

Übungen zu Physik der Quanteninformation SS 14

Dr. M. Marthaler
C. Karlewski

Blatt 6
Besprechung, 09.07.2014

1. Dekohärenz und die Lindblad-Gleichung

8 Punkte

Nehmen sie an, dass die Bewegungsgleichung der Dichtematrix eines 2-Niveau-Systems gegeben ist durch,

$$\dot{\rho} = -i\frac{1}{2}\omega_{10}[\sigma_z, \rho] + \frac{\gamma_{10}}{2}(2\sigma_- \rho \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho - \rho \sigma_+ \sigma_-) + \frac{\gamma_{01}}{2}(2\sigma_+ \rho \sigma_- - \sigma_- \sigma_+ \rho - \rho \sigma_- \sigma_+). \quad (1)$$

Dabei gilt

$$\sigma_+ |1\rangle = 0, \sigma_- |1\rangle = |0\rangle, \sigma_- |0\rangle = 0, \sigma_+ |0\rangle = |1\rangle. \quad (2)$$

Finden sie die Bewegungsgleichung für die Matrixelemente $\rho_{11}(t)$ und $\rho_{10}(t)$.

2. Diagrammatik und höhere Ordnungen

12 Punkte

Wir betrachten ein 2-Zustandssystem gekoppelt an ein Bad aus harmonischer Oszillatoren (Spin-Boson-Modell). Der Hamiltonian ist gegeben als

$$H = \underbrace{\frac{1}{2}\Delta E \sigma_z}_{H_S} + \underbrace{\sum_i \omega_i b_i^\dagger b_i}_{H_B} + g_c \cdot \underbrace{\sum_i (\sigma_+ b_i^- + \sigma_- b_i^+)}_{H_C}. \quad (3)$$

Hierbei ist H_S der Systemhamiltonian mit ΔE dem Energiesplitting des Qubits, σ sind die Pauli Matrizen, H_B ist der Badhamiltonian mit den Moden ω_i und den Erzeugern (Vernichtern) $b_i^+ = b_i^\dagger$ ($b_i^- = b_i$) und dem Kopplungshamiltonian H_C mit der Kopplungsstärke g_c . Die Pauli Matrizen σ_\pm und Eigenzustände von H_S sind definiert wie in Aufgabe 1. Wir wollen, wie in der Vorlesung besprochen, die Mastergleichung für das 2-Zustandssystem aufstellen und lösen und betrachten $t_0 = 0$. Dabei ist ein Diagramm z.B. gegeben als

$$\begin{array}{c} t \\ \bar{q} \text{ --- } (\tilde{\sigma}^\mp) \text{ --- } q \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bar{q}' \text{ --- } (\tilde{\sigma}^\pm) \text{ --- } q' \\ t' \end{array} = \langle \bar{q} | \tilde{\sigma}^\pm(t) | q \rangle \langle q' | \tilde{\sigma}^\mp(t') | \bar{q}' \rangle g_c^2 \sum_i \langle \tilde{b}_j^\mp(t) \tilde{b}_i^\pm(t') \rangle_B,$$

wobei $\tilde{A}(t) = e^{-\frac{i}{2}\Delta E \sigma_z t} A(t) e^{\frac{i}{2}\Delta E \sigma_z t}$, $\tilde{\sigma}^\pm(t) = \sigma_\pm e^{\pm i \Delta E t}$ und die Korrelationsfunktion definiert ist als

$$\sum_i \langle \tilde{b}_i^+(t) \tilde{b}_i^-(t') \rangle_B = C^-(t' - t), \quad \sum_i \langle \tilde{b}_i^-(t) \tilde{b}_i^+(t') \rangle_B = C^+(t' - t), \quad (4)$$

$$\sum_i \langle \tilde{b}_i^+(t) \tilde{b}_i^+(t') \rangle_B = 0, \quad \sum_i \langle \tilde{b}_i^-(t) \tilde{b}_i^-(t') \rangle_B = 0. \quad (5)$$

(a) (4Pkt.) Stellen sie für $\rho_{11}(t)$ ($|\bar{q}\rangle = |1\rangle$, $|q'\rangle = |1\rangle$) alle möglichen Diagramme mit einer Kontraktion auf und schreiben sie die Mastergleichung in Integralform. In Markov-Approximation lässt sich die Mastergleichung für das reduzierte Dichtematrixelement ρ_{11} schreiben als

$$\dot{\rho}_{11}(t) = - \sum_{i=0}^1 \rho_{ii}(t) \cdot \int_0^\infty dt' \Sigma(t-t'), \quad (6)$$

wobei $\Sigma(t-t')$ den Diagrammen entspricht, die zu benutzen sind.

- (b) (4 Pkt.) Stellen sie für $\rho_{01}(t)$ ($|\bar{q}\rangle = |0\rangle, |\bar{q}'\rangle = |1\rangle$) alle möglichen Diagramme mit einer Kontraktion auf und schreiben sie die Mastergleichung in Integralform. In Markov-Approximation lässt sich die Mastergleichung für das reduzierte Dichtematrixelement ρ_{01} schreiben als

$$\dot{\rho}_{01}(t) = -\rho_{01}(t) \cdot \int_0^\infty dt' \Sigma(t-t'). \quad (7)$$

Lösen sie die Mastergleichung mit Hilfe von $\int_0^\infty C^\pm(\pm t) e^{i\Delta E t} \approx \frac{1}{2} \mathcal{F}(C)^\pm(\pm \Delta E)$, wobei $\mathcal{F}(\cdot)$ der Fouriertransformierten entspricht.

- (c) (4 Pkt.) Mit der Lösung von (b), lässt sich die Zeitentwicklung von (a) 'verbessern'

$$\dot{\rho}_{01} = (-\rho_{11}(t) + \rho_{00}(t)) \int_{-\infty}^\infty d\tau C^-(\tau) e^{i\Delta E \tau - \frac{1}{2}(C^+(\Delta E) + C^-(\Delta E))|\tau|}, \quad (8)$$

wobei $\tau = t - t'$ ist. Argumentieren sie, was dies diagrammatisch und physikalisch bedeutet.