

Spintransport in Nanostrukturen SS 2023

Lösungsblatt 2

Besprechung 24.5.2023 8:00, Raum 2/17

Aufgabe 1. Linearisierte Boltzmann-Gleichung

Die stationäre Boltzmann-Gleichung ist gegeben durch

$$\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \frac{\mathbf{F}}{\hbar} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{Stöße}}$$

Wir schreiben $f(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = f_0(\epsilon(\mathbf{k})) + g(\mathbf{r}, \mathbf{k})$. Zeigen Sie, dass für kleine Auslenkungen $g \ll f_0$ die linearisierte stationäre Boltzmann-Gleichung lautet

$$\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} g - \frac{e}{\hbar} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{k}} g - e \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{Stöße}}$$

Lösung

Wir berechnen zunächst die Gradienten

$$\nabla_{\mathbf{r}} f = \underbrace{\nabla_{\mathbf{r}} f_0(\epsilon(\mathbf{k}))}_{=0} + \nabla_{\mathbf{r}} g(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \nabla_{\mathbf{r}} g$$

$$\nabla_{\mathbf{k}} f = \nabla_{\mathbf{k}} f_0(\epsilon(\mathbf{k})) + \nabla_{\mathbf{k}} g = \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \nabla_{\mathbf{k}} \epsilon(\mathbf{k}) + \nabla_{\mathbf{k}} g = \hbar \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{k}} g$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{F}}{\hbar} \cdot \nabla_{\mathbf{k}} f &= -\frac{e}{\hbar} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \left(\hbar \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{k}} g \right) \\ &= -e \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} - e \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \underbrace{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})}_{=0} \\ &\quad - \frac{e}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} g \cdot \mathbf{E} - \frac{e}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} g \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

Wir antizipieren dass $g \propto E$, dann ist $\nabla_{\mathbf{k}} g \cdot \mathbf{E} = \mathcal{O}(E^2)$, während $(\partial f_0 / \partial \epsilon) \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \mathcal{O}(E)$. Für kleine Störungen E können wir also den Term mit $\nabla_{\mathbf{k}} g \cdot \mathbf{E}$ gegenüber $(\partial f_0 / \partial \epsilon) \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$ vernachlässigen. Wir erhalten also letztlich

$$\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} g - \frac{e}{\hbar} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{k}} g - e \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{Stöße}}$$

Aufgabe 2. Boltzmann-Gleichung - homogenes elektrisches Feld

Die Lösung für ein homogenes elektrisches Feld ist gegeben durch

$$g = e\tau(\mathbf{k}) \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}.$$

Zeigen Sie, dass sich diese Lösung im k -Raum als verschobene Fermikugel

$$f \approx f_0 \left(\mathbf{k} + \frac{e}{\hbar} \tau(\mathbf{k}) \mathbf{E} \right)$$

schreiben lässt.

Lösung

Wir rechnen von der Lösung rückwärts (siehe auch Aufgabe 1). Taylor-Entwicklung

$$f_0(\mathbf{k} + \delta\mathbf{k}) \approx f_0(\epsilon(\mathbf{k})) + \nabla_{\mathbf{k}} f_0(\epsilon(\mathbf{k})) \cdot \delta\mathbf{k} = f_0(\epsilon(\mathbf{k})) + \hbar \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{k}$$

Vergleichen mit

$$g = e\tau(\mathbf{k}) \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$$

ergibt

$$\delta\mathbf{k} = \frac{e}{\hbar} \tau(\mathbf{k}) \mathbf{E}.$$

Aufgabe 3. Magnetowiderstand und Hall-Effekt

Berechnen Sie mit Hilfe der linearisierten Boltzmann-Gleichung den transversalen Magnetoleitwert σ_{xx} und den Hall-Leitwert σ_{xy} für das freie Elektronengas. Tipp: Nehmen Sie an, dass die Lösung wieder eine verschobene Fermi-Kugel ist. Veranschaulichen Sie den Zusammenhang der Leitwert- und Widerstandsgrößen grafisch. Warum ist der Magnetoleitwert endlich, aber der Magnetowiderstand null?

Lösung

Wir benutzen die linearisierte Boltzmann-Gleichung mit Relaxationszeitnäherung

$$\frac{e}{\hbar} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{k}} g + e \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \frac{g}{\tau}$$

Wir vermuten, dass die Lösung ähnlich ist wie ohne Magnetfeld, d.h. eine verschobene Fermikugel. Wir schreiben den Ansatz

$$g = e\tau \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \mathbf{v} \cdot \mathbf{X}$$

mit einem beliebigen Vektor \mathbf{X} anstelle von \mathbf{E} . Für das freie Elektronengas gilt $\mathbf{v}(\mathbf{k}) = \hbar\mathbf{k}/m$. Dann ist

$$\nabla_{\mathbf{k}}g = \frac{\hbar e\tau}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \underbrace{\nabla_{\mathbf{k}}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{X})}_{=\mathbf{X}}$$

Einsetzen in die Boltzmann-Gleichung gibt

$$\begin{aligned} \frac{e\tau}{m} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{X} \\ \frac{e\tau}{m} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{X}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{X} \\ \mathbf{v} \cdot \left(\frac{e\tau}{m} \mathbf{B} \times \mathbf{X} + \mathbf{E} - \mathbf{X} \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{X} - \frac{e\tau}{m} (\mathbf{B} \times \mathbf{X})$$

Grafische Lösung: siehe Skizze

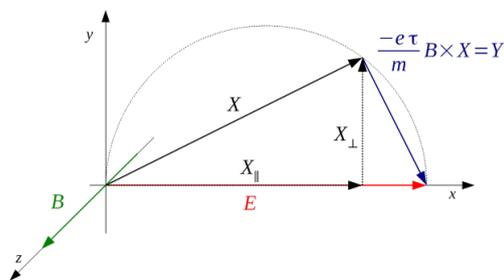
für die Beträge gilt

$$X^2 + Y^2 = E^2 \quad (1)$$

$$X_{\parallel}^2 + X_{\perp}^2 = X^2 \quad (2)$$

$$\frac{X_{\parallel}}{X} = \frac{X_{\perp}}{Y} \quad (3)$$

$$Y = \frac{e\tau}{m} \mathbf{B} \times \mathbf{X} = \omega_c \tau X \quad (4)$$



$$(4) \text{ in } (1) \rightarrow X = \frac{E}{\sqrt{1 + (\omega_c \tau)^2}}$$

$$(4) \text{ in } (3) \rightarrow X_{\perp} = \omega_c \tau X_{\parallel}$$

$$\text{alles in } (2) \rightarrow X_{\parallel}^2 [1 + (\omega_c \tau)^2] = \frac{E^2}{1 + (\omega_c \tau)^2}$$

$$X_{\parallel} = \frac{E}{1 + (\omega_c \tau)^2}$$

$$X_{\perp} = \frac{\omega_c \tau E}{1 + (\omega_c \tau)^2}$$

Aus der Vorlesung bekannt: Für $g = e\tau \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$ ist die Stromdichte $\mathbf{j} = \sigma_0 \mathbf{E}$, wir können jetzt also schreiben $\mathbf{j} = \sigma_0 \mathbf{X}$. Einsetzen der Lösung für X_{\parallel} und X_{\perp} ergibt den transversalen Magnetoleitwert

$$\sigma_t = \frac{1}{1 + (\omega_c \tau)^2} \sigma_0$$

und den Hall-Leitwert

$$\sigma_H = \frac{\omega_c \tau}{1 + (\omega_c \tau)^2} \sigma_0.$$

Der Leitfähigkeitstensor in der Ebene senkrecht zu \mathbf{B} ist

$$\mathbf{j} = \begin{pmatrix} \sigma_t & \sigma_H \\ -\sigma_H & \sigma_t \end{pmatrix} \mathbf{E}$$

Invertieren und einsetzen gibt den Widerstandstensor

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \rho_0 & \omega_c \tau \rho_0 \\ -\omega_c \tau \rho_0 & \rho_0 \end{pmatrix} \mathbf{j}$$

mit $\rho_0 = 1/\sigma_0$. Das freie Elektronengas hat keinen Magnetowiderstand.

Der Unterschied zwischen Magnetoleitwert und Magnetowiderstand liegt in den experimentellen Randbedingungen.

- Bei der Leitwertmessung wird \mathbf{E} aufgeprägt und \mathbf{j} gemessen. Die Probe liegt also längs der x -Achse im Diagramm. Es tritt ein Hall-Strom j_{\perp} auf, aber kein Hall-Feld E_{\perp} . Die Stromkomponente längs des Feldes ist reduziert \rightarrow negativer Magnetoleitwert.
- Bei der Widerstandsmessung wird \mathbf{j} aufgeprägt und \mathbf{E} gemessen. Die Probe liegt also längs des Vektors \mathbf{X} . Es tritt ein Hall-Feld E_{\perp} auf, aber kein Hall-Strom j_{\perp} . Die Feldkomponente parallel zu \mathbf{j} bleibt unverändert (rechtwinkliges Dreieck im Diagramm), also kein Magnetowiderstand.