Spintransport in Nanostrukturen SS 2023
Lösungsblatt 3

Besprechung 7.6.2023 8:00, Raum 2/17

Aufgabe 1. sd-Bandstruktur

Betrachten Sie ein eindimensionales, halbgefülltes Band mit Dispersion

$$\epsilon(k) = W(1 - \cos(ka))$$

Wie skalieren die folgenden Größen mit der Bandbreite W?

a) die Fermigeschwindigkeit v_F

b) die Zustandsdichte an der Fermikante $N(\epsilon_\mathrm{F})$

c) die Leitfähigkeit unter der Annahme, dass $\tau^{-1} \propto N(\epsilon_\mathrm{F})$ ist.

Vergleichen Sie s-Elektronen mit $W = 10$ eV und d-Elektronen mit $W = 1$ eV.

Lösung

Das Band ist halbgefüllt, wir haben also $k_\mathrm{F} = \pi/2a$ bzw. $\epsilon_\mathrm{F} = W$.

a) Wir haben

$$v(k) = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial \epsilon}{\partial k} = \frac{Wa}{\hbar}\sin(ka)$$

$$v_\mathrm{F} = v(k_\mathrm{F}) = \frac{Wa}{\hbar}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{Wa}{\hbar} \propto W$$

b) Wir haben

$$N(\epsilon) = \frac{\partial n}{\partial \epsilon} = \frac{\partial n}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial \epsilon} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\hbar v}$$

$$N(\epsilon_\mathrm{F}) = \frac{1}{2\pi\hbar v_\mathrm{F}} \propto \frac{1}{W}$$

c) Wir haben

$$\tau^{-1} \propto N(\epsilon_\mathrm{F}) \propto \frac{1}{W}$$

$$\sigma = N(\epsilon_\mathrm{F})\, e^2 D = N(\epsilon_\mathrm{F})\, e^2 v_\mathrm{F}^2 \tau \propto \frac{1}{W} W^2 W \propto W^2$$

Für s- und d-Bänder ergibt sich also etwa

$$\frac{v_\mathrm{F}^{(\mathrm{d})}}{v_\mathrm{F}^{(\mathrm{s})}} \sim \frac{1}{10}, \quad \frac{N^{(\mathrm{d})}(\epsilon_\mathrm{F})}{N^{(\mathrm{s})}(\epsilon_\mathrm{F})} \sim 10, \quad \frac{\sigma^{(\mathrm{d})}}{\sigma^{(\mathrm{s})}} \sim \frac{1}{100}$$

d-Bänder tragen wenig zum Stromtransport bei.

Aufgabe 2. Zweistrommodell

Für den Widerstand im Zweistrommodell gilt

$$\rho = \frac{\rho_\uparrow \rho_\downarrow}{\rho_\uparrow + \rho_\downarrow}$$

Nehmen Sie an, dass der Widerstand der einzelnen Spinbänder durch $\rho_\sigma = \rho_{0\sigma} + 2\rho_{\mathrm{ep}}(T)$ gegeben ist, wobei $\rho_{0\sigma}$ der Störstellenwiderstand und $\rho_{\mathrm{ep}}(T)$ der Elektron-Phonon-Widerstand ist. Es gilt $\rho_{\mathrm{ep}}(T = 0) = 0$. Vergleichen Sie den Widerstand $\rho(T)$ für $\rho_{0\sigma} \gg \rho_{\mathrm{ep}}(T)$ mit der Erwartung der Matthiessen-Regel.

Lösung

Insgesamt ergibt sich

$$\rho = \frac{\rho_\uparrow \rho_\downarrow}{\rho_\uparrow + \rho_\downarrow} = \frac{\left(\rho_{0\uparrow} + 2\rho_{\mathrm{ep}}(T)\right)\left(\rho_{0\downarrow} + 2\rho_{\mathrm{ep}}(T)\right)}{\rho_{0\uparrow} + \rho_{0\downarrow} + 4\rho_{\mathrm{ep}}(T)}$$

Der Störstellenwiderstand bei $T = 0$ ist

$$\rho_0 = \frac{\rho_{0\uparrow}\rho_{0\downarrow}}{\left(\rho_{0\uparrow} + \rho_{0\downarrow}\right)}.$$

Der Elektron-Phonon-Widerstand ohne Störstellen ist $\rho_{\mathrm{ep}}(T)$. Nach der Matthiessen-Regel erwarten wir

$$\rho = \rho_0 + \rho_{\mathrm{ep}}(T).$$

Für $\rho_{0\sigma} \gg \rho_{\mathrm{ep}}(T)$ entwickeln wir für kleine $\rho_{\mathrm{ep}}(T)$

$$\rho = \rho(T = 0) + \left.\frac{\partial\rho}{\partial\rho_{\mathrm{ep}}}\right|_{T=0} \rho_{\mathrm{ep}}(T) + \mathcal{O}\left(\rho_{\mathrm{ep}}^2(T)\right)$$

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial\rho}{\partial\rho_{\mathrm{ep}}}\right|_{\text{Zähler}} &= 2(\rho_{0\uparrow} + \rho_{0\downarrow} + 4\rho_{\mathrm{ep}}) \\
\left.\frac{\partial\rho}{\partial\rho_{\mathrm{ep}}}\right|_{\text{Nenner}} &= 4 \\
\left.\frac{\partial\rho}{\partial\rho_{\mathrm{ep}}}\right|_{T=0} &= \frac{2\left(\rho_{0\uparrow} + \rho_{0\downarrow}\right)^2 - 4\rho_{0\uparrow}\rho_{0\downarrow}}{\left(\rho_{0\uparrow} + \rho_{0\downarrow}\right)^2} \\
&= 1 + \frac{\left(\rho_{0\uparrow} + \rho_{0\downarrow}\right)^2 - 4\rho_{0\uparrow}\rho_{0\downarrow}}{\left(\rho_{0\uparrow} + \rho_{0\downarrow}\right)^2} \\
&= 1 + \frac{\rho_{0\uparrow}^2 + 2\rho_{0\uparrow}\rho_{0\downarrow} + \rho_{0\downarrow}^2 - 4\rho_{0\uparrow}\rho_{0\downarrow}}{\left(\rho_{0\uparrow} + \rho_{0\downarrow}\right)^2} \\
&= 1 + \frac{\left(\rho_{0\uparrow} - \rho_{0\downarrow}\right)^2}{\left(\rho_{0\uparrow} + \rho_{0\downarrow}\right)^2}
\end{aligned}$$

Einsetzen gibt

$$\rho = \underbrace{\rho_0 + \rho_{ep}(T)}_{\text{Matthiessen}} + \underbrace{\left(\frac{\rho_{0\uparrow} - \rho_{0\downarrow}}{\rho_{0\uparrow} + \rho_{0\downarrow}}\right)^2 \rho_{ep}(T)}_{\text{Zusatzterm}} + \mathcal{O}\left(\rho_{ep}^2(T)\right)$$

Aufgabe 3. Anisotroper Magnetwiderstand

Berechnen Sie für einen dünnen ferromagnetischen Draht mit Magnetfeld senkrecht zum Draht den AMR als Funktion des Feldes (Tipp: Nehmen Sie homogene Magnetisierung an und verwenden Sie das Stoner-Wohlfarth-Modell). Was erwarten Sie qualitativ für Magnetfeld parallel zum Draht? Skizzieren Sie das Ergebnis.

Lösung

Der Winkel zwischen Draht und Magnetisierung im Stoner-Wohlfarth-Modell ist (siehe Übungsblatt 1, Aufgabe 4)

$$\psi = \begin{cases} 90^\circ & \text{für } h < -1 \\ -90^\circ & \text{für } h > 1 \\ -\arcsin h & \text{für } |h| < 1 \end{cases},$$

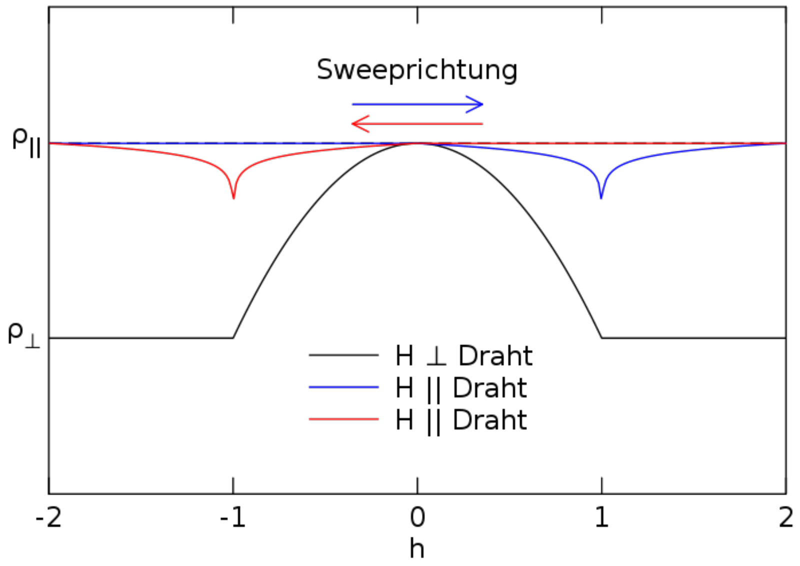
wobei $h = H/H_a$ und $H_a = M_S\left(1 - 3N_\parallel\right)/2$ ist. Für einen Draht ist $N_\parallel = 0$. Der Strom fließt längs des Drahtes, damit gilt für den AMR

$$\rho = \rho_\perp + \Delta\rho \cos^2\psi$$

mit $\Delta\rho = \rho_\parallel - \rho_\perp$. Damit ist

$$\rho = \rho_\perp + \Delta\rho\left(1 - \sin^2\psi\right) = \begin{cases} \rho_\perp + \Delta\rho\left(1 - h^2\right) & \text{für } |h| < 1 \\ \rho_\perp & \text{für } |h| \geq 1 \end{cases}$$

Für Magnetfeld parallel zum Draht haben wir praktisch immer $\rho_\parallel$, außer in der Nähe des Koerzitivfeldes.


Sweeprichtung
ρ||
ρ⊥
H ⊥ Draht
H || Draht
H || Draht
-2
-1
0
1
2
h