

Übungen zu Physik der Quanteninformation SS 14

Dr. M. Marthaler
C. Karlewski

Blatt 4
Besprechung, 11.06.2014

1. Der Flux-Qubit

8 Punkte

Ein Josephson-Kontakt besteht aus 2 Supraleitern getrennt von einer dünnen Isolatorschicht. Wir betrachten ein Josephson-Kontakt modelliert durch eine parallel geschaltete Kapazität und einen Josephson-Strom. Für den Josephson-Kontakt gilt

$$U = \frac{\hbar}{2e} \dot{\phi}_J \tag{1}$$

$$I_J = I_C \sin \phi_J \tag{2}$$

wobei ϕ die Differenz der Phase der supraleitenden Wellenfunktion von einer zur anderen Seite des Kontakts und I_C den kritischen Strom, einer baulich bedingten Konstante, bezeichnen. Das ganze soll als Ring angeordnet Induktivität L angeordnet werden (siehe Abbildung 1). Der Strom der Induktivität ist $I_L = \frac{\phi_L}{L}$. Φ_E bezeichnet den externen Fluss mit $\Phi_E = \frac{\hbar}{2e} \phi_E$. Die Phase einmal um die Schleife aufaddiert verschwindet, $\phi_E + \phi_J + \phi_L = 0$. Der Strom I_K der Kapazität ist gegeben als $I_K = C\dot{U}$.

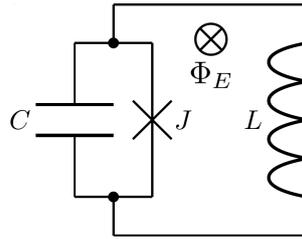


Abbildung 1: Ersatzschaltbild für realen Josephson-Kontakt.

- (a) (2 Pkt.) Die relevanten Energieskalen sind die Induktive-Energie $E_L = \frac{\hbar}{(2e)^2 L}$, die Josephson-Energie $E_J = \frac{\hbar}{2e} I_C$ und die Ladungsenergie $E_C = \frac{2e^2}{C}$. Benutzen sie die Kirchhoff'schen Regeln um die Bewegungsgleichung für ϕ in Abhängigkeit von den Energien zu bestimmen.

- (b) (2 Pkt.) Benutzen sie die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \tag{3}$$

um im Vergleich mit der Bewegungsgleichung aus (a) die Lagrange-Funktion \mathcal{L} zu bestimmen.

- (c) (2 Pkt.) Berechnen sie mit Hilfe der Lagrange-Funktion den Hamiltonian.
 (d) (2 Pkt.) Bestimmen sie die zu dem Potential V zugehörigen Terme und bestimmen sie die Parameter, für die das Potential ein Doppelmuldenpotential bildet.

2. Getriebenes 3-Zustandssystem

6 Punkte

Wir betrachten einen anharmonischen Oszillator, den wir auf die drei niedrigsten Energie-Eigenzustände $|0\rangle$, $|1\rangle$ und $|2\rangle$ reduzieren. Die Erzeuger- und Vernichteroperatoren a^\dagger und a haben die Eigenschaften $a|0\rangle = 0$, $a^\dagger|2\rangle = 0$, $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ und $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$. Der Hamiltonian ist gegeben durch

$$H = \omega a^\dagger a + \lambda (a^\dagger)^2 a^2 + g(a + a^\dagger) \cos(\omega_D t). \tag{4}$$

Hierbei ist ω das erste Energiesplitting, λ das Detuning des zweiten Energiesplittings, g die Kopplung des treibenden Feldes und ω_D die Frequenz des Feldes.

- (a) (1 Pkt.) Schreiben sie H als Matrix in der Basis $|0\rangle, |1\rangle$ und $|2\rangle$.
- (b) (2 Pkt.) Benutzen sie den unitären Operator $U = e^{-i\omega_D a^\dagger a t}$ um ins rotierende Bezugssystem zu wechseln und verwenden sie die RWA (siehe Blatt 1). Schreiben sie das Ergebnis wieder in Matrixform.
- (c) (3 Pkt.) Nehmen sie an, dass $\omega_D = \omega$. Wechseln sie in die Basis $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$, $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ und $|2\rangle$. Betrachten sie die nicht diagonal Terme als Störung und berechnen sie in erster Ordnung Störungstheorie die Korrektur zu $|2\rangle$. Was muss gelten damit der Überlapp der Wellenfunktionen möglichst klein ist?

3. Das dispersive Limit des Jaynes-Cummings-Model 6 Punkte

Das Jaynes-Cummings-Model ist gegeben durch den Hamiltonian

$$H = \frac{\epsilon}{2}\sigma_z + \omega a^\dagger a + g(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger) \quad (5)$$

Wir nutzen nun die kanonische Transformation $U = \exp[-\frac{g}{\delta}(a\sigma_+ - a^\dagger\sigma_-)] = \exp[X]$ mit $\delta = \omega - \epsilon$ um bis in Ordnung g^3/δ^2 die Moden und den Qubit zu entkoppeln. Dafür nutzen wir die Baker-Campbell-Hausdorff Formel:

$$e^X H e^{-X} \approx H + [X, H] + \frac{1}{2}[X, [X, H]] + \mathcal{O}(g^3/\delta^2). \quad (6)$$

- (a) (3 Pkt.) Berechnen sie den den Kommutator $[X, H]$ und zeigen sie, dass der Kopplungsterm aus H in der Entwicklung verschwindet.
- (b) (3 Pkt.) Zeigen sie, dass die Entwicklung bis zur Ordnung $\mathcal{O}(g^3/\delta^2)$ gegeben ist durch

$$U H U^\dagger = \frac{\epsilon}{2}\sigma_z + \omega a^\dagger a - \frac{g^2}{\delta}(a a^\dagger \sigma_z + \sigma_- \sigma_+) + \mathcal{O}(g^3/\delta^2). \quad (7)$$

4. Atom im Strahlungsfeld (BONUS) 4 Punkte

Wir betrachten ein einzelnes Spin 1/2 Teilchen (am Platz $\vec{r}_0 = \vec{0}$) gekoppelt an ein Strahlungsfeld mit vielen Moden mit den Wellenvektoren \vec{k} .

$$H = H_0 + H_1, \quad H_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}, \quad H_1 = \sum_{\vec{k}} \hbar g_{\vec{k}} (\sigma_+ a_{\vec{k}} + \sigma_- a_{\vec{k}}^\dagger) \quad (8)$$

wobei $g_{\vec{k}}$ reell ist.

- (a) (1 Pkt.) Schreiben sie den Operator H_1 im Wechselwirkungsbild bezüglich H_0 .
- (b) (3 Pkt.) Berechnen sie unter der Verwendung der Goldenen Regel der Quantenmechanik die Übergangsraten $\Gamma_{n \rightarrow n'}^{+ \rightarrow -}$ sowie $\Gamma_{n \rightarrow n'}^{- \rightarrow +}$. Die Indizes n und n' symbolisieren hier die Verteilung der Photonenzahlen auf die Moden $n := \{n_{\vec{k}}\}$, $n' := \{n'_{\vec{k}}\}$. Zeigen sie zuerst, dass diese Raten geschrieben werden können in der Form,

$$\Gamma_{n \rightarrow n'}^{+ \rightarrow -} = 2\pi \sum_{\vec{k}} |\langle -, \{n'_{\vec{k}}\} | g_{\vec{k}} \sigma_- a_{\vec{k}}^\dagger | +, \{n_{\vec{k}}\} \rangle|^2 \delta(\omega_0 - \omega_{\vec{k}}), \quad (9)$$

$$\Gamma_{n \rightarrow n'}^{- \rightarrow +} = 2\pi \sum_{\vec{k}} |\langle +, \{n'_{\vec{k}}\} | g_{\vec{k}} \sigma_+ a_{\vec{k}} | -, \{n_{\vec{k}}\} \rangle|^2 \delta(\omega_0 - \omega_{\vec{k}}). \quad (10)$$

Summieren sie die Raten über alle möglichen Endzustände des Strahlungsfeldes $\{n'_{\vec{k}}\}$. Vereinfachen sie das Ergebnis, indem sie den Übergang von einem diskreten zu einem kontinuierlichen Strahlungsfeldes machen, $\sum_{\vec{k}} = V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$, und verwenden sie die Dispersionsrelation $\omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|$.