

Spintransport in Nanostrukturen SS 2023

Lösungsblatt 1

Besprechung 10.5.2023 8:00, Raum 2/17

Aufgabe 1. Magnetische Filme

Skizzieren Sie die Felder $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ und $\mathbf{M}$ innerhalb und außerhalb eines homogen magnetisierten, unendlich ausgedehnten dünnen Films für Magnetisierung

- a) parallel
- b) senkrecht

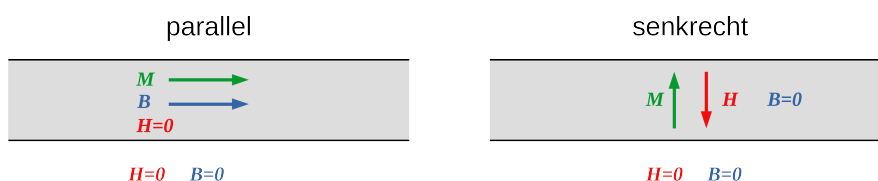
zum Film. Berechnen Sie in beiden Fällen die magnetostatische Selbstenergie.

Lösung

Ein dünner Film hat Entmagnetisierungsfaktor $N = 0$ (paralleles Feld) bzw. $N = 1$ (senkrecht Feld). Es gilt innerhalb des Films $\mathbf{H}_N = -N\mathbf{M}$, $\mathbf{B}_i = \mu_0 (\mathbf{M} + \mathbf{H}_N)$, außerhalb des Films $\mathbf{B}_a = \mu_0 \mathbf{H}_s$. Energiedichte $\frac{E_m}{V} = -\frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{M} \mathbf{H}_N$

Entsprechend gilt

- a) parallel: $N = 0$
innerhalb des Films: $\mathbf{H}_N = 0$, $\mathbf{B}_i = \mu_0 \mathbf{M}$
außerhalb des Films: $\mathbf{H}_s = 0$, $\mathbf{B}_a = 0$
Energie: $E_m = 0$
- b) senkrecht: $N = 1$
innerhalb des Films: $\mathbf{H}_N = -\mathbf{M}$, $\mathbf{B}_i = 0$
außerhalb des Films: $\mathbf{H}_s = 0$, $\mathbf{B}_a = 0$
Energie: $E_m = \frac{1}{2} \mu_0 M^2 V$



Das Feld außerhalb des Films ist immer null (natürlich nur für strikt homogene Magnetisierung und unendlichen Film).

Aufgabe 2. Weiss'sche Molekularfeldtheorie des Ferromagnetismus

Die Weiss'sche Molekularfeldtheorie des Ferromagnetismus ist gegeben durch

$$\frac{M}{M_S} = \mathcal{L} \left(\frac{m\mu_0 (H + \lambda M)}{k_B T} \right)$$

mit der Langevin-Funktion

$$\mathcal{L}(x) = \coth x - \frac{1}{x} \approx \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \mathcal{O}(x^5)$$

Berechnen Sie

- a) die Curie-Temperatur T_C
- b) die Magnetisierung $M(T, H = 0)$ für Temperaturen $T \lesssim T_C$ knapp unterhalb von T_C
- c) die Suszeptibilität χ für $T > T_C$

Tipp: verwenden Sie die Entwicklung von $\mathcal{L}$ jeweils in niedrigster (relevanter) Ordnung.

Lösung

Wir schreiben $\mu = M/M_S$, $h = H/M_S$, und $C = \mu_0 M_S m / 3k_B$. Damit ist

$$\mu = \mathcal{L} \left(\frac{3C(h + \lambda\mu)}{T} \right)$$

Für $h \ll 1$ bzw. $T \approx T_C$ ist $\mu \ll 1$. Wir betrachten also die Näherung von $\mathcal{L}(x)$ für kleine x .
Damit erhalten wir

$$\mu = \frac{C(h + \lambda\mu)}{T} - \frac{3}{5} \left(\frac{C(h + \lambda\mu)}{T} \right)^3$$

- a) Für die Curie-Temperatur setzen wir $h = 0$. Wir erhalten

$$\mu = \frac{C\lambda\mu}{T} - \frac{3}{5} \left(\frac{C\lambda\mu}{T} \right)^3$$

Wir definieren

$$y = \frac{C\lambda\mu}{T}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{Ty}{C\lambda} &= y - \frac{3}{5}y^3 \\ y \left(1 - \frac{T}{C\lambda} \right) &= \frac{3}{5}y^3 \end{aligned}$$

Eine Lösung mit $y > 0$ gibt es nur für $T < C\lambda = T_C$.

b) Für die Magnetisierung ergibt sich damit

$$\frac{5}{3} \left(1 - \frac{T}{T_C} \right) = y^2$$

$$\frac{M}{M_S} = \frac{T}{T_C} \left(\frac{5}{3} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{T}{T_C} \right)^{1/2}$$

c) Für die Suszeptibilität nehmen wir nur den linearen Term mit, d.h.

$$\mu = \frac{C(h + \lambda \mu)}{T}$$

$$\mu \left(1 - \frac{C\lambda}{T} \right) = \frac{Ch}{T}$$

$$\mu (T - T_C) = Ch$$

$$\chi = \frac{\mu}{h} = \frac{C}{T - T_C}$$

Aufgabe 3. Austausch- und Dipolwechselwirkung

Betrachten Sie zwei Elektronen im Abstand $r = 0.3 \text{ nm}$. Vergleichen Sie die Größenordnung von Coulombenergie und Dipolenergie.

Lösung

Coulombenergie:

$$E = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \approx 4.8 \text{ eV}$$

Dipolenergie:

$$E = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 - 3(\mathbf{m}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{m}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}))$$

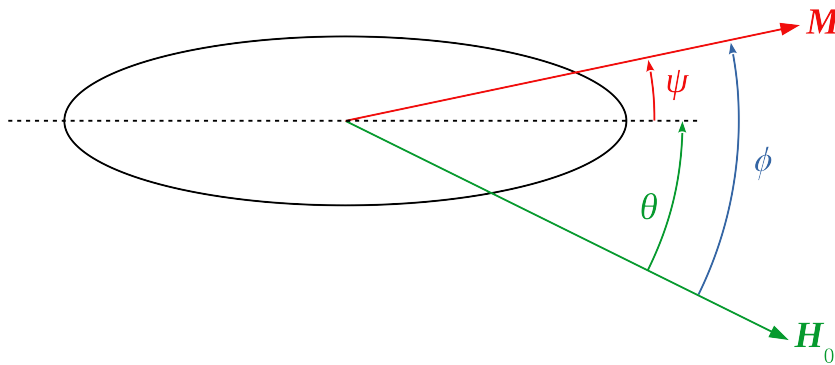
Magnetisches Moment $|\mathbf{m}| = \mu_B$, d. h.

$$E \sim \frac{\mu_0 \mu_B^2}{4\pi r^3} \approx 2 \text{ } \mu\text{eV}$$

Aufgabe 4. Stoner-Wohlfarth-Modell

- Berechnen Sie den Winkel ψ zwischen Magnetisierung und langer Achse des Ellipsoids für ein Magnetfeld senkrecht zur langen Achse.
- Betrachten Sie ein längliches Rotationsellipsoid mit $\mu_0 M_S = 1 \text{ T}$ und $N_{\parallel} = 0.1$ und Volumen V ohne angelegtes Magnetfeld. Berechnen Sie die Energiebarriere für Magnetisierungsumkehr für $V = 1 \text{ mm}^3$, $1 \text{ }\mu\text{m}^3$ und 1 nm^3 . Vergleichen Sie das Resultat mit der thermischen Energie bei Raumtemperatur. Was bedeutet das für magnetische Speichermedien?

Lösung



Die Energie ist (ohne konstante Beiträge)

$$E = \frac{\mu_0 M_S^2}{4} (1 - 3N_{\parallel}) \sin^2 \psi - \mu_0 M_S H_0 \cos(\theta + \psi)$$

a) Mit $H_a = M_S (1 - 3N_{\parallel}) / 2$ und $h = H_0 / H_a$ können wir schreiben

$$E = \mu_0 M_S H_a \left(\frac{1}{2} \sin^2 \psi - h \cos(\theta + \psi) \right)$$

Die Energie wird minimal für $\partial E / \partial \psi = 0$, d.h.

$$\sin \psi \cos \psi + h \sin(\theta + \psi) = 0$$

Wir haben $\theta = 90^\circ$, d.h.

$$\sin \psi \cos \psi + h \cos \psi = 0$$

Mit den Lösungen $\psi = \pm 90^\circ$ und $\psi = -\arcsin h$. Für ein Minimum muss gelten $\partial^2 E / \partial \psi^2 > 0$, d.h.

$$\cos^2 \psi - h \sin \psi - \sin^2 \psi > 0$$

Wir erhalten

$$\psi = \begin{cases} 90^\circ & \text{für } h < -1 \\ -90^\circ & \text{für } h > 1 \\ -\arcsin h & \text{für } |h| < 1 \end{cases}$$

Das Minuszeichen kommt daher, dass θ zur Achse hin und ψ von der Achse weg definiert ist.

b) Die Energiebarriere pro Volumen ist

$$\Delta E = E(\psi = 90^\circ) - E(\psi = 0) = \frac{\mu_0 M_S^2}{4} (1 - 3N_{\parallel}) = \frac{1 \text{ T}^2 \text{m}^2}{16\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs}} \cdot 0.7 = 1.39 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

$$V = 1 \text{ mm}^3 \quad \Delta E = 1.39 \cdot 10^{-4} \text{ J} \quad \frac{\Delta E}{k_B T} \approx 5 \cdot 10^{16}$$

$$V = 1 \text{ } \mu\text{m}^3 \quad \Delta E = 1.39 \cdot 10^{-13} \text{ J} \quad \frac{\Delta E}{k_B T} \approx 5 \cdot 10^7$$

$$V = 1 \text{ nm}^3 \quad \Delta E = 1.39 \cdot 10^{-22} \text{ J} \quad \frac{\Delta E}{k_B T} \approx 0.05$$

Bei wenigen Nanometern Größe reicht die thermische Energie, um die Magnetisierung umzudrehen. Kleine ferromagnetische Partikel verhalten sich also wie paramagnetische Makrospins (Superparamagnetismus).

Für Speichermedien braucht man stabile Magnetisierung. Aktuelle Festplatten haben ca. 1 Tbit/in². Das entspricht einer Fläche von ca. $25 \times 25 \text{ nm}^2 \sim 600 \text{ nm}^2$ pro bit.