und  $k \in 0, 1, \dots, 7$  zu berechnen:

$$|\Psi_3\rangle = \sqrt{\frac{1}{64}} |000\rangle + \sqrt{\frac{3}{64}} |001\rangle + \sqrt{\frac{5}{64}} |010\rangle + \sqrt{\frac{7}{64}} |011\rangle \quad (12)$$

$$+ \sqrt{\frac{9}{64}} |100\rangle + \sqrt{\frac{11}{64}} |101\rangle + \sqrt{\frac{13}{64}} |110\rangle + \sqrt{\frac{15}{64}} |111\rangle \quad (13)$$

## 2. 7-Qubit Steane Code

(12 Punkte)

(a) (3 Pkt.) Wie wir in der Vorlesung gesehen haben, lässt sich der Zustand nach einem Controlled U Gate schreiben als:

$$|\Psi\rangle_f = \begin{cases} \text{Messung 0 : } 1/2(|\Psi\rangle_I + U|\Psi\rangle_I) \\ \text{Messung 1 : } 1/2(|\Psi\rangle_I - U|\Psi\rangle_I) \end{cases} \quad (14)$$

Daraus folgt für die 3 aufeinanderfolgenden Messung  $M_4$ ,  $M_5$  und  $M_6$

$$|\Psi\rangle_f = 1/8 (\mathbb{1} + (1 - 2 \cdot M_6)K^6) (\mathbb{1} + (1 - 2 \cdot M_5)K^5) (\mathbb{1} + (1 - 2 \cdot M_4)K^4) |\Psi\rangle_I \quad (15)$$

(b) (2 Pkt.) Die Messung 001 führt auf den Endzustand

$$|\Psi\rangle_f = 1/8 (\mathbb{1} + K^6) (\mathbb{1} + K^5) (\mathbb{1} - K^4) |\Psi\rangle_I \quad (16)$$

Dies kann korrigiert werden durch eine Anwendung von  $X_4$ , mit  $\{X_4, K^4\} = 0$ ,  $[K^5, X_4] = 0$ ,  $[K^6, X_4] = 0$ .

$$X_4 |\Psi\rangle_f = 1/8 (\mathbb{1} + K^6) (\mathbb{1} + K^5) (\mathbb{1} + K^4) X_4 |\Psi\rangle_I \quad (17)$$

Die Messung 011 führt auf den Endzustand

$$|\Psi\rangle_f = 1/8 (\mathbb{1} + K^6) (\mathbb{1} - K^5) (\mathbb{1} - K^4) |\Psi\rangle_I \quad (18)$$

Dies kann korrigiert werden durch eine Anwendung von  $X_5$ , mit  $\{X_5, K^4\} = 0$ ,  $\{K^5, X_5\} = 0$ ,  $[K^6, X_5] = 0$ .

$$X_4 |\Psi\rangle_f = 1/8 (\mathbb{1} + K^6) (\mathbb{1} + K^5) (\mathbb{1} + K^4) X_5 |\Psi\rangle_I \quad (19)$$

Die Messung 111 führt auf den Endzustand

$$|\Psi\rangle_f = 1/8 (\mathbb{1} - K^6) (\mathbb{1} - K^5) (\mathbb{1} - K^4) |\Psi\rangle_I \quad (20)$$

Dies kann korrigiert werden durch eine Anwendung von  $X_7$ , mit  $\{X_7, K^4\} = 0$ ,  $\{K^5, X_7\} = 0$ ,  $\{K^6, X_7\} = 0$ .

$$X_4 |\Psi\rangle_f = 1/8 (\mathbb{1} + K^6) (\mathbb{1} + K^5) (\mathbb{1} + K^4) X_7 |\Psi\rangle_I \quad (21)$$

- (c) **(3 Pkt.)** Der initial Zustand ist gegeben als  $|\Psi\rangle_I = X_3 |\Psi\rangle_I^0$ , wobei  $|\Psi\rangle_I^0$  ein Eigenzustand zu allen  $K^i$  mit positivem Eigenwert ist. Die Kommutatoren von  $X_3$  mit den relevanten  $K^i$  sind  $[X_3, K^4] = 0$ ,  $\{X_3, K^5\} = 0$  und  $\{X_3, K^6\} = 0$ . Das führt für die einzelnen Messungen zu den Ergebnissen

$$\frac{1}{2} (\mathbb{1} + K^4) X_3 |\Psi\rangle_I^0 |0\rangle_4 + \frac{1}{2} (\mathbb{1} - K^4) X_3 |\Psi\rangle_I^0 |1\rangle_4 = X_3 |\Psi\rangle_I^0 |0\rangle_4 \Rightarrow M_4 = 0 \quad (22)$$

$$\frac{1}{2} (\mathbb{1} + K^5) X_3 |\Psi\rangle_I^0 |0\rangle_5 + \frac{1}{2} (\mathbb{1} - K^5) X_3 |\Psi\rangle_I^0 |1\rangle_5 = X_3 |\Psi\rangle_I^0 |1\rangle_5 \Rightarrow M_5 = 1 \quad (23)$$

$$\frac{1}{2} (\mathbb{1} + K^6) X_3 |\Psi\rangle_I^0 |0\rangle_6 + \frac{1}{2} (\mathbb{1} - K^6) X_3 |\Psi\rangle_I^0 |1\rangle_6 = X_3 |\Psi\rangle_I^0 |1\rangle_6 \Rightarrow M_6 = 1 \quad (24)$$

$$(25)$$

Der Zustand  $|\Psi\rangle_f$  ist also

$$(\mathbb{1} - K^6) (\mathbb{1} - K^5) (\mathbb{1} + K^4) X_3 |\Psi\rangle_I^0. \quad (26)$$

Mit der Eigenschaft  $X_3 X_3 = \mathbb{1}$  folgt

$$1/8 (\mathbb{1} + K^6) (\mathbb{1} + K^5) (\mathbb{1} + K^4) |\Psi\rangle_I^0 = |\Psi\rangle_I^0. \quad (27)$$

- (d) **(2 Pkt.)** Der initial Zustand ist nun  $|\Psi\rangle_I = X_2 X_1 |\Psi\rangle_I^0$ . Die benötigten Kommutatoren sind  $[X_1, K^4] = 0$ ,  $\{X_1, K^5\} = 0$  und  $[X_1, K^5] = 0$ , sowie  $[X_2, K^4] = 0$ ,  $[X_2, K^5] = 0$  und  $\{X_2, K^6\} = 0$ . Daraus folgen die Messungen  $M_4 = 0$ ,  $M_5 = 1$  und  $M_6 = 1$ . Die daraus resultierende Korrektur ist  $X_3$ . Die Kommutatoren mit  $K^i$  wurden schon im Aufgabenteil (c) berechnet. Angewendet auf  $|\Psi\rangle_f$  ergibt das

$$X_3 |\Psi\rangle_f = X_3 1/8 (\mathbb{1} - K^6) (\mathbb{1} - K^5) (\mathbb{1} + K^4) X_2 X_1 |\Psi\rangle_I^0 = X_3 X_2 X_1 |\Psi\rangle_I^0 \quad (28)$$

Eine weitere Messung dieses Zustand ergibt 000, aber  $X_3 X_2 X_1 |\Psi\rangle_I^0 = X_3 X_2 X_1 (\alpha |0\rangle_L + \beta |1\rangle_L) = \alpha |1\rangle_L + \beta |0\rangle_L$ .

- (e) **(2 Pkt.)** Die benötigten Kommutatoren sind  $\{Z_5, K^1\} = 0$ ,  $\{Z_5, K^2\} = 0$ ,  $[Z_5, K^3] = 0$ ,  $\{X_5, K^4\} = 0$ ,  $\{X_5, K^5\} = 0$ ,  $[X_5, K^6] = 0$ . Daraus folgt  $M_1 = 1$ ,  $M_2 = 1$ ,  $M_3 = 0$ ,  $M_4 = 1$ ,  $M_5 = 1$  und  $M_6 = 0$ . Die beiden Korrekturen sind  $Z_5$  und  $X_5$ . Der Endzustand ist daher

$$|\Psi\rangle_L = X_5 1/8 (\mathbb{1} + K^6) (\mathbb{1} - K^5) (\mathbb{1} - K^4) Z_5 1/8 (\mathbb{1} + K^3) (\mathbb{1} - K^2) (\mathbb{1} - K^1) Z_5 X_5 |\Psi\rangle_I^0 \quad (29)$$

$$= 1/64 (\mathbb{1} + K^6) (\mathbb{1} + K^5) (\mathbb{1} + K^4) (\mathbb{1} + K^3) (\mathbb{1} + K^2) (\mathbb{1} + K^1) X_5 Z_5 Z_5 X_5 |\Psi\rangle_I^0 \quad (30)$$

$$= |\Psi\rangle_I^0 \quad (31)$$

Dies entspricht dem gewünschten ursprünglichen Zustand. Ein Fehler  $Z_5 X_5$  entspricht dem Fehler  $Y_5$  und kann damit auch korrigiert werden.