

Übungen zu Physik der Quanteninformation SS 14

Dr. M. Marthaler
C. KarlewskiLösungsvorschlag zu Blatt 4
Besprechung, 11.06.2014

1. Der Flux-Qubit

8 Punkte

- (a) (2 Pkt.) Aus der Addition der Phasen ergibt sich $\phi_L = -\phi_J - \phi_E$ und integrieren der Spannungsbedingung ergibt die Phase $\phi_J = \frac{2e}{\hbar} \int U dt$. Mithilfe der Kirchhoff'schen Regeln ergibt sich für die Addition der Ströme. **ACHTUNG: Fehler auf Aufgabenblatt:** $I_L = \frac{\hbar \phi_L}{2eL}$, z.B. durch ein Dimensionsvergleich und $E_L = \frac{\hbar^2}{(2e^2)L}$.

$$0 = I_J + I_K - I_L \quad (1)$$

$$0 = I_C \sin(\phi_J) + C\ddot{U} - \frac{\hbar \phi_L}{2eL} \quad (2)$$

$$0 = \frac{\hbar C}{2e} \ddot{\phi}_J + I_C \sin(\phi_J) + \frac{\hbar}{2eL} (\phi_J + \phi_E) \quad (3)$$

$$0 = \frac{\hbar^2}{2E_C} \ddot{\phi}_J + E_J \sin(\phi_J) + E_L (\phi_J + \phi_E) \quad (4)$$

- (b) (2 Pkt.) Im Vergleich mit der Euler-Lagrange-Gleichung ergibt sich für Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(\dot{\phi}_J, \phi_J) = \frac{\hbar^2}{4E_C} \dot{\phi}_J^2 + E_J \cos(\phi_J) - \frac{E_L}{2} (\phi_J + \phi_E)^2 \quad (5)$$

- (c) (2 Pkt.) Der Hamiltonfunktion ergibt sich aus der Beziehung

$$H = \dot{\phi}_J \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_J} - \mathcal{L} \quad (6)$$

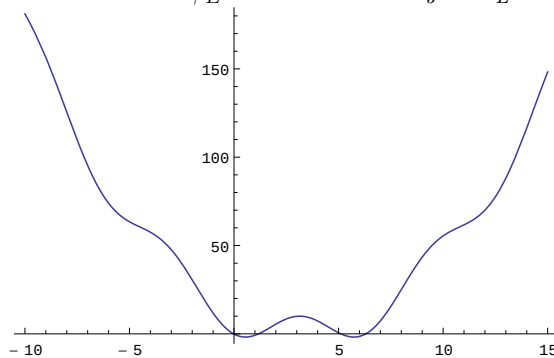
$$= \frac{\hbar^2}{2E_C} \dot{\phi}_J^2 - \frac{\hbar^2}{4E_C} \dot{\phi}_J^2 - E_J \cos(\phi_J) + \frac{E_L}{2} (\phi_J + \phi_E)^2 \quad (7)$$

$$= \frac{\hbar^2}{4E_C} \dot{\phi}_J^2 - E_J \cos(\phi_J) + \frac{E_L}{2} (\phi_J + \phi_E)^2 \quad (8)$$

- (d) (2 Pkt.) Der kinetische Term ist der quadratische Term der Ableitung von ϕ_J , daher sind die restlichen Terme dem Potential zu zuordnen.

$$V = -E_J \cos(\phi_J) + \frac{E_L}{2} (\phi_J + \phi_E)^2 \quad (9)$$

Um den Punkt $\phi_E = -\pi$ und mit $E_J > E_L$ bildet sich ein Doppelmuldenpotential.



2. Getriebenes 3-Zustandssystem

6 Punkte

(a) (1 Pkt.) Die Hamiltonian in Matrixform ist

$$H = \begin{pmatrix} 0 & g \cos(\omega_D t) & 0 \\ g \cos(\omega_D t) & \omega & \sqrt{2}g \cos(\omega_D t) \\ 0 & \sqrt{2}g \cos(\omega_D t) & 2(\omega + \lambda) \end{pmatrix} \quad (10)$$

(b) (2 Pkt.) Wir nutzen die Eigenschaften der unitären Transformation $U^\dagger a^\dagger U = a^\dagger e^{i\omega_D t}$, $U^\dagger a U = a e^{-i\omega_D t}$ um den Hamiltonian im rotierenden Bezugssystem zu berechnen (mit RWA):

$$H_R = [U^\dagger H U - iU^\dagger \dot{U}] \quad (11)$$

$$-iU^\dagger \dot{U} = -\omega_D a^\dagger a \quad (12)$$

$$U^\dagger H U = \omega a^\dagger a + \lambda (a^\dagger)^2 (a)^2 + g(a e^{-i\omega_D t} + a^\dagger e^{i\omega_D t}) \cos(\omega_D t) \quad (13)$$

$$= \omega a^\dagger a + \lambda (a^\dagger)^2 (a)^2 + \frac{g}{2} (a + a^\dagger) \quad (14)$$

$$\Rightarrow H_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\omega_D - \omega) & 0 \\ 0 & 0 & 2(\omega - \omega_D + \lambda) \end{pmatrix} + \frac{g}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

(c) (3 Pkt.) Für $\omega_D = \omega$ gilt $H_R = \lambda (a^\dagger)^2 a^2 + \frac{g}{2} (a + a^\dagger)$. Die neuen Basis Vektoren sind

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Eine Basistransformation führt zu neuen Matrix $H_R^\pm$

$$H_R^\pm = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{g}{2} & 0 \\ \frac{g}{2} & 0 & \frac{g}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{g}{\sqrt{2}} & 2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{g}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{g}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{g}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{g}{2} \\ \frac{g}{2} & -\frac{g}{2} & 0 \end{pmatrix}}_{H_C} \quad (18)$$

In erster Ordnung Störungstheorie ist die Korrektur zu $|2\rangle$

$$|2\rangle^{(1)} = |+\rangle \frac{\langle + | H_C | 2 \rangle}{2\lambda - \frac{g}{2}} + |-\rangle \frac{\langle - | H_C | 2 \rangle}{2\lambda + \frac{g}{2}} \quad (19)$$

$$= |+\rangle \frac{g}{4\lambda - g} - |-\rangle \frac{g}{4\lambda + g} \quad (20)$$

D.h. der Überlapp ist besonders klein wenn $\lambda \gg g$.

3. Das dispersive Limit des Jaynes-Cummings-Modells

6 Punkte

(a) (3 Pkt.) Die benötigten Kommutatoren sind $[a, a^\dagger] = 1$, $[\sigma_\pm, \sigma_z] = \mp 2\sigma_\pm$, $[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_z$. Daraus folgt für den gesuchten Kommutator

$$[X, H] = [-\frac{g}{2}(a\sigma_+ - a^\dagger\sigma_-), \frac{1}{2}\varepsilon\sigma_z + \omega a^\dagger a + g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)] \quad (21)$$

$$= \frac{-g\varepsilon}{2\delta} ([a\sigma_+, \sigma_z] - [a^\dagger\sigma_-, \sigma_z]) - \frac{g\omega}{\delta} ([a\sigma_+, a^\dagger a] - [a^\dagger\sigma_-, a^\dagger a]) - \frac{g^2}{\delta} ([a\sigma_+, a^\dagger\sigma_-] - [a^\dagger\sigma_-, a\sigma_+]) \quad (22)$$

Der Kommutator $[a\sigma_+, a^\dagger\sigma_-] = a[\sigma_+, a^\dagger\sigma_-] + [a, a^\dagger\sigma_-]\sigma_+ = aa^\dagger\sigma_z + \sigma_-\sigma_+$ führt zu dem Ergebnis

$$[X, H] = \frac{g\varepsilon}{2\delta} (2a\sigma_+ + 2a^\dagger\sigma_-) - \frac{g\omega}{\delta} (a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-) - \frac{g^2}{\delta} (2aa^\dagger\sigma_z + 2\sigma_-\sigma_+) \quad (23)$$

$$= -g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-) - \frac{g^2}{\delta} (2aa^\dagger\sigma_z + 2\sigma_-\sigma_+) \quad (24)$$

Der erste Term entspricht dem negativen Kopplungsterm und dieser fällt in der Entwicklung damit heraus.

- (b) (3 Pkt.) Der nächste Term der Entwicklung lässt sich nun wieder mit den in (a) berechneten Kommutatoren und dem Ergebnis aus (a) berechnen

$$[X, [X, H]] = [-\frac{g}{\delta}(a\sigma_+ - a^\dagger\sigma_-), -g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-) - \frac{g^2}{\delta}(2aa^\dagger\sigma_z + 2\sigma_-\sigma_+)] \quad (25)$$

$$= \frac{g^2}{\delta}([a\sigma_+, a^\dagger\sigma_-] - [a^\dagger\sigma_-, a\sigma_+]) + \mathcal{O}(\frac{g^3}{\delta^2}) \quad (26)$$

$$= \frac{g^2}{\delta}(2aa^\dagger\sigma_z + 2\sigma_-\sigma_+) + \mathcal{O}(\frac{g^3}{\delta^2}) \quad (27)$$

Daraus folgt für die Entwicklung

$$H' = UH U^\dagger = \frac{1}{2}\varepsilon\sigma_z + \omega a^\dagger a - \frac{g^2}{\delta}(aa^\dagger\sigma_z + \sigma_-\sigma_+) + \mathcal{O}(\frac{g^3}{\delta^2}) \quad (28)$$

4. Atom im Strahlungsfeld (BONUS)

4 Punkte

- (a) (1 Pkt.) Wir beschränken uns zuerst auf eine Mode ein: Wir haben

$$e^{iH_0 t/\hbar} = e^{i\omega t a^\dagger a} e^{i\frac{\omega_0}{2} t \sigma_z} = e^{i\omega t a^\dagger a} \left(\cos\left(\frac{\omega_0}{2} t\right) + i\sigma_z \sin\left(\frac{\omega_0}{2} t\right) \right) \quad (29)$$

$$e^{-iH_0 t/\hbar} = e^{-i\omega t a^\dagger a} e^{-i\frac{\omega_0}{2} t \sigma_z} = e^{-i\omega t a^\dagger a} \left(\cos\left(\frac{\omega_0}{2} t\right) - i\sigma_z \sin\left(\frac{\omega_0}{2} t\right) \right). \quad (30)$$

Des weiteren gilt

$$e^{i\omega t a^\dagger a} a^\dagger e^{-i\omega t a^\dagger a} = a^\dagger e^{i\omega t}; \quad e^{i\omega t a^\dagger a} a e^{-i\omega t a^\dagger a} = a e^{-i\omega t} \quad (31)$$

Mit der Verwendung von $\sigma_z\sigma_\pm = \pm\sigma_\pm$ erhalten wir

$$\left(\cos\left(\frac{\omega_0}{2} t\right) + i\sigma_z \sin\left(\frac{\omega_0}{2} t\right) \right) \sigma_+ \left(\cos\left(\frac{\omega_0}{2} t\right) - i\sigma_z \sin\left(\frac{\omega_0}{2} t\right) \right) = e^{i\omega_0 t} \sigma_+ \quad (32)$$

$$\left(\cos\left(\frac{\omega_0}{2} t\right) + i\sigma_z \sin\left(\frac{\omega_0}{2} t\right) \right) \sigma_- \left(\cos\left(\frac{\omega_0}{2} t\right) - i\sigma_z \sin\left(\frac{\omega_0}{2} t\right) \right) = e^{-i\omega_0 t} \sigma_- \quad (33)$$

Damit folgt für eine Mode $H_1(t) = \hbar g(\sigma_+ a e^{i(\omega_0 - \omega)t} + \sigma_- a^\dagger e^{-i(\omega_0 - \omega)t})$. Unter Verwendung von $[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$ erhalten wir für das volle System mit allen Moden

$$H_1(t) = \sum_{\vec{k}} \hbar g_{\vec{k}} (\sigma_+ a_{\vec{k}} e^{i(\omega_0 - \omega_{\vec{k}})t} + \sigma_- a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i(\omega_0 - \omega_{\vec{k}})t}) \quad (34)$$

- (b) (3 Pkt.) Wir verwenden die Notation $+ = e$ und $- = g$ zur besseren Übersicht. Wir beginnen mit den relevanten Matrixelementen:

$$\frac{1}{\hbar} \left| \int_{t_0}^t d\tau \langle g, \{n_{\vec{k}}'\} | H_1'(\tau) | e, \{n_{\vec{k}}\} \rangle \right| = \left| \sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}} \langle g, \{n_{\vec{k}}'\} | \sigma_- a_{\vec{k}}^\dagger | e, \{n_{\vec{k}}\} \rangle \int_{t_0}^t d\tau e^{-i(\omega_0 - \omega_{\vec{k}})\tau} \right| \quad (35)$$

$$= \left| \sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}} \langle g, \{n_{\vec{k}}'\} | \sigma_- a_{\vec{k}}^\dagger | e, \{n_{\vec{k}}\} \rangle \frac{\sin(\delta\omega_{\vec{k}}(t - t_0)/2)}{\delta\omega_{\vec{k}}/2} e^{i\delta\omega_{\vec{k}}(t+t_0)/2} \right| \quad (36)$$

mit $\delta\omega_{\vec{k}} = \omega_{\vec{k}} - \omega_0$. Wenn wir das ganze quadrieren und den Limes $t \rightarrow \infty$ bilden stellen wir nun fest,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin(\delta\omega_{\vec{k}}(t - t_0)/2)}{\delta\omega_{\vec{k}}/2} \frac{\sin(\delta\omega_{\vec{k}'}(t - t_0)/2)}{\delta\omega_{\vec{k}'}/2} = 2\pi t \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta(\delta\omega_{\vec{k}}) \quad (37)$$

Damit ergeben sich die Raten

$$\Gamma_{n \rightarrow n'}^{e \rightarrow g} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k}} |\langle g, \{n_{\vec{k}}'\} | \hbar g_{\vec{k}} \sigma_- a_{\vec{k}}^\dagger | e, \{n_{\vec{k}}\} \rangle|^2 \delta(\omega_0 - \omega_{\vec{k}}) \quad (38)$$

$$\Gamma_{n \rightarrow n'}^{g \rightarrow e} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k}} |\langle e, \{n_{\vec{k}}'\} | \hbar g_{\vec{k}} \sigma_+ a_{\vec{k}} | g, \{n_{\vec{k}}\} \rangle|^2 \delta(\omega_0 - \omega_{\vec{k}}) \quad (39)$$

Die Matrixelemente lassen sich nun explizit berechnen

$$|\langle g, n_{\vec{k}}' | \sigma_- a_{\vec{k}}^\dagger | e, n_{\vec{k}} \rangle|^2 = (n_{\vec{k}} + 1) \cdot \delta_{n_{\vec{k}}', n_{\vec{k}} + 1} \quad (40)$$

$$|\langle e, n_{\vec{k}}' | \sigma_+ a_{\vec{k}} | g, n_{\vec{k}} \rangle|^2 = n_{\vec{k}} \cdot \delta_{n_{\vec{k}}', n_{\vec{k}} - 1}. \quad (41)$$

Damit wird die Photonen-Emission

$$\Gamma_{e \rightarrow g} = \sum_{n'} \Gamma_{n \rightarrow n'}^{e \rightarrow g} = 2\pi \sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}}^2 \cdot (n_{\vec{k}} + 1) \cdot \delta(\omega_{\vec{k}} - \omega_0), \quad (42)$$

wobei die 1 der spontanen Emission entspricht und $n_{\vec{k}}$ der stimulierten Emission entspricht. Für die Photonen-Absorption gilt

$$\Gamma_{g \rightarrow e} = \sum_{n'} \Gamma_{n \rightarrow n'}^{g \rightarrow e} = 2\pi \sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}}^2 n_{\vec{k}} \cdot \delta(\omega_{\vec{k}} - \omega_0), \quad (43)$$

Wie in der Aufgabe besprochen kann nun der Übergang von der Summe zum Integral gemacht werden und die Dispersionsrelation $\omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}| = \omega_0$ verwendet werden,

$$\Gamma_{e \rightarrow g} = \frac{\omega_0^2 V}{4\pi^2 c^3} \int d\Omega_{\vec{k}} g_{\vec{k}}^2 \cdot (n_{\vec{k}} + 1) \quad (44)$$

$$\Gamma_{g \rightarrow e} = \frac{\omega_0^2 V}{4\pi^2 c^3} \int d\Omega_{\vec{k}} g_{\vec{k}}^2 \cdot n_{\vec{k}} \quad (45)$$

wobei noch Winkelintegrale übrigbleiben, die anisotrope Verteilung der Strahlung erlauben. Der Betrag $|\vec{k}|$ ist auf ω_0/c festgelegt.