Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theoretische Festkörperphysik

Übungen zu Physik der Quanteninformation SS 14

Dr. M. Marthaler
C. Karlewski

Blatt 6
Besprechung, 09.07.2014

---

1. Dekohärenz und die Lindblad-Gleichung **8 Punkte**

Nehmen sie an, dass die Bewegungsgleichung der Dichtematrix eines 2-Niveau-Systems gegeben ist durch,

$$\dot{\rho} = -i\frac{1}{2}\omega_{10}[\sigma_z, \rho] + \frac{\gamma_{10}}{2}(2\sigma_-\rho\sigma_+ - \sigma_+\sigma_-\rho - \rho\sigma_+\sigma_-) + \frac{\gamma_{01}}{2}(2\sigma_+\rho\sigma_- - \sigma_-\sigma_+\rho - \rho\sigma_-\sigma+). \tag{1}$$

Dabei gilt

$$\sigma_+ |1\rangle = 0,\ \sigma_- |1\rangle = |0\rangle,\ \sigma_- |0\rangle = 0,\ \sigma_+ |0\rangle = |1\rangle. \tag{2}$$

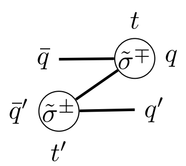
Finden sie die Bewegungsgleichung für die Matrixelemente $\rho_{11}(t)$ und $\rho_{10}(t)$.

2. Diagrammatik und höhere Ordnungen **12 Punkte**

Wir betrachten ein 2-Zustandssystem gekoppelt an ein Bad aus harmonischer Oszillatoren (Spin-Boson-Modell). Der Hamiltonian ist gegeben als

$$H = \underbrace{\tfrac{1}{2}\Delta E\sigma_z}_{H_S} + \underbrace{\sum_i \omega_i b_i^\dagger b_i}_{H_B} + \underbrace{g_c \cdot \sum_i \left(\sigma_+ b_i^- + \sigma_- b_i^+\right)}_{H_C}. \tag{3}$$

Hierbei ist H_S der Systemhamiltonian mit ΔE dem Energiesplitting des Qubits, σ sind die Pauli Matrizen, H_B ist der Badhamiltonian mit den Moden ω_i und den Erzeugern (Vernichtern) $b_i^+ = b_i^\dagger$ ($b_i^- = b_i$) und dem Kopplungshamiltonian H_C mit der Kopplungsstärke g_c. Die Pauli Matrizen $\sigma_\pm$ und Eigenzustände von H_S sind definiert wie in Aufgabe 1. Wir wollen, wie in der Vorlesung besprochen, die Mastergleichung für das 2-Zustandssystem aufstellen und lösen und betrachten $t_0 = 0$. Dabei ist ein Diagram z.B. gegeben als



$$= \langle q'|\, \tilde{\sigma}^{\pm}(t')\, |\bar{q}'\rangle\, \langle \bar{q}|\, \tilde{\sigma}^{\mp}(t)\, |q\rangle\, g_c^2 \sum_i \langle \tilde{b}_i^{\pm}(t')\tilde{b}_i^{\mp}(t)\rangle_B.,$$

wobei $\tilde{A}(t) = e^{-\frac{i}{2}\Delta E\sigma_z t}A(t)e^{\frac{i}{2}\Delta E\sigma_z t}$, $\tilde{\sigma}^{\pm}(t) = \sigma_\pm e^{\pm i\Delta E t}$ und die Korrelationsfunktion definiert ist als

$$\sum_i \langle \tilde{b}_i^+(t)\tilde{b}_i^-(t')\rangle_B = C^-(t'-t),\quad \sum_i \langle \tilde{b}_i^-(t)\tilde{b}_i^+(t')\rangle_B = C^+(t'-t), \tag{4}$$

$$\sum_i \langle \tilde{b}_i^+(t)\tilde{b}_i^+(t')\rangle_B = 0,\qquad \sum_i \langle \tilde{b}_i^-(t)\tilde{b}_i^-(t')\rangle_B = 0. \tag{5}$$

(a) (4Pkt.) Stellen sie für $\rho_{11}(t)$ ($|q\rangle = |1\rangle$, $|q'\rangle = |1\rangle$ alle möglichen Diagramme mit einer Kontraktion auf und schreiben sie die Mastergleichung in Integralform. In Markov-Approximation lässt sich die Mastergleichung für das reduzierte Dichtematrixelement ρ_{11} schreiben als

$$\dot{\rho}_{11}(t) = -\sum_{i=0}^{1} \rho_{ii}(t) \cdot \int_0^\infty d\tau\,\Sigma(\tau), \tag{6}$$

wobei $\Sigma(t-t')$ den Diagrammen entspricht, die zu benutzen sind und $\tau = t - t'$.

(b) (4Pkt.) Stellen sie für $\rho_{01}(t)$ ($|q\rangle = |0\rangle$, $|q'\rangle = |1\rangle$ alle möglichen Diagramme mit einer Kontraktion auf und schreiben sie die Mastergleichung in Integralform. In Markov-Approximation lässt sich die Mastergleichung für das reduzierte Dichtematrixelement ρ_{01} schreiben als

$$\dot{\rho}_{01}(t) = -\rho_{01}(t) \cdot \int_0^\infty d\tau \Sigma(\tau). \tag{7}$$

Lösen sie die Mastergleichug mit Hilfe von $\int_0^\infty C^\pm(\pm t) e^{i\Delta E t} \approx \frac{1}{2}\mathcal{F}(C)^\pm(\pm\Delta E)$, wobei $\mathcal{F}(\cdot)$ der Fouriertransformierten entspricht.

(c) (4 Pkt.) Mit der Lösung von (b), lässt sich die Zeitentwicklung von (a) 'verbessern'

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{01} =& -\rho_{11}(t) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau C^+(\tau) e^{i\Delta E\tau - \frac{1}{2}(\tilde{C}^+(-\Delta E) + \tilde{C}^-(\Delta E))|\tau|} \\ &+ \rho_{00}(t) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau C^-(\tau) e^{i\Delta E\tau - \frac{1}{2}(\tilde{C}^+(-\Delta E) + \tilde{C}^-(\Delta E))|\tau|}\end{aligned} \tag{8}$$

wobei $\tau = t - t'$ ist. Argumentieren sie, was dies diagrammatisch und physikalisch bedeutet.