KIT

Spintransport in Nanostrukturen

Vorlesungsskript Sommersemester 2023

Detlef Beckmann

18. April 2023

Inhalt

1 Überblick **1**

2 Magnetismus **2**

2.a Grundbegriffe 2

2.b Magnetismus von Festkörpern 4

2.c Austauschwechselwirkung & magnetische Ordnung 5

2.d Magnetostatische Energie 8

2.e Micromagnetics 10

3 Elektronische Transporteigenschaften **14**

3.a Semiklassischer Transport 14

3.b Magnetowiderstand und Hall-Effekt 18

3.c Transporteigenschaften dünner Filme (Fuchs-Sondheimer-Modell) 20

4 Spinpolarisierter Transport **22**

4.a Einführung 22

4.b Bandmagnetismus in Metallen 23

4.c Transport in Ferromagneten 26

4.d Magnetotransport in Ferromagneten 28

5 Riesenmagnetwiderstand (GMR) **30**

5.a Strom parallel zur Schicht (CIP) 30

5.b Strom senkrecht zur Schicht (CPP), Spinakkumulation 33

6 Spinpolarisiertes Tunneln und Tunnelmagnetwiderstand (TMR) **39**

6.a Tunneleffekt 39

6.b Spinpolarisiertes Tunneln 40

6.c Tunnelmagnetwiderstand (TMR) 43

7 Spin Torque **45**

8 Spezielle Themen **50**

8.a Spinkaloritronik 50

8.b Magnon Spintronics 51

8.c Skyrmionen 52

8.d Molekulare Spintronik 54
8.e Supraleitende Spintronik 54

9 Glossar **57**

1 Überblick

Magnetismus & Transport auf der Nanoskala → Spintronik.

Magnetismus hier: hauptsächlich Spin der Leitungselektronen in Metallen.

Typische Beispiele:

Spinabhängiges Tunneln, entdeckt in den 70er Jahren, aber kleiner Effekt, anfangs nicht viel beachtet (TMR, Julliere 1975).

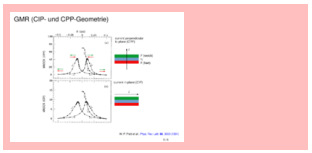
Grundidee: Elektrischer Strom über Magnetisierung schaltbar.

1988: GMR (unabhängig von Grünberg & Fert entdeckt, Nobelpreis 2007)

Metallische Mehrfachschichten, auch hier: schaltbarer Strom.

CIP-Beispiel: Widerstand als „Sensor“ für Magnetfelder.

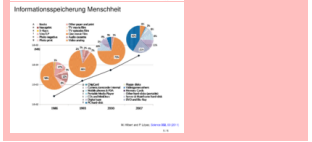
Tatsächlich zwei verschiedene Effekte (CIP-GMR und CPP-GMR) unter demselben Namen.



CPP-Beispiel: Bistabil schaltbare Elemente.

Teilweise schon Mainstream-Anwendungen (Leseköpfe, Kompass im Smartphone). Hauptsächlich Sensoranwendungen

Revolution in der Speicherdichte.



teilweise noch Zukunftsmusik: schaltbare Elemente (MRAM).

Komplementärer Effekt: Spin Torque Magnetisierung über elektrischen Strom schaltbar.

Besseres MRAM, Racetrack-Memories.

Physikalische Grundlagen teilweise sehr alt (AMR, 1857), teilweise brandneu.

Hier: hauptsächlich magnetoresistive Effekte in Metallen, neuere Entwicklungen (Spinwellen, Spin-Hall, Spinkaloritronik).

… Inhaltsübersicht, Literatur …

2 Magnetismus

2.a Grundbegriffe

Magnetfeld. Elektromagnetische Felder werden durch die Maxwellgleichungen beschrieben. Für statische Magnetfelder gilt

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{j} \end{aligned} \tag{2.1}$$

$\boldsymbol{H}$: magnetische Feldstärke (Einheit A/m, cgs: 1 Oe=1000/4π A/m)

$\boldsymbol{B}$: magnetische Induktion (Flussdichte) (Einheit T=kg/As^2, cgs: 1 G=10^{-4} T)

$\boldsymbol{j}$: elektrische Stromdichte

$\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{H}$ sind verknüpft durch

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \tag{2.2}$$

In älteren Lehrbüchern und vielen Veröffentlichungen oft noch cgs-System mit

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi\boldsymbol{M}$$

Details siehe Coey, Appendix B

$\boldsymbol{M}$: Magnetisierung (Einheit A/m, cgs: 1 emu/cm^3=1000 A/m)

Die Magnetisierung ist eine Eigenschaft magnetischer Materialien. Während (2.1) die Erzeugung von Magnetfeldern durch "freie" Ströme beschreibt, sagen die Maxwellgleichungen nichts über die Entstehung von $\boldsymbol{M}$ aus. Tatsächlich gilt in der klassischen Physik im thermischem Gleichgewicht $\boldsymbol{M} = 0$ (Bohr-van Leeuwen-Theorem), die Magnetisierung ist eine rein quantenmechanische Größe. Im Vakuum ist die Unterscheidung zwischen $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{H}$ unwichtig.

Magnetisches Moment und Magnetisierung. Magnetismus ist mikroskopisch durch die magnetischen Dipolmomente $\boldsymbol{m}$ der Elektronen verursacht. Klassisch: "gebundener" Strom auf Kreisbahn,

$$|\boldsymbol{m}| = IA = -ef\pi r^2 = -\frac{e}{2m} \cdot \underbrace{m\omega r^2}_{\text{Drehimpuls}} \tag{2.3}$$

Kernmagnetismus hier vernachlässigt wegen $\mu_K \approx \mu_B/2000$.

$\boldsymbol{m}$: magnetisches Moment (Einheit Am^2=J/T, cgs: 1 emu=10^{-3} Am^2)

bzw. quantenmechanisch längs Quantisierungsachse (z)

$$m_z = -\frac{e\hbar}{2m} \cdot l_z = -\mu_B l_z \tag{2.4}$$

Wir benutzen für die Elementarladung $e = |e|$. Die Ladung des Elektrons ist $-e$, magnetisches Moment und Drehimpuls sind antiparallel.

mit dem Bohr'schen Magneton

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9.27 \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}} \tag{2.5}$$

Zusätzlich zum Bahnmoment gibt es noch den Eigendrehimpuls (Spin)

$$m_z = -g_0 \mu_B \sigma \approx \pm \mu_B \tag{2.6}$$

mit $g_0 = 2.0023 \approx 2$ und $\sigma = \pm 1/2$.

Wir benutzen σ sowohl für die Leitfähigkeit als auch die Spinquantenzahl. Die Bedeutung sollte aus dem Kontext klar sein.

Die Magnetisierung

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m}\frac{N}{V} = \boldsymbol{m}n \tag{2.7}$$

ist die Dichte des magnetischen Moments. Um die Gleichungen (2.1) und (2.2) zu vervollständigen, braucht man eine (materialabhängige) Beziehung

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{H}), \tag{2.8}$$

die aus quantenmechanischen Modellen hergeleitet (oder experimentell bestimmt) werden muss. Für kleine Felder gilt oft

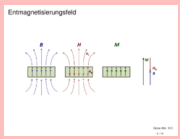
$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{H}) = \chi \boldsymbol{H} \tag{2.9}$$

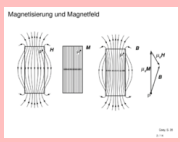
mit der Suszeptibilität χ bzw. der magnetischen Permeabilität $\mu = 1 + \chi$. Man unterscheidet ***diamagnetische*** ($\chi < 0$) und ***paramagnetische*** ($\chi > 0$) Materialien.

Entmagnetisierungsfeld. Gleichung (2.1) suggeriert, dass "freie" Ströme die einzigen Quellen des $\boldsymbol{H}$-Feldes sind. Das ist allerdings falsch. Wegen $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ gilt

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = -\nabla \cdot \boldsymbol{M}, \tag{2.10}$$

d.h. Imhomogenitäten der Magnetisierung sind Quellen/Senken des $\boldsymbol{H}$-Feldes. Diese treten insbesondere an Oberflächen magnetisierter Körper auf. Man kann dies als "magnetische Ladungen" interpretieren (die nur paarweise auftreten können, z.B. als Nord- und Südpol eines Stabmagneten). Wir betrachten das Magnetfeld, das von einem magnetisierten Körper hervorgerufen wird (Folie 1): Für das Streufeld außerhalb des Körpers gilt $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}_s$. Innerhalb des Körpers gilt $\boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{H}_N + \boldsymbol{M})$ mit dem Entmagnetisierungsfeld $\boldsymbol{H}_N$. Wegen des negativen Vorzeichens in (2.10) ist das Entmagnetisierungsfeld $\boldsymbol{H}_N$ tendenziell der Magnetisierung entgegengesetzt (daher der Name). $\boldsymbol{H}_N$ hängt von der Form des magnetisierten Körpers ab und ist im Allgemeinen inhomogenen (siehe Folie 2). Für Ellipsoide mit homogener Magnetisierung ist $\boldsymbol{H}_N$ allerdings homogen, und man kann für Magnetisierung längs einer Hauptachse schreiben $\boldsymbol{H}_N = -N\boldsymbol{M}$ mit dem Entmagnetisierungsfaktor N. Für die Hauptachsen gilt $N_x + N_y + N_z = 1$. Daher behandelt man reale Geometrien gerne näherungsweise als Ellipsoide:





- dünner Film senkrecht zu $\boldsymbol{B}$: $N \approx 1$
- langer, dünner Stab (oder Film) parallel zu $\boldsymbol{B}$: $N \approx 0$
- Kugel: $N = 1/3$

Zum Streufeld/Entmagnetisierungsfeld kommt noch das äußere angelegte Feld $\boldsymbol{H}_0$ hinzu, z.B. ein durch Elektromagneten erzeugtes Feld. Damit gilt im Außenraum $\boldsymbol{H}_a = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}_s$, und im Inneren des magnetisierten Körpers $\boldsymbol{H}_i = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}_N$. Die Materialgleichung (2.8) bezieht sich auf $\boldsymbol{H}_i$.

2.b Magnetismus von Festkörpern

Atomarer Magnetismus. Ausgangspunkt für Festkörpermagnetismus. Der Hamiltonian für ein Elektron im Magnetfeld ist

$$\mathcal{H} = \frac{(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2}{2m} + g_0 \mu_\mathrm{B} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\sigma} \tag{2.11}$$

Vorzeichenkonvention: Wir wählen die Orientierung der z-Achse längs $\boldsymbol{B}$. $\sigma = +1/2$ für Spin parallel zu $\boldsymbol{B}$, d.h. $\boldsymbol{m}$ antiparallel zu $\boldsymbol{B}$. Auch die umgekehrte Konvention ist gebräuchlich.

Für ein Ensemble von Elektronen mit Gesamtbahndrehimpuls $\boldsymbol{L}$ und Gesamtspin $\boldsymbol{S}$ ist der feldabhängige Teil

$$\Delta\mathcal{H} = \mu_\mathrm{B} \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{L} + g_0 \boldsymbol{S}) + O\left(B^2\right) \tag{2.12}$$

Drei Fälle

- Geschlossene Schalen mit $L = 0, S = 0, J = 0$:
  Larmor-Diamagnetismus
- Teilweise gefüllte Schalen mit $L \neq 0, S \neq 0, J = 0$:
  van Vleck-Paramagnetismus
- Teilweise gefüllte Schalen mit $J \neq 0$:
  stabiles magnetisches Moment $\boldsymbol{m} = -g(J, L, S)\, \mu_\mathrm{B} \boldsymbol{J}$.

Magnetisierung eines Ensembles magnetischer Momente ($J \neq 0$)

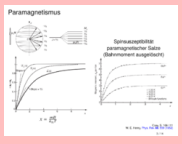
$$M = M_S B_J\left(\frac{mB}{k_\mathrm{B} T}\right) \tag{2.13}$$

$M_S = mn$: Sättigungsmagnetisierung.

B_J: Brillouin-Funktion.
Für $J \to \infty$ (klassischer Limes): Langevin-Funktion $\mathcal{L}$.

Für kleine Felder ist B_J linear, und es gilt

$$\chi = \frac{\mu_0 n m^2}{3 k_\mathrm{B} T} = \frac{C}{T} \tag{2.14}$$



(***Curie-Gesetz***, Curie-Konstante C).

Magnetische Momente in Festkörpern. In Festkörpern nehmen die Elektronen an der chemischen Bindung teil, entsprechend wird der atomare Magnetismus modifiziert. Entsprechend der Vielfalt der chemischen Bindungen ist Festkörpermagnetismus auch sehr vielfältig. Die Elektronen können lokalisiert sein (an Ionenrümpfen oder in kovalenten Bindungen) oder als Leitungselektronen delokalisiert sein. In beiden Fällen können sowohl Bahnmoment als auch Spin zum Magnetismus beitragen.

Typische Beispiele sind

- lokalisierte Momente in teilweise gefüllten d-Schalen (Übergangsmetallverbindungen, z.B. Oxide). Hier ist das Bahnmoment in der Regel durch Kristallfelder ausgelöscht, und es tritt nur Magnetismus durch den Gesamtspin der d-Schale auf.
- lokalisierte Momente in teilweise gefüllten f-Schalen (seltene Erden). Tiefliegende f-Schalen nehmen an der chemischen Bindung nicht teil, im Wesentlichen bleibt atomarer Magnetismus erhalten (aber auch hier Austauschwechselwirkung möglich).
- delokalisierte Elektronen in Metallen ("itineranter" Magnetismus), bei denen das magnetische Moment durch den Spin der einzelnen Leitungselektronen zustande kommt.

2.c Austauschwechselwirkung & magnetische Ordnung

Magnetische Ordnung kommt durch Wechselwirkung zwischen den einzelnen magnetischen Momenten zustande. Wir betrachten hier zunächst die Austauschwechselwirkung (Dipol-WW in Kapitel 2.d) an einem einfachen Beispiel mit zwei Elektronen, dem Wasserstoffmolekül. Eine Zweiteilchenwellenfunktion $\Psi(\boldsymbol{r}_1, \sigma_1, \boldsymbol{r}_2, \sigma_2)$ für beide Elektronen können wir als Produkt einer Orts- und einer Spinwellenfunktion schreiben:

$$\Psi(\boldsymbol{r}_1, \sigma_1, \boldsymbol{r}_2, \sigma_2) = \varphi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)\, \chi(\sigma_1, \sigma_2) \tag{2.15}$$

Um das Pauliprinzip

$$\Psi(\boldsymbol{r}_1, \sigma_1, \boldsymbol{r}_2, \sigma_2) = -\Psi(\boldsymbol{r}_2, \sigma_2, \boldsymbol{r}_1, \sigma_1) \tag{2.16}$$

zu erfüllen, muss entweder die Orts- oder die Spinwellenfunktion antisymmetrisch sein, d.h., wir haben

Entsprechend des Gesamtspins indizieren wir $\Psi_{T,S}$ (Triplett/Singulett)

$$\begin{gathered}\Psi_T(\boldsymbol{r}_1, \sigma_1, \boldsymbol{r}_2, \sigma_2) = \varphi_a(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)\, \chi_s(\sigma_1, \sigma_2) \\ \text{oder} \\ \Psi_S(\boldsymbol{r}_1, \sigma_1, \boldsymbol{r}_2, \sigma_2) = \varphi_s(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)\, \chi_a(\sigma_1, \sigma_2)\end{gathered} \tag{2.17}$$

mit

$$\begin{aligned}\varphi_{s,a}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) &= \pm\varphi_{s,a}(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1) \\ \chi_{s,a}(\sigma_1, \sigma_2) &= \pm\chi_{s,a}(\sigma_2, \sigma_1)\end{aligned} \tag{2.18}$$

Für die Spinwellenfunktion gibt es die Möglichkeiten

$$\begin{aligned}\chi_s &= |\uparrow\uparrow\rangle,\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle),\ |\downarrow\downarrow\rangle \quad \text{(Triplett mit } m = 1, 0, -1\text{)} \\ \chi_a &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \qquad\qquad\qquad \text{(Singulett)}\end{aligned}$$

Für die Ortswellenfunktion muss man im Prinzip die Schrödingergleichung lösen. Eine Vereinfachung ist die Heitler-London-Näherung. Wir nehmen zunächst an,

dass das i-te Elektron an "seinem" Proton einen Zustand mit Einteilchenwellenfunktion $\psi_i(\boldsymbol{r}_i)$ besetzt. Aus diesen konstruieren wir

$$\varphi_{s,a}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(\boldsymbol{r}_1)\,\psi_2(\boldsymbol{r}_2) \pm \psi_1(\boldsymbol{r}_2)\,\psi_2(\boldsymbol{r}_1)\right) \tag{2.19}$$

Wir nehmen jetzt an, dass der Hamiltonian $\mathcal{H}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$ spinunabhängig ist (z.B. nur Coulomb-Wechselwirkung). Die Energie des Systems ist dann gegeben durch

Im Folgenden nehmen wir keine Rücksicht auf die Normierung

$$E \propto \int \varphi^*(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\,\mathcal{H}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\,\varphi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\,d^3r_1 d^3r_2 \tag{2.20}$$

Einsetzen der Wellenfunktionen ergibt eine Energieaufspaltung $\Delta E = 2J$ zwischen Triplett und Singulett mit

$$J \propto \int \psi_1^*(\boldsymbol{r}_1)\,\psi_2^*(\boldsymbol{r}_2)\,\mathcal{H}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\,\psi_1(\boldsymbol{r}_2)\,\psi_2(\boldsymbol{r}_1)\,d^3r_1 d^3r_2 \tag{2.21}$$

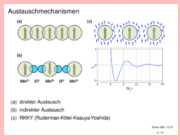
wobei J das sogenannte Austauschintegral ist. Die Kombination der an sich spinunabhängigen Coulomb-Wechselwirkung und des Pauliprinzips ergibt eine effektiv spinabhängige Wechselwirkung. Diese lässt sich auch als spinabhängiger Hamiltonian schreiben (Heisenberg-Hamiltonian)

$$\mathcal{H} = -2J\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \tag{2.22}$$

Einige Eigenschaften der Austauschwechselwirkung:

- Das Austauschintegral (2.21) enthält den Überlapp von Wellenfunktion, z.B. $\psi_1^*(\boldsymbol{r}_1)\,\psi_2(\boldsymbol{r}_1)$. Da Wellenfunktionen in der Regel auf große Distanz schnell abfallen, ist Austausch meist kurzreichweitig.
- Austauschwechselwirkung ist Coulomb-Wechselwirkung, bei starkem Überlapp können also große Energien (~ eV) auftauchen.
- Austauschwechselwirkung ist isotrop, hängt also nicht von der Anordnung der Spins im Ortsraum ab (nur von der relativen Orientierung zwischen den Spins).
- Zum Austausch tragen alle Terme im Hamiltonian bei. Generell bevorzugt die Coulomb-Abstoßung zwischen den Elektronen eine antisymmetrische Ortswellenfunktion, und damit eine parallele Ausrichtung der Spins (Beispiel: Hundsche Regeln). Beim Wasserstoffmolekül hingegen profitieren die beiden Elektronen von der größeren Coulomb-Anziehung durch beide Protonen, wenn sie sich in einer symmetrischen Ortswellenfunktion zwischen den Protonen aufhalten (antiparallele Spins, Singulett-Grundzustand).

Austauschwechselwirkung in Festkörpern. Wir haben bei der Austauschwechselwirkung nur das Zweielektronenproblem in Heitler-London-Näherung betrachtet. Hier einige Beispiele für Austauschwechselwirkung (siehe Folie 4):



- Direkter Austausch zwischen lokalisierten Elektronen (z.B. Wasserstoff-Molekül, Hundsche Regeln innerhalb eines Atoms).
- Indirekter Austausch über unmagnetische Zwischenatome. Beispiel: magnetische Oxide.
- Direkter Austausch zwischen delokalisierten Elektronen, Stoner-Modell des Bandmagnetismus (siehe Kapitel 4.b).
- Indirekter Austausch zwischen lokalisierten Momenten über Leitungselektronen (RKKY, Ruderman-Kittel-Kasuya-Yoshida).

Ferromagnetismus (Molekularfeldnäherung). Uns interessieren hauptsächlich magnetisch geordnete Materialien, insbesondere Ferromagneten, bei denen eine spontane Magnetisierung bei $H = 0$ auftritt. Oft verwendet man den Begriff Magnetismus synonym mit Ferromagnetismus.

Wir betrachten der Einfachheit halber reinen Spinmagnetismus mit lokalisierten Spins $\boldsymbol{S}_i$ und Austauschkonstanten J_{ij}. Dann ist der Beitrag zum Hamiltonian für Spin i

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_i &= g_0 \mu_\mathrm{B} \mu_0 \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{S}_i - 2 \sum_{j \neq i} J_{ij} \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j \\ &= \left(g_0 \mu_\mathrm{B} \mu_0 \boldsymbol{H} - 2 \sum_{j \neq i} J_{ij} \boldsymbol{S}_j \right) \cdot \boldsymbol{S}_i .\end{aligned} \tag{2.23}$$

Man ersetzt jetzt die Summe durch ihren Erwartungswert, und definiert das Molekularfeld λM, so dass[1]

$$\boldsymbol{H}_\mathrm{eff} = \boldsymbol{H} - \frac{2}{g_0 \mu_\mathrm{B} \mu_0} \left\langle \sum_{j \neq i} J_{ij} \boldsymbol{S}_j \right\rangle = \boldsymbol{H} + \lambda \boldsymbol{M} \tag{2.24}$$

mit der Kopplungskonstante λ (typischerweise $\lambda \gg 1$). Einsetzen in (2.13) liefert die Gleichung

$$M = \frac{N}{V} m B_J \left(\frac{m \lambda \mu_0 M}{k_\mathrm{B} T} \right), \tag{2.25}$$

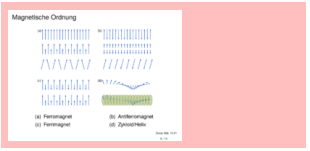
die man numerisch oder grafisch nach $M(T, H)$ lösen kann, siehe Folie 5. Unterhalb der Curie-Temperatur $T_\mathrm{C} = \lambda C$ tritt eine spontane Magnetisierung auf. Oberhalb der Curie-Temperatur gilt

$$\chi = \frac{C}{T - T_\mathrm{C}} \tag{2.26}$$

(Curie-Weiss-Gesetz). Die Molekularfeldnäherung liefert eine brauchbare qualitative Beschreibung, überschätzt allerdings T_C (Fluktuationen vernachlässigt).

[1] P. Weiss, J. Phys. Theor. Appl. **6**, 661 (1907). Die ursprüngliche Weiss'sche Molekularfeldtheorie des Ferromagnetismus wurde vor der Quantenmechanik entwickelt. Sie startet mit λM und benutzt die Langevin-Funktion.

Magnetische Ordnung. Je nach Vorzeichen der Austauschwechselwirkung wird parallele (Ferromagnetismus, Curie-Temperatur T_C) oder antiparallele (Antiferromagnetismus, Néel-Temperatur T_N) Ausrichtung der Spins bevorzugt. Auch kompliziertere Fälle möglich (Ferrimagnetismus, nicht-kollineare Spins). Siehe Folie 6.



2.d Magnetostatische Energie

Dipol-Wechselwirkung. Ein Dipol $\boldsymbol{m}_1$ erzeugt ein Magnetfeld

$$\boldsymbol{H}_1 = \frac{1}{4\pi r^3}\left(3\left(\boldsymbol{m}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{r}}\right)\cdot\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{m}_1\right), \tag{2.27}$$

wobei $\boldsymbol{r}$ der Abstandsvektor vom Dipol ist, und $\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/|r|$. Für die Energie eines zweiten Dipols $\boldsymbol{m}_2$ im Abstand $\boldsymbol{r}$ ergibt sich

$$E_{12} = -\mu_0 \boldsymbol{H}_1 \boldsymbol{m}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{m}_2 - 3\left(\boldsymbol{m}_1\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\right)\left(\boldsymbol{m}_2\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\right)\right) \tag{2.28}$$

Die Dipolwechselwirkung ist anisotrop und in der Regel bei benachbarten Dipolen im Festkörper viel schwächer als die Austauschwechselwirkung. Dafür ist sie langreichweitig. Für den gesamten Festkörper gilt dann

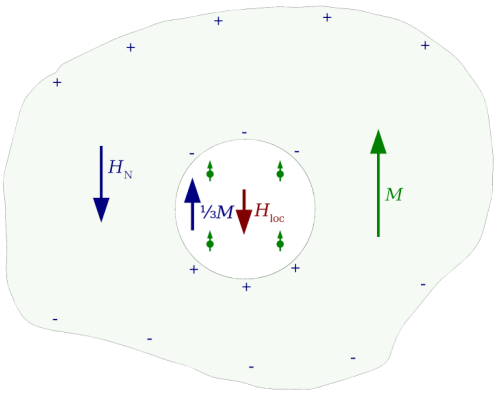
$$E_D = \frac{1}{2}\sum_{ij} E_{ij}, \tag{2.29}$$

wobei der Faktor $1/2$ Doppelzählung vermeidet.

Magnetostatische Selbstenergie. Anstelle der Doppelsumme (2.29) ist es bequemer, die Kontinuumsnäherung zu verwenden. Anwenden der Dipolenergie auf ein lokales magnetisches Moment in einer ausgedehnten Magnetisierungsverteilung ergibt

$$E_m = -\mu_0 \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{H}_{\text{lok}} \tag{2.30}$$

Um das lokale Feld zu ermitteln, stellen wir uns vor, dass $\boldsymbol{m}$ in einer kugelförmigen Aussparung sitzt (Lorentz-Kugel).



Wir behandeln alles außerhalb der Kugel als Kontinuum und summieren über die atomaren Dipole im Inneren einzeln. Dann ist

$$\boldsymbol{H}_{\text{lok}} = \boldsymbol{H}_N + \frac{1}{3}\boldsymbol{M} + \underbrace{\sum \text{Dipole}}_{=0 \text{ (kubisch)}} \tag{2.31}$$

und die magnetostatische Selbstenergie ist

$$-\frac{\mu_0}{2}\int_V \boldsymbol{H}_N \cdot \boldsymbol{M} dV - \frac{\mu_0}{6}\int_V M^2 dV. \tag{2.32}$$

Auch hier haben wir einen Faktor $1/2$ eingefügt, um Doppelzählung zu vermeiden. Der zweite Term wird in der Regel vernachlässigt, weil er nur einen Zusatzbeitrag zur ferromagnetischen Kopplung liefert, der aber viel kleiner ist als die Austauschwechselwirkung. Man definiert dann die magnetostatische Selbstenergie als

$$E_m = -\frac{\mu_0}{2}\int_V \boldsymbol{H}_N \cdot \boldsymbol{M} dV > 0 \tag{2.33}$$

E_m ist positiv, weil $\boldsymbol{H}_N$ entgegengesetzt zu $\boldsymbol{M}$ ist. Man kann zeigen, dass

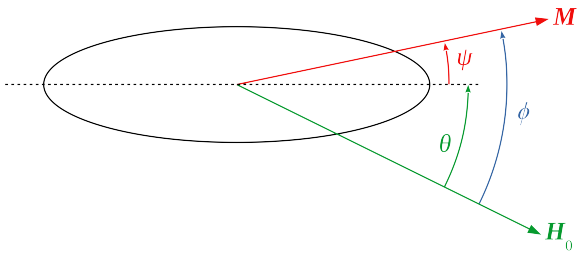
$$-\frac{\mu_0}{2}\int_V \boldsymbol{H}_N \cdot \boldsymbol{M} dV = \frac{\mu_0}{2}\int H^2 dV \tag{2.34}$$

ist, wobei das zweite Integral über den gesamten Raum geht. In der zweiten Form ist offensichtlich, dass $E_m > 0$.

Stoner-Wohlfahrt-Modell. Die Wechselwirkung eines magnetisierten Körpers mit einem äußeren Magnetfeld ist in der Regel äußerst kompliziert (siehe Micromagnetics, 2.e). Ein einfacher Spezialfall ist ein homogen magnetisiertes Ellipsoid. In dem Fall sind die Felder homogen, und die magnetostatische Selbstenergiedichte ist

$$E_m = \frac{\mu_0}{2}\left(N_x M_x^2 + N_y M_y^2 + N_z M_z^2\right) \tag{2.35}$$

mit $N_x + N_y + N_z = 1$. Wir betrachten jetzt ein längliches Rotationsellipsoid längs der x-Achse ($N_x = N_\parallel$, $N_y = N_z = N_\perp$).



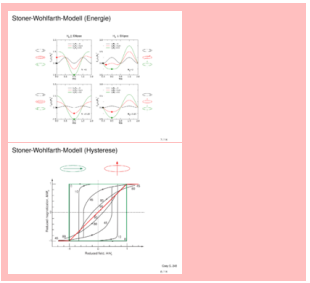
$M_\parallel = M_S \cos\psi$
$M_\perp = M_S \sin\psi$
M_S: Sättigungsmagnetisierung

Das äußere Magnetfeld H_0 ist in einem Winkel θ zur langen Achse angelegt, die Magnetisierung M hat einen Winkel ψ zur langen Achse. Der Winkel zwischen Feld und Magnetisierung ist $\phi = \theta + \psi$. Die magnetostatische Energie durch das äußere Feld ist

$$E_Z = -\mu_0 \boldsymbol{H}_0 \cdot \boldsymbol{M} \tag{2.36}$$

Für die Gesamtenergie gilt

$$E = \frac{\mu_0 M_S^2}{4}\left(1 - 3N_\parallel\right)\sin^2\psi - \mu_0 M_S H_0 \cos\left(\theta + \psi\right) + const. \tag{2.37}$$



Man definiert die uniaxiale Anisotropiekonstante

$$K_u = \frac{\mu_0 M_S^2}{4}\left(1 - 3N_\parallel\right) \tag{2.38}$$

bzw. das Anisotropiefeld

$$H_a = \frac{2K_u}{\mu_0 M_S} = \frac{M_S}{2}\left(1 - 3N_\parallel\right) \tag{2.39}$$

Hysterese tritt für Felder längs der "leichten" Achse auf. Anisotropie (hier: Formanisotropie) ist die Ursache von Hysterese.

Für eine Kugel ($N_\parallel = N_\perp = 1/3$) verschwindet die Anisotropie.

Für ein flaches Rotationsellipsoid gilt (2.37) immer noch, allerdings ist die Anisotropie negativ (d.h. in der Ebene), und die Magnetisierung kann in der Ebene frei rotiert werden.

2.e Micromagnetics

Das Stoner-Wohlfarth-Modell nimmt eine homogene Magnetisierung an, d.h., dass die Austauschkopplung stark genug ist, alle magnetischen Momente parallel zu halten. Das ist in der Regel nur für sehr kleine magnetische Partikel der Fall. Für größere Elemente muss man im Prinzip das Minimum der (freien) Energie für einen beliebigen inhomogenen Magnetisierungszustand finden. Dazu drückt man alle Beiträge zur Energiedichte in einer Kontinuumsnäherung aus, und integriert über das Volumen

$$E = \int \left(\epsilon_{\mathrm{ex}} + \epsilon_{\mathrm{a}} - \frac{\mu_0}{2}\boldsymbol{H}_N \cdot \boldsymbol{M} - \mu_0 \boldsymbol{H}_0 \cdot \boldsymbol{M} + \ldots\right) dV \tag{2.40}$$

Im Folgenden schreiben wir die wichtigsten Beiträge (und lassen "Dichte" weg). Wir schreiben außerdem die (lokale) Magnetisierung in Polarkoordinaten (θ, φ) längs der z-Achse.

Austauschenergie. Die Austauschenergie ist gegeben durch

$$\epsilon_{\mathrm{ex}} = \frac{A}{M_S^2}\left[(\nabla M_x)^2 + (\nabla M_y)^2 + (\nabla M_z)^2\right] = A\left[(\nabla\theta)^2 + \sin^2\theta(\nabla\varphi)^2\right] \tag{2.41}$$

Der Term bestraft eine räumliche Variation der Magnetisierung. Die Austausch-Steifigkeit A ist mit den mikroskopischen Parametern verknüpft durch

$$A = \frac{JS^2 Z_c}{a_0} \sim 10^{-12}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}} \tag{2.42}$$

wobei J das Austauschintegral, S der Spin, Z_c die Anzahl der Atome pro Einheitszelle und a_0 die Gitterkonstante ist. Die Konkurrenz von Austauschenergie (die parallele Magnetisierung bevorzugt) und magnetostatischer Energie (die Domänenbildung bevorzugt) drückt man oft durch die Austauschlänge

$$l_{\text{ex}} = \sqrt{\frac{A}{\mu_0 M_S^2}} \sim 3 \text{ nm} \tag{2.43}$$

aus.

Magnetokristalline Anisotropie. Neben der Formanisotropie tritt oft auch eine magnetokristalline Anisotropie auf. Ursache ist meist Spin-Bahn-Kopplung. Die Anisotropie folgt der Kristallsymmetrie. Beispiel: uniaxiale Anisotropie (längs der z-Achse, z.B. in hexagonalen Kristallen, Co) in niedrigster Ordnung (analog zur Formanisotropie im Stoner-Wohlfarth-Modell)

$$\epsilon_{\text{a}} = K_1 \sin^2 \theta. \tag{2.44}$$

Die Anisotropie kann positiv oder negativ sein, d.h. Ausrichtung längs der Achse oder in der Ebene quer dazu bevorzugen. Kubische Anisotropie (z.B. Fe, Ni) in niedrigster Ordnung

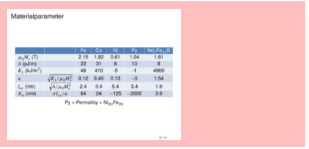
$$\epsilon_{\text{a}} = \frac{K_1}{M_S^4} \left(M_x^2 M_y^2 + M_y^2 M_z^2 + M_z^2 M_x^2 \right). \tag{2.45}$$

Es können auch Terme höherer Ordnung auftreten. Üblicherweise nummeriert man die Konstanten mit zunehmender Ordnung $K_1, K_2, \ldots$unabhängig von der Symmetrie. Man charakterisiert die Anisotropie auch durch den dimensionslosen Parameter

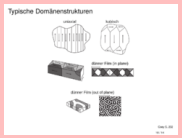
$$\kappa = \sqrt{\frac{K_1}{\mu_0 M_S^2}} \tag{2.46}$$

Neben der materialbedingten Volumenanisotropie können insbesondere in dünnen Filmen weitere Beiträge zur Anisotropie wichtig sein

- Oberflächenanisotropie: Dünne Filme haben viel Oberfläche und wenig Volumen. An Oberflächen ist die Symmetrie erniedrigt ist. Oberflächenanisotropie richtet sich nach dem Normalenvektor der Oberfläche.
- Verspannung: Durch die Wachstumsbedingungen können dünne Filme verspannt sein (z.B. tetragonale Verzerrung bei sonst kubischem Material).
- Grenzflächen zwischen verschiedenen magnetischen Materialien können auch durch Austauschkopplung zu Anisotropie führen (z.B. Exchange-Bias, siehe Kapitel 5).

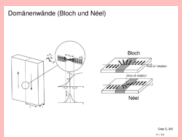


Domänen. Eine homogene Magnetisierung bewirkt magnetische Oberflächenladungen und damit ein Entmagnetisierungsfeld. Durch Bildung von Domänen können Oberflächenladungen vermieden bzw. die Entmagnetisierungsfelder reduziert werden. Je nach Anisotropie und Probengeometrie bilden sich sehr unterschiedliche Domänenstrukturen. Typische Beispiele siehe Folie 10.



Domänenwände. Wir betrachten eine Bloch-Wand (siehe Folie 11). Hier gilt $\nabla \cdot \boldsymbol{M} = 0$, d.h. die Domänenwand trägt nicht zum Entmagnetisierungsfeld bei (außer an der Oberfläche). Die Energie ist dann (für uniaxiale Anisotropie)

$$E \propto \int \left[A \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + K \sin^2 \theta \right] dx \tag{2.47}$$



Minimierung ergibt

$$\frac{M_z}{M_S} = \cos\theta\,(x) = \pm \tanh\left(\frac{\pi x}{\delta_w} \right) \tag{2.48}$$

mit der Domänenwandbreite

$$\delta_w = \pi \sqrt{\frac{A}{K}} = \pi \frac{l_{ex}}{\kappa} \tag{2.49}$$

Die Domänenwand ist genau genommen unendlich breit, daher ist δ_w nicht eindeutig definiert, und man findet verschiedene Definitionen.

Die Energie pro Fläche ist

$$\gamma = 4\sqrt{AK} \tag{2.50}$$

In dünnen Filmen sind Bloch-Wände wegen der Streufelder an der Oberfläche ungünstig. Dann bilden sich Néel-Wände mit Rotation in der Filmebene, oder andere, kompliziertere Strukturen.

Landau-Lifshitz-(Gilbert)-Gleichung. Auf ein magnetisches Moment wirkt in einem Magnetfeld ein Drehmoment

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B} \tag{2.51}$$

Man kann die Zeeman-Energie $E_Z = -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}$ auch aus dem Drehmoment herleiten

Für die Magnetisierung beschreibt entsprechend

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} = -\frac{g\mu_B}{\hbar} \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{B} \tag{2.52}$$

die freie Präzession mit Präzessionsfrequenz

$$\omega = \frac{g\mu_B}{\hbar} B \tag{2.53}$$

Durch Definition eines effektiven Magnetfeldes

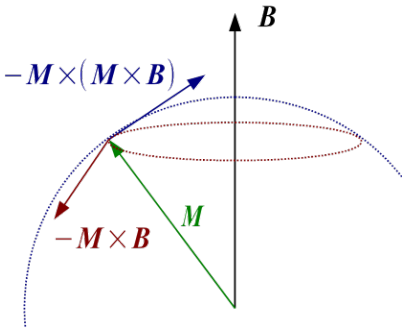
$$\boldsymbol{B}_{eff} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla_M E \tag{2.54}$$

kann man neben dem äußeren Feld auch weiter mikromagnetische Energiebeiträge berücksichtigen (Anisotropie etc.). Außerdem fügt man einen phänomenologischen

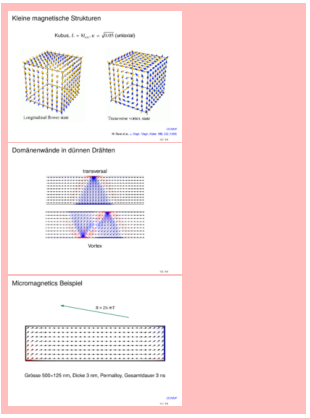
Dämpfungsterm hinzu. Je nach Schreibweise des Dämpfungsterms erhält man dann die Landau-Lifshitz- (LL) bzw. die Landau-Lifshitz-Gilbert- (LLG) Gleichung

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} = \underbrace{-\frac{g\mu_\mathrm{B}}{\hbar}\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{B}_\mathrm{eff}}_{\text{Präzession}} + \begin{cases} -\dfrac{g\mu_\mathrm{B}}{\hbar}\dfrac{\lambda}{|\boldsymbol{M}|}\boldsymbol{M}\times(\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{B}_\mathrm{eff}) & \text{Landau-Lifshitz} \\ \dfrac{\alpha}{|\boldsymbol{M}|}\boldsymbol{M}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} & \text{Gilbert} \end{cases} \tag{2.55}$$

Für schwache Dämpfung ($\alpha \ll 1$) sind beide äquivalent. Zur Illustration:



- alle Terme erhalten $|\boldsymbol{M}|$ (keine longitudinale Relaxation)
- insgesamt ergibt sich eine Spiralbewegung hin zu $\boldsymbol{B}$
- Typische Zeitskala für kleine magnetische Elemente: Nanosekunden.



Die LL bzw. LLG-Gleichung wird für mikromagnetische Simulationen genutzt:

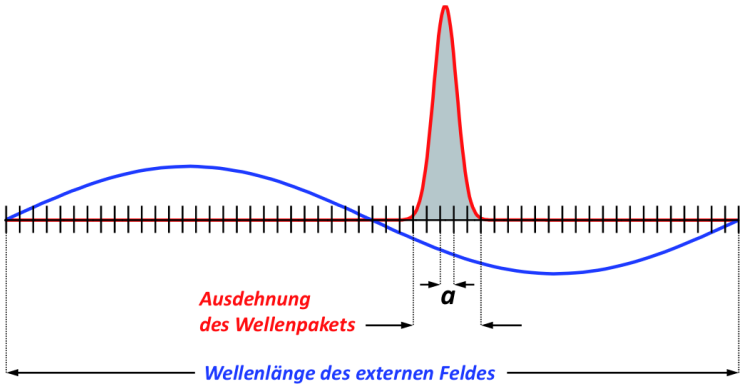
- Man zerteilt das Problem in finite Elemente mit lokaler Magnetisierung (fester Betrag, beliebige Richtung)
- Man gibt das äußere Feld und eine Startmagnetisierung vor, und simuliert dann die Zeitentwicklung, bis sich infolge der Dämpfung ein stationärer Zustand ergibt
- Dann kann man das Feld ändern und den nächsten Simulationsschritt machen

Dadurch kann man die ortsaufgelöste Magnetisierung während Ummagnetisierungsprozessen simulieren. Ein populäres Open-Source-Programm für den Zweck ist OOMMF. Einige Beispiele für Micromagnetics-Simulationen: siehe Folien 12-14.

3 Elektronische Transporteigenschaften

3.a Semiklassischer Transport

Bei der semiklassischen Beschreibung der Elektronen[2] zerlegen wir die Gesamtkraft auf ein Elektron anhand unterschiedlicher Längenskalen in "innere" und "äußere" Kräfte. Die "inneren" Kräfte, d.h. das periodische Potential der Ionenrümpfe, wird durch Bandstruktur $\epsilon(\boldsymbol{k})$ quantenmechanisch behandelt, die "äußeren" Kräfte durch angelegte Felder dagegen klassisch. Die Separation wird durch eine Aufteilung in verschiedene Längenskalen erreicht.[3]



Elektronen bilden Wellenpakete, die groß sind gegen die Gitterkonstante (dadurch bleibt $\boldsymbol{k}$ definiert, wegen $\Delta x \cdot \Delta k \approx 1$), aber klein gegen andere Längenskalen (Wellenlänge angelegter Felder, freie Weglänge l). Die Wellenpakete bewegen sich zwischen Stößen auf Trajektorien, die durch die semiklassischen Bewegungsgleichungen gegeben sind:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\hbar}\nabla_k \epsilon(\boldsymbol{k}) \tag{3.1}$$

$$\hbar\dot{\boldsymbol{k}} = -e\left(\boldsymbol{E} + \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}\right) \tag{3.2}$$

Hierbei ist

$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{k})$	die Gruppengeschwindigkeit des Wellenpakets
$-e\left(\boldsymbol{E} + \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}\right) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k})$	die äußere Kraft, die auf das Wellenpaket wirkt

Bemerkung: $\hbar\boldsymbol{k}$ ist der Kristallimpuls, nicht der echte Impuls.

Die Besetzung der Zustände ist gegeben durch die Verteilungsfunktion $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k},t)$, die im (lokalen) Gleichgewicht durch die Fermifunktion gegeben ist:

$$f_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k},t) = \left(\exp\left(\frac{\epsilon(\boldsymbol{k}) - \mu(\boldsymbol{r})}{k_\mathrm{B}T(\boldsymbol{r})}\right) + 1\right)^{-1} \tag{3.3}$$

[2] siehe z.B. Gross & Marx, Kapitel 9, Ashcroft & Mermin Kapitel 12, 13 und 16
[3] Gross & Marx, Abb. 9.2

Hier lassen wir eine räumliche Variation von chemischem Potenzial und Temperatur zu (brauchen wir später für Nichtgleichgewichtsphänomene).

Die Zeitentwicklung der Verteilungsfunktion ist gegeben durch

$$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k},t) = \underbrace{f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k})dt, \boldsymbol{k}-\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k})}{\hbar}dt, t-dt)}_{\text{freie Entwicklung}} + \underbrace{\frac{\partial f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k},t)}{\partial t}dt}_{\text{Stöße}} \tag{3.4}$$

Taylor-Entwicklung für $dt \to 0$ ergibt die Boltzmann-Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\boldsymbol{v}\cdot\nabla_r f - \frac{\boldsymbol{F}}{\hbar}\cdot\nabla_k f + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{Stöße}} \tag{3.5}$$

im stationären Zustand also

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla_r f + \frac{\boldsymbol{F}}{\hbar}\cdot\nabla_k f = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{Stöße}} \tag{3.6}$$

Allgemeiner Ansatz für Stoßprozesse ("Stoßintegrale"):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{Stöße}} = \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\left\{\underbrace{W_{\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}} f(\boldsymbol{k}')[1-f(\boldsymbol{k})]}_{\text{rein}} - \underbrace{W_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} f(\boldsymbol{k})[1-f(\boldsymbol{k}')]}_{\text{raus}}\right\}$$

Die Streuwahrscheinlichkeiten $W_{\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}}$ sind wiederum quantenmechanisch zu bestimmen und können selbst komplizierte Ausdrücke mit weiteren Verteilungsfunktionen (und damit zusätzlichen Integralen) sein, z.B. Elektron-Phonon-Streuung, Elektron-Elektron-Streuung. Wegen der Stoßintegrale ist die Boltzmann-Gleichung eine partielle Integro-Differentialgleichung, die sich nicht allgemein lösen lässt.

Daher werden häufig zwei Näherungen gemacht:

1. Linearisierung für kleine Auslenkungen g aus dem Gleichgewicht:

$$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k},t) = f_0\left(\epsilon(\boldsymbol{k})\right) + g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k},t) \tag{3.7}$$

Einsetzen gibt in niedrigster Ordnung die stationäre Lösung

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla_r g - \frac{e}{\hbar}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\nabla_k g - e\frac{\partial f_0}{\partial\epsilon}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{Stöße}} \tag{3.8}$$

2. Relaxationszeitnäherung Wir schreiben

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{Stöße}} = -\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{raus}} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{rein}} \\ \text{mit } \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{raus}} = \frac{f}{\tau(\boldsymbol{k})} \text{ und } \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{rein}} = \frac{f_0}{\tau(\boldsymbol{k})}\end{gathered} \tag{3.9}$$

Dabei sei $\tau(\boldsymbol{k})$ unabhängig von der tatsächlichen Verteilung. Stöße in der Relaxationszeitnäherung sind "erinnerungslöschend": Unabhängig von ihrem Zustand

vor dem Streuprozess tauchen Elektronen nach dem Streuprozess mit der Gleichgewichtsverteilung wieder auf. Insgesamt ergibt sich:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{Stöße}} = -\frac{f - f_0}{\tau(\boldsymbol{k})} = -\frac{g}{\tau(\boldsymbol{k})} \tag{3.10}$$

Relaxationszeit τ: Exponentielle Relaxation der Verteilungsfunktion zum Gleichgewicht. Mit Linearisierung und Relaxationszeitnäherung erhalten wir

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla_r g - \frac{e}{\hbar}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \nabla_k g - e\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E} = -\frac{g}{\tau(\boldsymbol{k})} \tag{3.11}$$

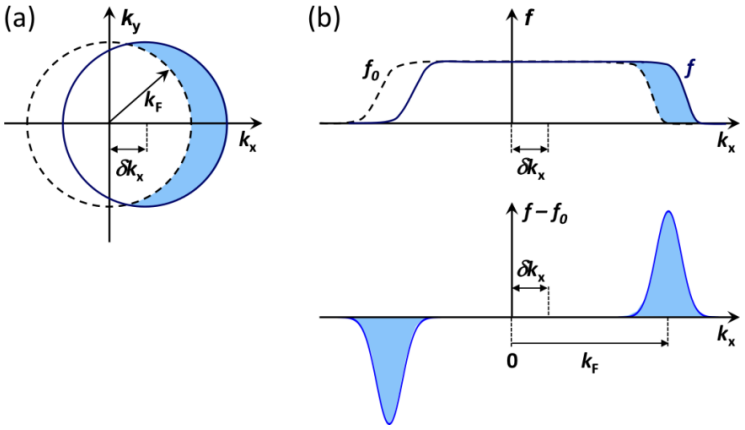
Stationäre, homogene Lösung. Für ein homogenes $\boldsymbol{E}$-Feld und $B = 0$ ist die Lösung gegeben durch

$$g = e\tau(\boldsymbol{k})\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E}. \tag{3.12}$$

Das lässt sich näherungsweise als verschobene Fermikugel

$$f \approx f_0\left(\boldsymbol{k} + \frac{e}{\hbar}\tau(\boldsymbol{k})\boldsymbol{E}\right) \tag{3.13}$$

schreiben. Das ergibt folgendes anschauliches Bild der Nichtgleichgewichtsverteilung:[4]



Die Fermikugel ist um $\delta\boldsymbol{k} = -e\boldsymbol{E}\tau(\boldsymbol{k})/\hbar$ verschoben.

Leitfähigkeit. Die Stromdichte ist gegeben durch

$$\boldsymbol{j} = (-e)2\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \boldsymbol{v}(\boldsymbol{k})g(\boldsymbol{k})d^3k = -e\int \boldsymbol{v}(\boldsymbol{k})g(\boldsymbol{k})\frac{dS_\epsilon}{4\pi^3\hbar|\boldsymbol{v}|}d\epsilon \tag{3.14}$$

wobei S_ϵ eine Fläche im $\boldsymbol{k}$-Raum mit Energie ϵ ist. Einsetzen der stationären, homogenen Lösung von oben gibt

$$\boldsymbol{j} = -e^2\int \tau(\boldsymbol{k})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E})\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}\frac{dS_\epsilon}{4\pi^3\hbar|\boldsymbol{v}|}d\epsilon \tag{3.15}$$

[4] Gross & Marx, Abb. 9.23

Für $k_B T \ll \epsilon_F$ ist $\partial f_0/\partial\epsilon \approx -\delta(\epsilon - \epsilon_F)$, d.h. wir erhalten

$$\boldsymbol{j} = e^2 \int \tau(\boldsymbol{k}) \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}) \frac{dS_F}{4\pi^3\hbar|\boldsymbol{v}|}, \tag{3.16}$$

wobei S_F die Fermifläche bezeichnet. Die Transporteigenschaften hängen also nur von den Elektronen an der Fermifläche ab. Die Leitfähigkeit σ ist definiert durch $\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}$ und ist im Allgemeinen ein Tensor. Wir nehmen der Einfachheit halber ein isotropes System an, dann ist $\tau(\boldsymbol{k}) \equiv \tau$ und σ skalar. Für $\boldsymbol{E} = E\hat{\boldsymbol{x}}$ ist dann $\boldsymbol{j} = j\hat{\boldsymbol{x}}$, und mit

$$\int \tau v_x^2 \frac{dS_F}{4\pi^3\hbar|\boldsymbol{v}|} = \frac{v_F^2\tau}{3} N(\epsilon_F) \tag{3.17}$$

ergibt sich die Einstein-Relation

$$\sigma = N(\epsilon_F) e^2 D \tag{3.18}$$

mit der Diffusionskonstante

$$D = \frac{v_F^2\tau}{3}. \tag{3.19}$$

Die Relaxationszeit τ entspricht an der Fermifläche einer freien Weglänge $l = v_F\tau$, und wir können auch schreiben $D = v_F l/3$.

Vergleich zur Drude-Theorie. In der Drude-Theorie nimmt man an, dass die Elektronen im Mittel über die Zeit τ von der Kraft $-e\boldsymbol{E}$ beschleunigt werden. Dann werden sie in eine beliebige Richtung gestreut und haben nach dem Streuprozess eine Geschwindigkeit mit Mittelwert 0. Das entspricht den "erinnerungslöschenden" Stößen der Relaxationszeitnäherung. Daraus ergibt sich die mittlere Driftgeschwindigkeit $-e\boldsymbol{E}\tau/m$, genau wie bei der verschobenen Fermikugel (siehe oben). Für das freie Elektronengas mit $N(\epsilon_F) = 3n/2\epsilon_F$ und $\epsilon_F = mv_F^2/2$ folgt aus (3.18) das Drude-Resultat $\sigma = ne^2\tau/m$. Allerdings hat (3.18) den Vorteil, dass explizit nur Grössen an der Fermikante vorkommen.

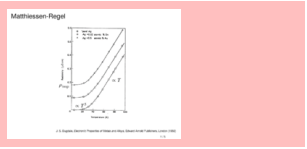
Streuprozesse. In Metallen spielen verschiedene Streuprozesse eine Rolle:

- elastische Streuung an Gitterdefekten (Störstellen τ_{imp}, Versetzungen, Grenzflächen, …). Unabhängig von der Temperatur. Streng genommen kann elastische Streuung nicht in der Relaxationszeitnäherung beschrieben werden, da die vom Feld aufgenommene Energie nicht mehr abgegeben wird (Fermikugel bläht sich auf).
- inelastische Streuung (Elektron-Phonon-Streuung τ_{ep}, Elektron-Elektron-Streuung τ_{ee}, …). temperaturabhängig.

Im Rahmen der Relaxationszeitnäherung kann man Streuraten aufaddieren, d.h.

$$\frac{1}{\tau(\boldsymbol{k})} = \frac{1}{\tau_{imp}(\boldsymbol{k})} + \frac{1}{\tau_{ep}(\boldsymbol{k})} + \cdots \tag{3.20}$$

Wenn außerdem alle Streuraten unabhängig von $\boldsymbol{k}$ sind, gilt die Matthiessen-Regel:



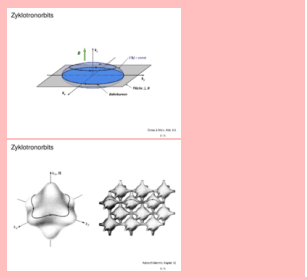
$$\rho = \rho_{\text{imp}} + \rho_{\text{ep}} + \cdots \tag{3.21}$$

Beispiel siehe Folie 1.

3.b Magnetowiderstand und Hall-Effekt

Die semiklassische Bewegungsgleichung für Elektronen im Magnetfeld lässt sich schreiben als

$$\hbar \dot{\boldsymbol{k}} = -\frac{e}{\hbar} \nabla_k \epsilon(\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{B}. \tag{3.22}$$



Die Trajektorien im $\boldsymbol{k}$-Raum sind Schnitte von Ebenen senkrecht zum Magnetfeld mit Flächen konstanter Energie. Dabei entstehen in der Regel geschlossene Bahnen, die mit der Zyklotronfrequenz ω_c durchlaufen werden (siehe Folien 2 und 3).

$$\omega_c = \frac{2\pi e B}{\hbar} \left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \tag{3.23}$$

wobei A die von der Bahn eingeschlossene Fläche im $\boldsymbol{k}$-Raum ist. Für freie Elektronen:

$$\omega_c = \frac{eB}{m} \tag{3.24}$$

Es können aber auch offene Bahnen entstehen. Die Magnetotransporteigenschaften hängen von der Topologie der Fermifläche ab.

Für Transporteigenschaften haben wir jetzt zwei Zeitskalen: Die Zyklotronfrequenz und die Streuzeit. Eine wichtige dimensionslose Kenngröße ist daher $\omega_c \tau$.

- $\omega_c \tau \gg 1$: Hochfeld-Limes
  Elektronen durchlaufen viele Zyklotronorbits, bevor sie streuen
  → Landau-Quantisierung (de Haas-van Alphen, Shubnikov-de Haas)
- $\omega_c \tau \ll 1$: Niedrigfeld-Limes
  Die Orbits werden wegen der häufigen Streuung nur abschnittsweise durchlaufen

Magnetotransport läßt sich unterteilen in Magnetoleitwert und Hall-Leitwert. Für ein Magnetfeld längs der z-Richtung läßt sich der Leitfähigkeitstensor schreiben als:

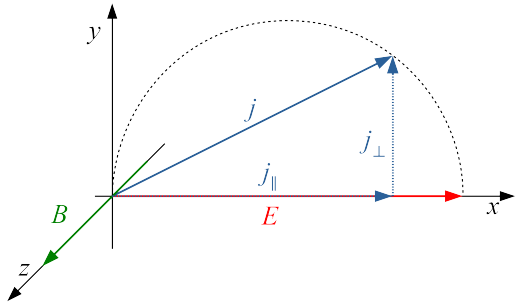
$$\check{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{\text{t}} & \sigma_{\text{H}} & 0 \\ -\sigma_{\text{H}} & \sigma_{\text{t}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\text{l}} \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

Üblicherweise misst man Magnetowiderstand und Hall-Konstante. Der Widerstandstensor ist $\check{\rho} = \check{\sigma}^{-1}$.

- transversaler Magnetowiderstand $\rho_t = \sigma_t/(\sigma_t^2 + \sigma_H^2)$ $(\boldsymbol{j} \perp \boldsymbol{B})$
- longitudinaler Magnetowiderstand $\rho_l = 1/\sigma_l$ $(\boldsymbol{j} \parallel \boldsymbol{B})$
- Hall-Effekt $\rho_H = -\sigma_H/(\sigma_t^2 + \sigma_H^2) = R_H B$

Magnetotransport hängt von der Anzahl der Bänder und Topologie der Fermifläche(n) ab. Einige Fälle können wir qualitativ diskutieren:[5]

1. Für eine einzelne Fermifläche, die nur geschlossene Orbits hat, erhält man dasselbe Resultat wie für das freie Elektronengas:



$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \sigma(B=0) \\ \sigma_t &= \frac{\sigma_0}{1+(\omega_c\tau)^2} \\ \sigma_H &= \frac{\omega_c\tau\sigma_0}{1+(\omega_c\tau)^2} \end{aligned}$$

   $\rho_t = 1/\sigma_0 = \rho_0$, d.h. kein Magnetowiderstand.
   $\rho_H = -\omega_c\tau/\sigma_0$ bzw. $R_H = -1/ne$, d.h. die Hall-Konstante gibt direkt die Elektronenkonzentration.

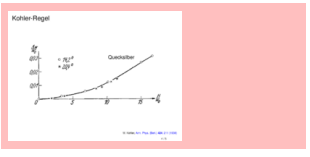
2. Für zwei Bänder: Addition zweier Leitwertbeiträge der Form wie in 1.
   für kleine Felder: $\rho_t/\rho_0 \propto B^2$, $R_H/R_0 \propto B^2$
   für große Felder: meist Sättigung $\rho_t/\rho_0 \to const.$, $R_H \to 1/n_{\text{eff}}e = const.$
   (außer bei kompensierten Materialien)

3. Der semiklassische Magnetowiderstand ist fast immer positiv und sättigt.

4. Bei offenen Orbits oder kompensierten Materialien: keine Sättigung für hohe Felder.

Man kann relativ allgemein zeigen, dass für ein gegebenes Material, Streumechanismus und Geometrie der semiklassische Magnetowiderstand als eine Funktion $\rho(B) = \rho_0 F(\omega_c\tau)$ geschrieben werden kann (Kohler-Regel), meist formuliert als

$$\frac{\rho(B)}{\rho_0} = F\left(\frac{B}{\rho_0}\right). \tag{3.26}$$

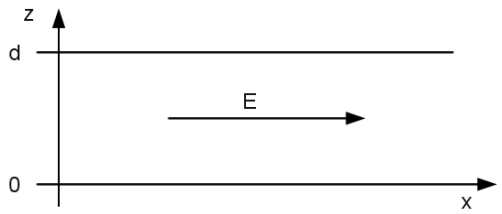


Ein skalierter Plot entsprechend (3.26) kann daher benutzt werden, um zu testen, ob ein experimentell beobachteter Magnetowiderstand semiklassischen Ursprungs ist (siehe Folie 4).

[5] Ausführliche Diskussion z.B. in A. B. Pippard, *Magnetoresistance in Metals*, Cambridge University Press (1989).

3.c Transporteigenschaften dünner Filme (Fuchs-Sondheimer-Modell)

Betrachte einen dünnen Film in der xy-Ebene mit Dicke d in z-Richtung, das Feld liegt in x-Richtung an.[6]



Wir können jetzt kein homogenes System mehr annehmen, d.h., wir brauchen die ortsabhängigen Gradienten:

$$e\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E} = \boldsymbol{v}\cdot\nabla_{\boldsymbol{r}} g + \frac{g}{\tau}$$

speziell für uns

$$e\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}v_x E = v_z\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{g}{\tau}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$g = e\tau\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}v_x E\left(1 + F(\boldsymbol{v})\exp\left(-\frac{z}{v_z\tau}\right)\right)$$

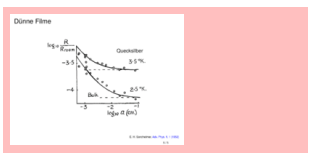
$F(\boldsymbol{v})$ muß aus Randbedingungen berechnet werden. Es gibt zwei einfache Grenzfälle:

1. Spiegelnde Reflexion. $F(\boldsymbol{v}) = 0$, gleiche Lösung wie im homogenen System. Leitwert $\sigma = \sigma_0$
2. Diffuse Reflexion. Stöße an der Oberfläche sind völlig "erinnerungslöschend", Elektronen die von der Oberfläche zurückkommen haben die Gleichgewichtsverteilung, d.h.

   $$g(v_z > 0, z = 0) = g(v_z < 0, z = d) = 0$$

   Nach längerer Rechnung:

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_0\left(1 + \frac{3}{8}\frac{l}{d}\right)^{-1} & \text{für } d \gg l \\ \sigma_0\frac{3}{4}\frac{d}{l}\ln\frac{l}{d} & \text{für } d \ll l \end{cases}$$



Einige Bemerkungen zum Fuchs-Sondheimer-Modell:

[6] siehe E. H. Sondheimer, Adv. Phys. **1**, 1 (1952), Gross Spintronik Kapitel 2.2.6

- Der Leitwert nimmt mit abnehmender Filmdicke ab. Die relevante Längenskala ist die freie Weglänge l (siehe Folie 5).
- Da $\sigma_0 \propto l$, kürzt sich für $d \ll l$ bis auf die logarithmische Korrektur l raus. Dünne Filme verhalten sich also in etwa so wie Volumen-Material mit $l \approx d$. Das passt ganz gut zur experimentellen Beobachtung.
- Das Fuchs-Sondheimer-Modell vernachlässigt Änderungen der freien Weglänge als Funktion der Filmdicke. Oft ist Korngröße ~ Filmdicke, d.h. die Volumeneigenschaften hängen von der Filmdicke ab.
- Für $d \sim \lambda_F$ ist die Voraussetzung für das semiklassiche Modell nicht mehr erfüllt → Quantisierung der Wellenfunktionen senkrecht zum Film.

4 Spinpolarisierter Transport

4.a Einführung

Wir erweitern die Beschreibung der Elektronen um den Spin. Im semiklassischen Bild mit linearisierter Boltzmann-Gleichung heißt das:

Dispersion	$\epsilon_\sigma(\boldsymbol{k})$
Verteilungsfunktionen	$f_\sigma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k}) = f_0(\epsilon_\sigma(\boldsymbol{k})) + g_\sigma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k})$
Streuwahrscheinlichkeiten	$W_{\boldsymbol{k}\sigma,\boldsymbol{k}'\sigma'}$

Häufig sind die spinerhaltenden Streuprozesse $W_{\boldsymbol{k}\sigma,\boldsymbol{k}'\sigma}$ sehr viel wahrscheinlicher als Spinflip-Prozesse $W_{\boldsymbol{k}\sigma,\boldsymbol{k}'\bar{\sigma}}$. Im Rahmen der Relaxationszeitnäherung addieren sich Streuraten mit und ohne Spin-Flip. Die Gesamtstreurate für eine Spinrichtung ist also

Wir schreiben $\bar{\sigma} = -\sigma$

$$\frac{1}{\tau_\sigma} = \frac{1}{\tau_{\sigma\sigma}} + \frac{1}{\tau_{\sigma\bar{\sigma}}} \tag{4.1}$$

Wir bekommen zwei Boltzmann-Gleichungen für die beiden Spins, im einfachsten Fall also

$$e\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}\boldsymbol{v}_\sigma \cdot \boldsymbol{E} = \frac{g_\sigma}{\tau_\sigma}. \tag{4.2}$$

Man unterscheidet beim spinpolarisierten Transport allgemein zwischen *intrinsischen* Effekten (Bandstruktur, z. B. Spinabhängigkeit von $\boldsymbol{v}_\sigma$) und *extrinsischen* Effekten (Streuraten, Spinabhängigkeit von τ_σ).

Spinabhängige Streuprozesse.

Streuung an lokalisierten Momenten

Für die Streuung an lokalisierten Momenten können wir den Hamiltonian

$\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{r}$: Leitungselektron, $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}$: Störstelle

$$\mathcal{H} = -J\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{S}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}) \tag{4.3}$$

betrachten. Die Übergangsraten $W_{\boldsymbol{k}\sigma,\boldsymbol{k}'\sigma'} \propto \langle \boldsymbol{k}\sigma, m_z|\mathcal{H}|\boldsymbol{k}'\sigma', m_z'\rangle$ enthalten auch die Richtungsquantenzahl m_z des lokalisierten Moments. Bei Streuung ist der Gesamtspin erhalten. Es gibt Streuung sowohl mit als auch ohne Spin-Flip des Leitungselektrons.

Spin-Bahn-Streuung

Der Spin-Bahn-Hamiltonian ist gegeben durch

$$\mathcal{H}_{ls} \propto (\nabla_r V(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{\sigma} \underset{\text{Zentralpotenzial}}{\propto} -\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\underbrace{(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})}_{\boldsymbol{l}}\cdot\boldsymbol{\sigma}.$$

Für Leitungselektronen schreibt man den Hamiltonian gerne in der Form

$$\mathcal{H}_{ls} = -\lambda_{ls} \nabla_r V(\boldsymbol{r}) \cdot (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\sigma}) \,.$$

Die Streuraten ergeben sich wie üblich aus Matrixelementen der Form $\langle \boldsymbol{k}\sigma | \mathcal{H}_{ls} | \boldsymbol{k}'\sigma' \rangle$. $\mathcal{H}_{ls}$ führt aufgrund der komplizierten Symmetrie zu einer Reihe von Streumechanismen (Details später).

Elektron-Magnon-Streuung

Magnonen sind die kollektiven Anregungen der Magnetisierung (quantisierte Spinwellen, analog zu Phononen als quantisierte Gitterschwingungen)

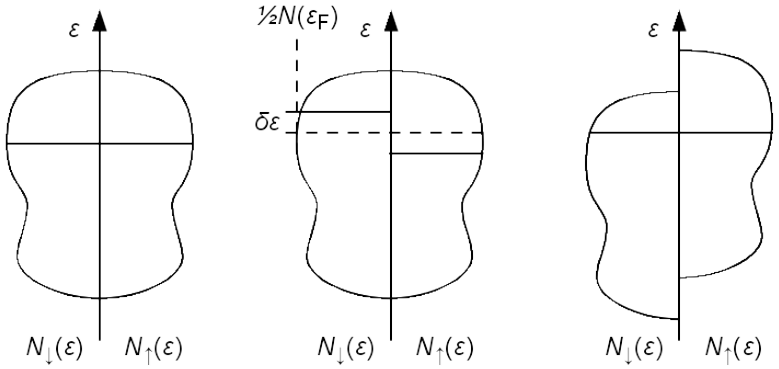
- temperaturabhängig (ähnlich wie Elektron-Phonon).
- Spintransfer zwischen einzelnem Elektron und kollektiver Anregung des Elektronensystems.

4.b Bandmagnetismus in Metallen

Pauli-Paramagnetismus. Bevor wir uns den Ferromagnetismus von Metallen ansehen, betrachten wir den Paramagnetismus Aufgrund des Spins der Leitungselektronen (der orbitale Landau-Diamagnetismus interessiert uns hier nicht).

Entsprechend der spinabhängigen Dispersion $\epsilon_\sigma(\boldsymbol{k})$ ist auch die Zustandsdichte $N_\sigma(\epsilon)$ spinabhängig. Wir überlegen uns die Energiebilanz für eine Umverteilung von Leitungselektronen zwischen den Spins, zunächst für den Fall eines angelegten Magnetfeldes.

Wir schreiben den Spinindex auch als Pfeil, d.h., $\uparrow$ für $\sigma = +1/2$ und $\downarrow$ für $\sigma = -1/2$.



Verschiebung von $\delta n = \frac{1}{2} N(\epsilon_\mathrm{F})\, \delta\epsilon$ Elektronen von $\uparrow$ nach $\downarrow$ führt zu Zuwachs der kinetischen Energie $\Delta E_\mathrm{kin} = \delta n \cdot \delta\epsilon$. Gleichzeitig wird die Zeeman-Energie um $\Delta E_Z = 2\mu_\mathrm{B} B \delta n$ abgesenkt. Gesamtbilanz

$$\Delta E = 2\frac{\delta n^2}{N(\epsilon_\mathrm{F})} - 2\mu_\mathrm{B} B \delta n \tag{4.4}$$

Minimierung ergibt $\delta n = N(\epsilon_F)\,\mu_B B/2$ bzw. das (triviale) Resultat $\delta\epsilon = \mu_B B$. Die Dispersion der Elektronen mit Zeeman-Energie ist

$$\epsilon_\sigma(\boldsymbol{k}) = \epsilon(\boldsymbol{k}) \pm \mu_B B \tag{4.5}$$

Die Umverteilung δn erfolgt also gerade so, dass die Zustände bis zur gleichen Energie gefüllt sind, d.h. das chemische Potenzial $\mu_\uparrow = \mu_\downarrow$ ist ausgeglichen (rechtes Bild, man hätte auch von vornherein soherum argumentieren können). Durch die Umverteilung ergibt sich die Magnetisierung der Leitungselektronen (Pauli-Paramagnetismus)

$$M = \left(n_\downarrow - n_\uparrow\right)\mu_B = 2\mu_B\delta n = N(\epsilon_F)\,\mu_B^2 B \tag{4.6}$$

Typische Größenordnung: $\mu_B B = 58\ \mu\text{eV}$ für $B = 1\ \text{T}$

Stoner-Modell. Beim Stoner-Modell berücksichtigen wir zusätzlich die Austauschwechselwirkung. Für delokalisierte Leitungselektronen nehmen wir an, dass parallele Ausrichtung der Elektronen (antisymmetrische Ortswellenfunktion) die Coulomb-Abstoßung reduziert. Wenn jedes Elektron von allen anderen Elektronen gleichen Spins im Mittel dieselbe Austauschenergie $-2I$ erhält (mit $I > 0$), dann ergibt sich ein Energiebeitrag

$$E_A = -I\left(n_\downarrow^2 + n_\uparrow^2\right) \tag{4.7}$$

Damit ist die Energieänderung durch die Umverteilung

$$\Delta E_A = -2I\delta n^2 \tag{4.8}$$

und insgesamt

$$\Delta E = 2\left(1 - IN(\epsilon_F)\right)\frac{\delta n^2}{N(\epsilon_F)} - 2\mu_B B\delta n \tag{4.9}$$

Daraus folgt

$$\delta n = \frac{N(\epsilon_F)\,\mu_B B}{2\left(1 - IN(\epsilon_F)\right)} \tag{4.10}$$

Die Paulisuszeptibilität ist also um den Faktor $\left(1 - IN(\epsilon_F)\right)^{-1}$ erhöht (Stoner-Faktor). Für

$$IN(\epsilon_F) > 1 \tag{4.11}$$

ergibt (4.9) immer einen Energiegewinn (Stoner-Kriterium). Es kommt zu einer spontanen Spinaufspaltung der Bänder auch ohne angelegtes Magnetfeld (Ferromagnetismus). Wir schreiben die Dispersion als

$$\epsilon_\sigma(\boldsymbol{k}) = \epsilon(\boldsymbol{k}) + \sigma h_{ex} \tag{4.12}$$

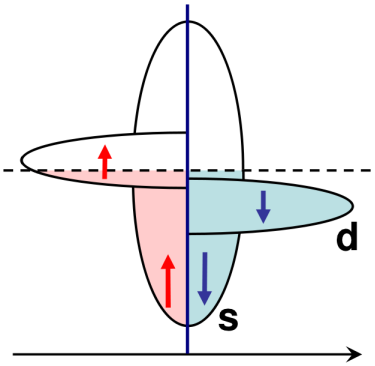
mit dem "Austauschfeld" h_{ex}. Das Stoner-Modell ist ein weiteres Beispiel für eine Molekularfeldtheorie.

Um die Grösse der Spinaufspaltung zu berechnen, müssten wir jetzt Terme höherer Ordnung einführen (z.B. $N(\epsilon)$, I nicht konstant).

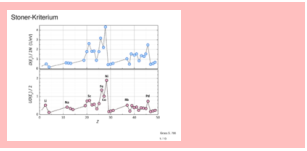
Typische Größenordnung: $h_{ex} \sim 0.5 - 2$ eV für Fe, Co, Ni

Übergangsmetalle. Übergangsmetalle haben teilweise gefüllte d-Schalen, entsprechend tragen sowohl s- als auch d-Elektronen zur chemischen Bindung bzw. zu den Leitungsbändern bei. Die s-Elektronen liegen weit außen und überlappen stark, während die d-Elektronen näher am Ionenrumpf sitzen und schwächer überlappen.

	s	d
Bandbreite	groß	klein
Fermigeschwindigkeit	groß	klein
Zustandsdichte	klein	groß



Wir wollen jetzt das Stonermodell auf eine (etwas) realistischere sd-Bandstruktur für Übergangsmetalle übertragen:

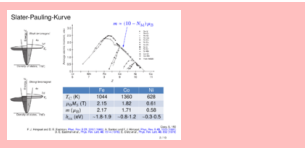


Stonerparameter $\propto N(\epsilon_\mathrm{F})$

Spinaufspaltung deshalb im Wesentlichen für d-Elektronen[7]

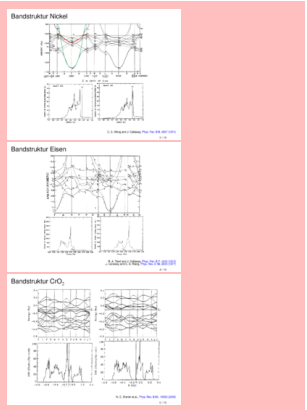
Bei den Übergangsmetallen ist (4.11) nur für Fe, Co und Ni erfüllt (siehe Folie 1).

Nickel: “starker” Ferromagnet, im Majoritätsband d-Elektronen komplett unterhalbe von ϵ_F (auch bei Kobalt). Eisen: “schwacher” Ferromagnet, in beiden Bändern d-Elektronen bei ϵ_F. Die Bezeichnung “stark” bezieht sich hierbei auf die vollständige Besetzung des d-Majoritätsbandes, nicht auf die Größe der Bandaufspaltung. Der “schwache” Ferromagnet Eisen hat z.B. $h_\mathrm{ex} \sim 1.8 - 1.9$ eV, während der “starke” Ferromagnet Nickel $h_\mathrm{ex} \sim 0.3 - 0.5$ eV hat.



Das effektive Moment von Übergangsmetall-Legierungen kann durch die Slater-Pauling-Kurve dargestellt werden (siehe Folie 2). Ein Erfolg des Stoner-Modells ist, die kontinuierliche Variation des effektiven Moments pro Atom beschreiben zu können. Insbesondere ist für starke Ferromagneten das Moment durch die Gesamtanzahl der Löcher im d-Band gegeben.

In Wirklichkeit hybridisieren die s- und d-Bänder (siehe Folien 3 und 4). Trotzdem ist das einfache sd-Modell für viele qualitative Überlegungen nützlich. Insbesondere ist die Annahme einer konstanten Spinaufspaltung der d-Bänder über den gesamten $\boldsymbol{k}$-Raum ziemlich gut erfüllt.

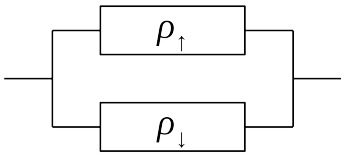


Weiteres Beispiel für Bandstruktur: CrO_2 (Folie 5). Ferromagnetisches Halbmetall, nur ein Spin an der Fermikante. Es gibt verschiedene Materialsysteme, in denen Halbmetalle auftreten. Besonders interessant für Spintronik wegen perfekter Spinpolarisation.

[7] Gross, Spintronik, Abb. 2.2

4.c Transport in Ferromagneten

Zweistrommodell (Mott, 1936). Der Strom ergibt sich als Summe der Ströme für beide Spins: $j = j_\uparrow + j_\downarrow$. Wenn Spinflip-Prozesse selten sind, reagieren beide Spinkanäle unabhängig auf das angelegte Feld. Die Leitfähigkeit ist dann einfach eine Parallelschaltung der beiden Spinkanäle: $\sigma = \sigma_\uparrow + \sigma_\downarrow$. Der Widerstand ist $\rho = \rho_\uparrow \rho_\downarrow / \left(\rho_\uparrow + \rho_\downarrow\right)$, entspechend der folgenden simplen Ersatzschaltung:



Spinpolarisation. Das Zweistrommodell legt nahe, einen dimensionslosen Parameter für die Spin-Asymmetrie des Widerstandes einzuführen. Wir schreiben die Spinpolarisation des Widerstandes als

$$P_\rho = \frac{\rho_\downarrow - \rho_\uparrow}{\rho_\downarrow + \rho_\uparrow}, \tag{4.13}$$

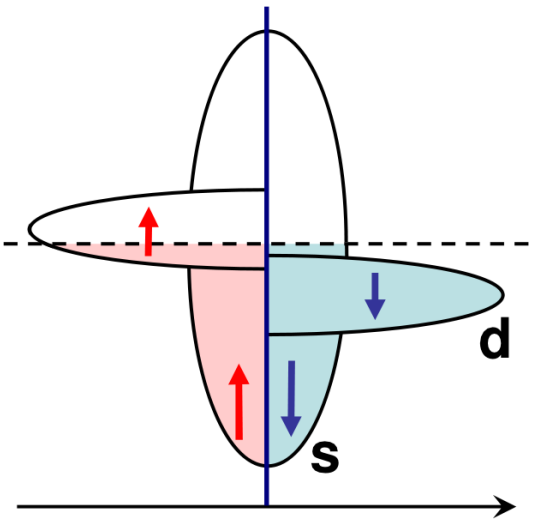
bzw. für eine beliebige Größe X:

$$P_X = \frac{X_\downarrow - X_\uparrow}{X_\downarrow + X_\uparrow}. \tag{4.14}$$

Es gilt $-1 \leq P_X \leq 1$.

Je nach Quelle findet man auch andere Kennzahlen für die Spinabhängigkeit, z.B. $\rho_\uparrow / \rho_\downarrow$. Oft wird der Begriff Spinpolarisation sehr lax verwendet, ohne anzugeben, auf welche Größe er sich bezieht.

Transport im sd-Modell. Im Rahmen des sd-Modells ergibt sich folgendes Bild:



Zwei Sorten Ladungsträger:

s-Elektronen:
geringe Zustandsdichte,
hohe Fermigeschwindigkeit.

d-Elektronen:
hohe Zustandsdichte,
geringe Fermigeschwindigkeit
(quasi-lokalisiert).

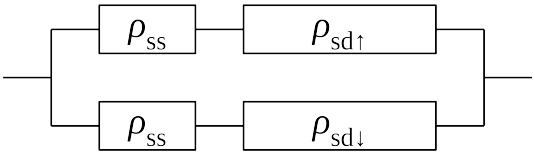
Einfaches Modell: Strom im Wesentlichen von s-Elektronen getragen, d-Elektronen bewirken Interband-Streuuung. Dann können wir annehmen, dass $\epsilon_\uparrow(\boldsymbol{k}) = \epsilon_\downarrow(\boldsymbol{k})$ (s-Bandstruktur), aber $\tau_\uparrow \neq \tau_\downarrow$. Für die Streuraten gilt

$$\frac{1}{\tau_{n\sigma,n'\sigma'}} \propto N_{n'\sigma'}(\epsilon_\mathrm{F}) \tag{4.15}$$

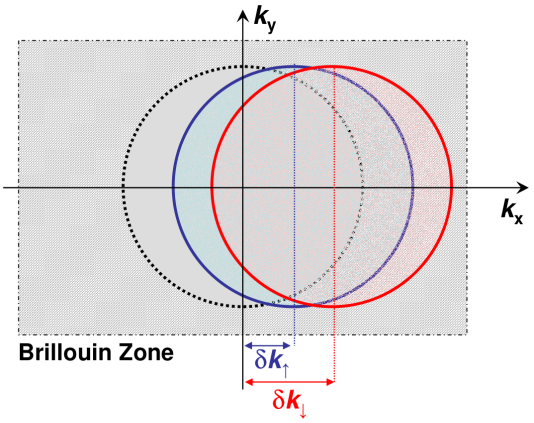
mit dem Bandindex n. Im Rahmen der Relaxationszeitnäherung ergibt sich damit

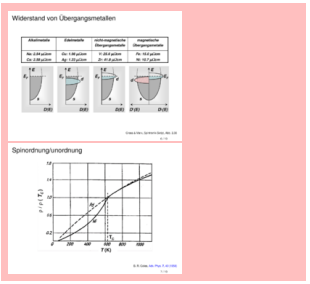
$$\frac{1}{\tau_\sigma} = \frac{1}{\tau_\mathrm{ss}} + \frac{1}{\tau_{\mathrm{sd},\sigma}}. \tag{4.16}$$

Hier ist τ_ss^{-1} die spinunabhängige Intrabandstreuung der s-Elektronen und $\tau_{\mathrm{sd},\sigma}^{-1}$ die spinabhängige sd-Interbandstreuung (Spinflip-Prozesse vernachlässigen wir hier). Entsprechend der Zustandsdichten ist $\tau_{\mathrm{sd},\sigma}^{-1} \gg \tau_\mathrm{ss}^{-1}$. Für den Widerstand ergibt sich folgende einfache Ersatzschaltung:



Die Verteilungsfunktionen sehen dann so aus:[8]





Damit kann man qualitativ die Widerstände von Übergangsmetallen verstehen (siehe Folien 6 und 7).

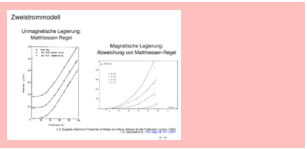
Experimenteller Nachweis für das Zweistrom-Modell: Abweichungen von der Matthiessen-Regel für ferromagnetische Legierungen.[9] Einfaches Beispiel: Störstellen mit $\rho_{0\uparrow} \neq \rho_{0\downarrow}$ plus spinunabhängigem Elektron-Phonon-Widerstand $\rho_\mathrm{ep}(T)$. In diesem Fall ergibt sich

$$\rho(T) = \underbrace{\rho_0 + \rho_\mathrm{ep}(T)}_{\text{Matthiessen}} + \left(\frac{\rho_{0\uparrow} - \rho_{0\downarrow}}{\rho_{0\uparrow} + \rho_{0\downarrow}}\right)^2 \rho_\mathrm{ep}(T)\,, \tag{4.17}$$

[8] Gross, Spintronik, Abb. 2.33

[9] Ausführliche Diskussion z.B. I. A. Campbell and A. Fert, in E. P. Wohlfarth (ed.), *Ferromagnetic Materials*, volume 3, North Holland (1982).

wobei $\rho_0 = \rho_{0\uparrow}\rho_{0\downarrow}/\left(\rho_{0\uparrow} + \rho_{0\downarrow}\right)$. Es gibt einen temperaturabhängigen Zusatzbeitrag durch die Störstellen (siehe Folie 8).



Die Verteilungsfunktionen für Spin hoch und runter haben verschiedenen Schwerpunktsimpuls (siehe Abbildung oben). Das wirft die Frage auf, inwieweit man den Impulsübertrag zwischen den Spinbändern vernachlässigen kann (so wie es die Relaxationszeitnäherung tut). Eine genauere Betrachtung liefert

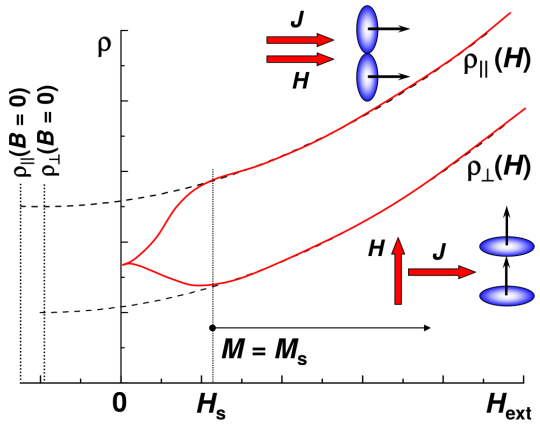
$$\rho = \frac{\rho_\uparrow\rho_\downarrow + \rho_{\uparrow\downarrow}(\rho_\uparrow + \rho_\downarrow)}{\rho_\uparrow + \rho_\downarrow + 4\rho_{\uparrow\downarrow}}$$

mit dem sogenannten Spinmischwiderstand $\rho_{\uparrow\downarrow}$. Auch hier wieder Nachweis durch Abweichungen von der Matthiessen-Regel (diesmal etwas komplizierter in ternären Legierungen).

4.d Magnetotransport in Ferromagneten

Zunächst tritt wegen $\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{H})$ ein "trivialer" Effekt durch das innere Magnetfeld $\boldsymbol{B}_i = \mu_0\boldsymbol{M}$ auf, das den semiklassischen Magnetotransport beeinflusst (genau genommen muß man hier das Entmagnetisierungsfeld mitberücksichtigen). Außerdem unterstützt das Magnetfeld die Spin-Ordnung. Das kann z.B. zu einem negativen Magnetowiderstand führen (sie Folie 9, Magnetowiderstand bei hohen Feldern und hoher Temperatur).

Anisotroper Magnetwiderstand. Aufgrund der Anisotropie der Streuraten findet man eine Abhängigkeit des Magnetwiderstandes von der relativen Orientierung von Strom und Magnetisierung.[10]



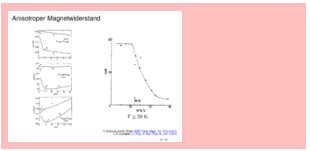
Größe des Effekts: wenige Prozent.

Im Zweistrommodell ermöglicht die Spin-Bahn-Kopplung sd-Streuprozesse mit Spin-Flip. Die Ausrichtung der d-Orbitale (d.h. $\boldsymbol{l}' = \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{k}'$) hängt von der Ausrichtung der Magnetisierung ab (die ja hauptsächlich von den d-Spins gemacht wird).

[10] Gross, Spintronik, Abb. 3.1

Dadurch hängen die Matrixelemente indirekt von der Orientierung zwischen dem $\boldsymbol{k}$-Vektor des einfallenden s-Elektrons (und damit der Richtung des Stroms $\boldsymbol{j}$) und der Magnetisierung ab. Für einen beliebigen Winkel θ zwischen $\boldsymbol{j}$ und $\boldsymbol{M}$ gilt

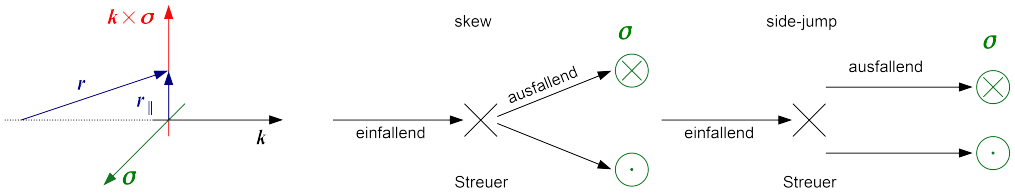
$$\rho = \rho_\perp + \left(\rho_\parallel - \rho_\perp\right) \cos^2 \theta \tag{4.18}$$



Entdeckt: 1857, William Thomson (a.k.a. Lord Kelvin).[11] Benutzt in der ersten Generation magnetoresistiver Leseköpfe für Festplatten (~ 1995). Experimentelles Beispiel: siehe Folie 9.

Anomaler Hall-Effekt. Das innere Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ im Ferromagneten setzt sich aus dem angelegten Feld und der Magnetisierung zusammen: $\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{M} + \boldsymbol{H})$. Dementsprechend erwartet man zunächst eine zusätzliche Hall-Spannung proportional zur Magnetisierung. Tatsächlich sieht man bei Ferromagneten eine starke Änderung des Hall-Widerstandes bei kleinen Feldern.

Vergleich verschiedener Materialien zeigt: So einfach ist es nicht. Der Hall-Widerstand bei kleinen Feldern kann sogar das umgekehrte Vorzeichen haben wie bei hohen Feldern. Ursache sind Skew- und Side-Jump-Streuung: wegen $\mathcal{H}_{ls} = -\alpha_{ls} \boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\sigma})$ ist die Ablenkungen der Elektronen bei der Streuung spinabhängig.

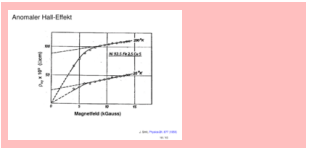


Es ergibt sich

$$\rho_\mathrm{H} = R_0 \mu_0 \boldsymbol{H} + R_\mathrm{A} \mu_0 \boldsymbol{M}(\boldsymbol{H})$$

wobei die anomale Hall-Konstante

$$R_\mathrm{A} = a_\mathrm{Skew} \rho_{xx} + a_\mathrm{Side\text{-}Jump} \rho_{xx}^2$$



ist. Experimentelles Beispiel: siehe Folie 10.

[11] W. Thomson, Proc. R. Soc. Lond. **8**, 546 (1856)

5 Riesenmagnetwiderstand (GMR)

In metallischen Mehrfachschichten mit mindestens zwei ferromagnetischen Lagen hängt der Widerstand von der relativen Ausrichtung der Magnetisierung der magnetischen Schichten ab (parallel, antiparallel, bzw. beliebige Winkel). Dieses Phänomen bezeichnet man als Riesenmagnetwiderstand (giant magnetoresistance, GMR). Es gibt zwei Varianten, bei denen der Strom parallel oder senkrecht zu den magnetischen Schichten fließt (current in plane, CIP, bzw. current perpendicular to plane, CPP). Obwohl die Physik dahinter verschieden ist, werden beide aus historischen Gründen als GMR bezeichnet.[12]

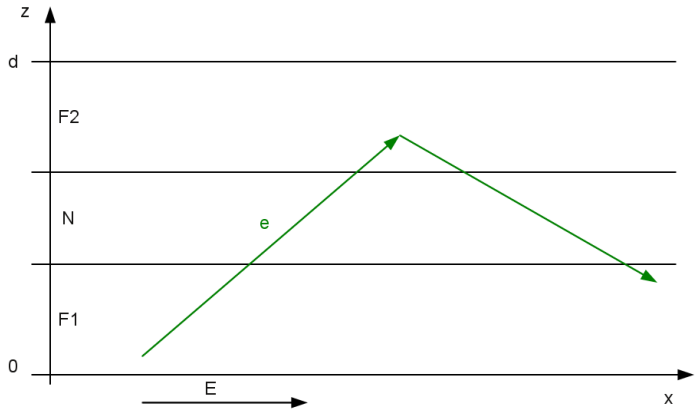
5.a Strom parallel zur Schicht (CIP)

Zunächst beobachtet in magnetischen Vielfachschichten mit antiferromagnetischer Kopplung über nichtmagnetische Zwischenschicht (siehe Folie 1). Magnetfeld bewirkt parallele Ausrichtung. Vermutung: Effekt hängt von relativer Ausrichtung der Magnetisierung ab. Die Größe des Effekts wird häufig durch die dimensionslose Kenngröße

$$MR = \frac{R_{\mathrm{AP}} - R_{\mathrm{P}}}{R_{\mathrm{P}}} \tag{5.1}$$

ausgedrückt, wobei R_{P} bzw. R_{AP} der Widerstand für parallele bzw. antiparallele Ausrichtung ist.

Einfache qualitative Erklärung im Zweistrom-Modell: Für sehr dünne Filme ($d \lesssim l$) durchläuft jedes Elektron alle drei Schichten und mittelt deshalb über die spinabhängigen Streuraten in den Schichten (siehe Schema).



Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass alle drei Schichten gleich dick sind. Außerdem sei die Bandstruktur (s-Elektronen) in allen Filmen gleich ist, und nur die spinabhängigen Streuraten verschieden. Entsprechend können wir für Majoritäts- und Minoritätsspin in den drei Filmen die folgenden Widerstände definieren:

[12] siehe z.B. R. Gross and A. Marx, *Spintronik-Skript*, Kapitel 5, oder X. Zhang and W. Butler, in Y. Xu *et al.* (eds.), *Handbook of Spintronics*, 3–69, Springer Netherlands, Dordrecht (2016)

Majoritätsspin in F:	$\rho_\mathrm{M} = 2\rho_0(1+p)$
Minoritätsspin in F:	$\rho_\mathrm{m} = 2\rho_0(1-p)$
unmagnetische Schicht (pro Spin):	$\rho_\mathrm{u} = 2\rho_0$

Hier mitteln wir die Widerstände, weil wir annehmen, dass jedes einzelne Elektron alle drei Schichten durchläuft. Bei einer klassischen Parallelschaltung der Schichten würde der Effekt verschwinden.

- Parallele Ausrichtung: Hier ist Spin runter in beiden Schichten Majoritätsspin, Spin hoch ist in beiden Schichten Minoritätsspin.

$$\rho_\downarrow = \frac{1}{3}\left(2\rho_\mathrm{M} + \rho_\mathrm{u}\right) = 2\rho_0\left(1 + \frac{2}{3}p\right)$$

$$\rho_\uparrow = \frac{1}{3}\left(2\rho_\mathrm{m} + \rho_\mathrm{u}\right) = 2\rho_0\left(1 - \frac{2}{3}p\right)$$

$$\rho_\mathrm{P} = \frac{\rho_\uparrow\rho_\downarrow}{\rho_\uparrow + \rho_\downarrow} = \rho_0\left(1 - \left(\frac{2}{3}p\right)^2\right)$$

- Antiparallele Ausrichtung: Hier sind Spin hoch und runter jeweils in einer Schicht Majoritätsspin, und in der anderen Schicht Minoritätsspin.

$$\rho_\uparrow = \rho_\downarrow = \frac{1}{3}(\rho_\mathrm{M} + \rho_\mathrm{m} + \rho_\mathrm{u}) = 2\rho_0$$

$$\rho_\mathrm{AP} = \rho_0$$

Wir erhalten

$$GMR = \frac{\rho_\mathrm{AP} - \rho_\mathrm{P}}{\rho_\mathrm{P}} = \frac{\left(\frac{2}{3}p\right)^2}{1 - \left(\frac{2}{3}p\right)^2} \propto p^2$$

Dieses einfache "Toy-Model" liefert einige qualitative Resultate, die (meist) für GMR-Effekte zutreffen:

- ρ hängt von relativer Ausrichtung der Magnetisierung ab. $\rho_\mathrm{P} < \rho_\mathrm{AP}$. Kann auch umgekehrt sein bei FM1 mit $p_1 > 0$, FM2 mit $p_2 < 0$.
- Der Effekt ist quadratisch zur Spinpolarisation (deswegen sind Materialien mit hoher Polarisation interessant).
- Der Effekt wird größer, wenn man den unmagnetischen Beitrag ρ_u kleiner macht.

Einige Aspekte, die das "Toy-Model" nicht erfasst:

- den Effekt durch die spinabhängigen Streuraten nennt man "extrinsischen" GMR. Es gibt auch einen "intrinsischen" GMR durch die Bandstruktur (unterschiedliche Fermi-Geschwindigkeit für beide Spins).[13]

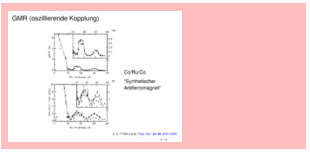
[13] siehe z.B. R. Gross and A. Marx, *Spintronik-Skript*, Abschnitt 5.2.2 & 5.2.3

- Volumenstreuung vs. Grenzflächenstreuung. Beispiel Co/Cu Vielfachschichten: Majoritätsbandstruktur in Kobalt ähnlich wie Kupfer → gute Transmission durch Grenzfläche. Mismatch im Minoritätsband → schlechte Transmission.
- Bandstruktur der Vielfachschichten abhängig von Magnetisierungsausrichtung (im semiklassichen Bild nicht erfasst).
- hier nur parallele oder antiparallele Ausrichtung. Für beliebige Winkel: $MR \propto \cos\theta$.

Bessere Modelle:

- semiklassisch: Fuchs-Sondheimer-Modell erweitern (2 Spins, 3 Schichten, Randbedingungen für Transmission/Reflexion an Grenzflächen).[14] Der Effekt verschwindet, wenn $d \gg l$.
- quantenmechanische Modelle (für realistische Bandstruktureffekte).

Kontrolle der Magnetisierung

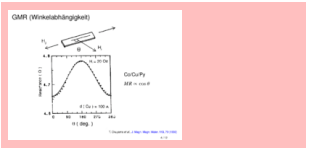


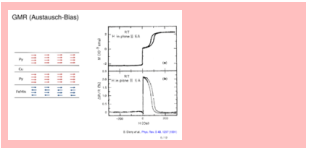
- antiferromagnetische Kopplung: antiparallele Ausrichtung bei $H = 0$, parallele Ausrichtung bei hohem Feld.
  Oszillation der Kopplung als Funktion der Filmdicke (siehe Folie 2).
  Erklärung: Quantisierung der Wellenfunktionen im Schichtpaket.[15]

- unterschiedliche Koerzitivfelder (Beispiel Folie 3)

  Möglichkeiten: unterschiedliche Materialien (z.B. Py/Co), unterschiedliche Filmdicken, unterschiedliche Form (bei lateraler Strukturierung), unterschiedliches Filmwachstum (auf Substrat oder anderem Metallfilm)

  → mehr Kontrolle über Magnetisierung
  z.B. Winkelabhängigkeit messen: Abgrenzung gegen AMR (siehe Folie 4)



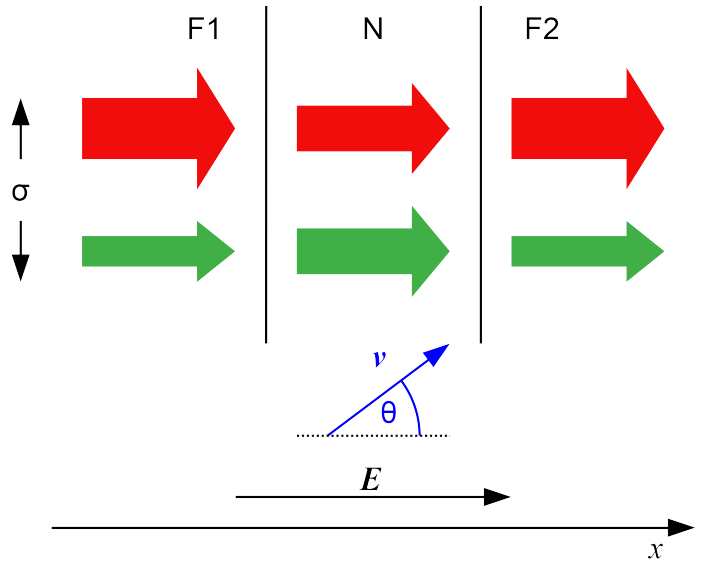


- Austausch-Bias (siehe Folie 5)
  Für technische Anwendung hätte man gerne möglichst große Signaländerung bei kleinen Feldern.
  Austauschkopplung einer Schicht an Antiferromagnet: unidirektionale Anisotropie → Hystereseschleife verschoben zu endlichem Feld.
  "Spin-Ventil"

[14] siehe z.B. R. E. Camley and J. Barnaś, Phys. Rev. Lett. **63**, 664 (1989).
[15] Es gibt auch andere Kopplungsmechanismen, siehe R. Gross and A. Marx, *Spintronik-Skript*, Kapitel 5.1

5.b Strom senkrecht zur Schicht (CPP), Spinakkumulation

Der Strom fließt senkrecht zu den Schichten. Im Gegensatz zur CIP-Geometrie gibt es einen Nettostrom durch die Grenzflächen.



Der Strom muss von spinpolarisiert auf unpolarisiert "umgeladen" werden (über Spinflip-Prozesse). Da Spinflip-Prozesse selten sind, entsteht an der Grenzfläche eine Spinakkumulation.

Valet-Fert Modell.[16] Wir erwarten Spinakkumulation, d.h. einen Unterschied der Elektronenkonzentration der beiden Spinrichtungen, d.h. $n_\downarrow \neq n_\uparrow$. Daher führen wir ein lokales chemisches Potential pro Spin $\mu_\sigma(\boldsymbol{r})$ ein. Dann ist die lokale Gleichgewichtsverteilung für Spin σ gegeben durch:

$$f_\sigma^{(l)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k}) = \left(\exp\left(\frac{\epsilon(\boldsymbol{k}) - \mu_\sigma(\boldsymbol{r})}{k_\mathrm{B}T}\right) + 1\right)^{-1} \tag{5.2}$$

die wir für kleine Auslenkungen $\mu_\sigma(\boldsymbol{r}) = \epsilon_\mathrm{F} + \Delta\mu_\sigma(\boldsymbol{r})$ entwickeln zu

$$f_\sigma^{(l)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k}) = f_0(\epsilon(\boldsymbol{k}), \mu_\sigma(\boldsymbol{r})) \approx f_0(\epsilon(\boldsymbol{k})) + \frac{\partial f_0}{\partial \mu}\Delta\mu_\sigma(\boldsymbol{r}) = f_0(\epsilon(\boldsymbol{k})) - \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}\Delta\mu_\sigma(\boldsymbol{r})$$

Damit können wir für die komplette Verteilungsfunktion schreiben

$$f_\sigma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k}) = f_0(\epsilon(\boldsymbol{k})) - \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}\Delta\mu_\sigma(\boldsymbol{r}) + g_\sigma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k}) \tag{5.3}$$

Der Term mit $\Delta\mu_\sigma(\boldsymbol{r})$ ist isotrop im $\boldsymbol{k}$-Raum ("Aufblähung" bzw. "Schrumpfung" der Fermikugel, entsprechend der Änderung der Elektronenkonzentration). Der Strom ist nach wie vor durch den anistropen Term $g_\sigma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k})$ gegeben.

[16] T. Valet and A. Fert, Phys. Rev. B **48**, 7099 (1993)

Einsetzen in die linearisierte Boltzmann-Gleichung ergibt:

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla_r\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\epsilon}\Delta\mu_\sigma(\boldsymbol{r})+g_\sigma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k})\right)-e\frac{\partial f_0}{\partial\epsilon}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}=\left(\frac{\partial f_\sigma}{\partial t}\right)_{\text{Stöße}} \tag{5.4}$$

Das können wir noch umschreiben (mit $\boldsymbol{E}=-\nabla_r V$) zu

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla_r g_\sigma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k})-\frac{\partial f_0}{\partial\epsilon}\boldsymbol{v}\cdot\nabla_r\underbrace{\left(\mu_\sigma(\boldsymbol{r})-eV(\boldsymbol{r})\right)}_{\tilde{\mu}_\sigma}=\left(\frac{\partial f_\sigma}{\partial t}\right)_{\text{Stöße}}. \tag{5.5}$$

Hier haben wir das elektrochemische Potenzial

$$\tilde{\mu}_\sigma=\mu_\sigma-eV \tag{5.6}$$

eingeführt. Aus der treibenden Kraft $-e\boldsymbol{E}$ ist der Gradient des elektrochemischen Potenzials geworden. Bei der Spinflip-Streuung müssen wir jetzt berücksichtigen, dass sie zu einer Relaxation der Spinakkumulation führt, d.h. wir bekommen

$$\left(\frac{\partial f_\sigma}{\partial t}\right)_{\sigma\bar{\sigma}}=-\frac{g_\sigma}{\tau_{\text{sf}}}+\frac{\partial f_0}{\partial\epsilon}\frac{\mu_\sigma-\mu_{\bar{\sigma}}}{\tau_{\text{sf}}}.$$

Einsetzen und sortieren nach g und μ ergibt

$$\frac{\partial f_0}{\partial\epsilon}\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla_r\tilde{\mu}_\sigma+\frac{\tilde{\mu}_\sigma-\tilde{\mu}_{\bar{\sigma}}}{\tau_{\text{sf}}}\right)=\boldsymbol{v}\cdot\nabla_r g_\sigma+\frac{g_\sigma}{\tau_\sigma}. \tag{5.7}$$

Jetzt betrachten wir speziell die CPP-Geometrie. Der Strom fließt senkrecht durch mehrere Schichten entlang der x-Richtung. Dann ist $\tilde{\mu}_\sigma=\tilde{\mu}_\sigma(x)$ und $g_\sigma=g_\sigma(x,\boldsymbol{v})$. Die Boltzmann-Gleichung ist dann:

$$\frac{\partial f_0}{\partial\epsilon}v_x\frac{\partial\tilde{\mu}_\sigma}{\partial x}+\frac{\tilde{\mu}_\sigma-\tilde{\mu}_{\bar{\sigma}}}{\tau_{\text{sf}}}=v_x\frac{\partial g_\sigma}{\partial x}+\frac{g_\sigma}{\tau_\sigma}$$

Nach längerer Rechnung erhält man zwei gekoppelte Differenzialgleichungen für die elektrochemischen Potenziale $\tilde{\mu}_\uparrow$ und $\tilde{\mu}_\downarrow$:

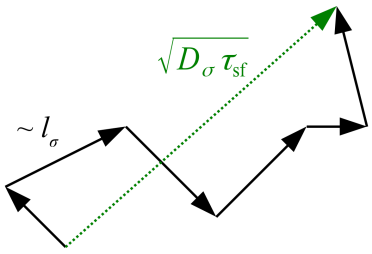
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_\uparrow\tilde{\mu}_\uparrow+\sigma_\downarrow\tilde{\mu}_\downarrow\right)=0 \tag{5.8}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\tilde{\mu}_\uparrow-\tilde{\mu}_\downarrow)=\frac{\tilde{\mu}_\uparrow-\tilde{\mu}_\downarrow}{\lambda_{\text{sf}}^2} \tag{5.9}$$

Zur Lösung nutzt man die Rotationssymmetrie um die x-Achse und entwickelt g_σ in Legendre-Polynome. Außerdem benutzt man $l/\lambda_{\text{sf}}\ll 1$.

Hierbei benutzt

- Spinflips sind selten (das ist die wesentliche Annahme des Modells). Der Zusammenhang zwischen freier Weglänge (spinerhaltende Streuung) und Spindiffusionslänge ist dann durch einen “Random Walk” gegeben:



  wobei $\lambda_\sigma=\sqrt{D_\sigma\tau_{\text{sf}}}$ und $D_\sigma=v_{\text{F}}l_\sigma/3$ ist. Es gilt $l_\sigma\ll\lambda_\sigma$.

- Die Spindiffusionslänge λ_{sf} ist gegeben durch

$$\frac{1}{\lambda_{\mathrm{sf}}^2} = \frac{1}{\lambda_\uparrow^2} + \frac{1}{\lambda_\downarrow^2}.$$

- für den Gesamtstrom $j = j_\uparrow + j_\downarrow$ gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial j}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(j_\uparrow + j_\downarrow) = 0,$$

  wobei

$$j_\sigma = \frac{\sigma_\sigma}{e}\frac{\partial \tilde{\mu}_\sigma}{\partial x}.$$

Gleichung (5.8) drückt das Ohm'sche Gesetz aus, Gleichung (5.9) die Spinrelaxation. Die allgemeine Lösung ist

$$\begin{aligned} \sigma_\uparrow \tilde{\mu}_\uparrow + \sigma_\downarrow \tilde{\mu}_\downarrow &= \alpha + \beta x \\ \tilde{\mu}_\uparrow - \tilde{\mu}_\downarrow &= \gamma \exp\left(\frac{x}{\lambda_{\mathrm{sf}}}\right) + \delta \exp\left(-\frac{x}{\lambda_{\mathrm{sf}}}\right) \end{aligned}$$

Die Koeffizienten α, β, γ und δ müssen wir aus Randbedingungen ermitteln. Für eine ideale Grenzfläche ohne Streuung bei $x = x_0$ gilt

$$j_\sigma(x_0 - 0) - j_\sigma(x_0 + 0) = 0 \tag{5.10}$$
$$\tilde{\mu}_\sigma(x_0 - 0) - \tilde{\mu}_\sigma(x_0 + 0) = 0 \tag{5.11}$$

Dabei drückt (5.10) aus, dass es keine Spin-Flips an der Grenzfläche gibt (einigermaßen realistisch), und (5.11) impliziert keine Barriere an der Grenzfläche (in der Regel zu einfach, wir bleiben aber erst mal dabei). Bevor wir (5.8) und (5.9) auf konkrete Probleme anwenden, betrachten wir noch die Spinrelaxation.

Spin-Relaxation in Metallen (Elliott-Yafet-Mechanismus).[17] Aufgrund der Spin-Bahn-Kopplung sind die Eigenzustände des Gesamt-Hamiltonians keine Spin-Eigenzustände mehr, sondern Superpositionen von Spin-↑ und ↓. Die beiden Kramers-entarteten Zustände sind

$$\psi_+ = \alpha_{\boldsymbol{k}} |\uparrow\rangle + \beta_{\boldsymbol{k}} |\downarrow\rangle \text{ und } \psi_- = \alpha^*_{-\boldsymbol{k}} |\downarrow\rangle + \beta^*_{-\boldsymbol{k}} |\uparrow\rangle$$

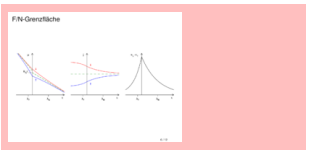
wobei $|\alpha| \gg |\beta|$, d.h. jeder Zustand bekommt eine kleine Beimengung des umgekehrten Spins. Deswegen kann jeder Streuprozess mit Impulsübertrag auch zu Spin-Flip führen, d.h. es gilt $\tau_{\mathrm{sf}}^{-1} = a\tau^{-1}$, wobei $a \ll 1$ vom Material und der Art des Streuprozesses abhängt (z.B. Störstellen, Elektron-Phonon, …). Es gilt $a \propto (\Delta g)^2$, wobei $\Delta g = g - g_0$ die Änderung des g-Faktors durch Spin-Bahn-Kopplung ist. Typische Zahlenwerte[18]

[17] R. J. Elliott, Phys. Rev. **96**, 266 (1954), Y. Yafet, in F. Seitz and D. Turnbull (eds.), *Solid State Physics*, volume 14, 1, Academic Press, New York (1963)

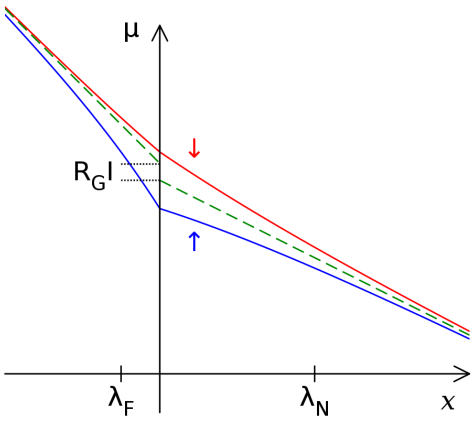
[18] siehe z.B. F. J. Jedema *et al.*, Phys. Rev. B **67**, 085319 (2003), J. Bass and W. P. Pratt, J. Phys.: Condens. Matter **19**, 183201 (2007)

	Al	Cu	Fe, Co, Ni
a	$1 - 5 \cdot 10^{-4}$	$1 - 2 \cdot 10^{-3}$	$1 - 5 \cdot 10^{-2}$
λ_{sf}	1000 nm	500 nm	10 – 50 nm

Mit $\lambda_{\mathrm{sf}} = \sqrt{D\tau_{\mathrm{sf}}}$ folgt $\lambda_{\mathrm{sf}} = l\sqrt{1/3a} \propto 1/\rho$.



Beispiel 1: Einzelne F/N-Grenzfläche. Der einfachste Fall ist eine einzelne Grenzfläche zwischen Ferromagnet und normalem Metall in einem Draht mit Querschnitt A. Wir bekommen folgende Lösung (siehe auch Folie 6):



In beiden Materialien ist dem Ohm'schen Spannungsabfall eine Spinaufspaltung des chemischen Potenzials an der Grenzfläche überlagert. Die Extrapolation des Ohm'schen Verlaufs gibt einen zusätzlichen Grenzflächenwiderstand R_{G} durch Spinakkumulation. Es gilt

$$R_{\mathrm{G}} = \frac{p^2 \mathcal{R}_{\mathrm{N}} \mathcal{R}_{\mathrm{F}}}{(1-p^2)\mathcal{R}_{\mathrm{N}} + \mathcal{R}_{\mathrm{F}}} = \frac{p^2 \mathcal{R}_{\mathrm{N}}}{M+1} \tag{5.12}$$

mit

$$\mathcal{R}_{\mathrm{F}} = \frac{\rho_{\mathrm{F}} \lambda_{\mathrm{F}}}{A} \tag{5.13}$$

$$\mathcal{R}_{\mathrm{N}} = \frac{\rho_{\mathrm{N}} \lambda_{\mathrm{N}}}{A} \tag{5.14}$$

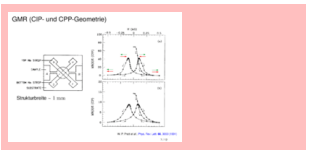
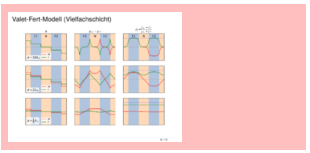
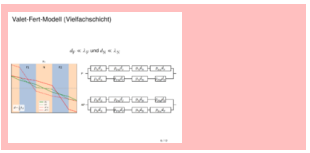
$$M = (1-p^2)\frac{\mathcal{R}_{\mathrm{N}}}{\mathcal{R}_{\mathrm{F}}} \tag{5.15}$$

Hier sind $\rho_{\mathrm{N,F}}$ und $\lambda_{\mathrm{N,F}}$ die jeweiligen Grössen in N und F, $\rho_{\mathrm{F}} = \rho_\uparrow \rho_\downarrow / \left(\rho_\uparrow + \rho_\downarrow\right)$ und $p = (\rho_\downarrow - \rho_\uparrow) / \left(\rho_\uparrow + \rho_\downarrow\right)$. Die Aufspaltung des chemischen Potenzials ist

$$\frac{\Delta\mu}{e} = \frac{2IR_{\mathrm{G}}}{p}. \tag{5.16}$$

Die Spinpolarisation des Stromes durch die Grenzfläche ist

$$p_j\big|_{x=0} = \frac{p}{M+1}. \tag{5.17}$$

Beispiel 2: CPP-GMR. Wir betrachten eine GMR-Vielfachschicht (experimentelles Beispiel siehe Folie 7). Der Mechanismus für den CPP-GMR ist die Überlagerung der Spinakkumulation, die an den F/N-Grenzflächen entsteht (siehe Folie 8): Bei paralleler Ausrichtung heben sich die Beiträge teilweise auf, bei antiparalleler Ausrichtung verstärken sie sich. Dementsprechend ist der Spinakkumulationswiderstand kleiner (parallel) oder größer (antiparallel). Wegen $\lambda_{\mathrm{sf}} \gg l$ bleibt der CPP-GMR auch bei Schichtdicken erhalten, bei denen der CIP-GMR verschwindet.

Für $d_{\mathrm{F}} \ll \lambda_{\mathrm{F}}$ und $d_{\mathrm{N}} \ll \lambda_{\mathrm{N}}$ spielen die Spinflips keine große Rolle mehr, und man kann die Widerstände wieder durch eine Ersatzschaltung im Zweistrommodell ausdrücken (siehe Folie 9).[19] Man erhält

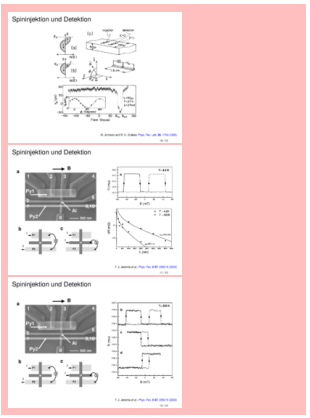
$$R_{\mathrm{AP}} - R_{\mathrm{P}} = \frac{p^2}{1-p^2}\frac{\mathcal{R}_{\mathrm{F}}}{M+1} \tag{5.18}$$

mit

$$\mathcal{R}_{\mathrm{F}} = \frac{\rho_{\mathrm{F}} d_{\mathrm{F}}}{A} \tag{5.19}$$

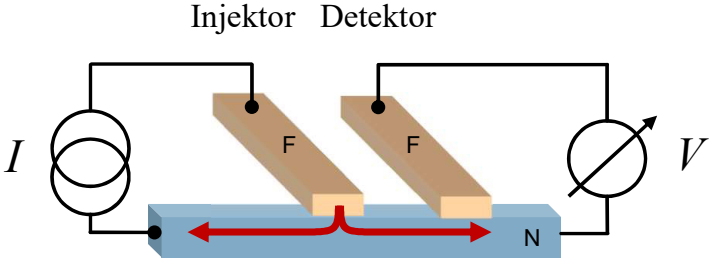
$$\mathcal{R}_{\mathrm{N}} = \frac{\rho_{\mathrm{N}} d_{\mathrm{N}}}{A} \tag{5.20}$$

M ist durch (5.15) gegeben, mit den geänderten Definitionen von $\mathcal{R}_{\mathrm{F}}$ und $\mathcal{R}_{\mathrm{N}}$.



Beispiel 3: Spindiffusion in lateraler Struktur. Wegen $\lambda_{\mathrm{sf}} \sim 1\ \mu\mathrm{m}$ kann man Spininjektion und -diffusion auch bequem in lateralen Strukturen beobachten (siehe Folien 10 bis 12).

Eine beliebte experimentelle Technik ist die nichtlokale Messung:



Man injiziert spinpolarisierten Strom über einen Kontakt. Die Spinakkumulation diffundiert unabhängig vom Ladungsstrom in beide Richtungen (getrieben von $\nabla_r \Delta\tilde{\mu}$). Dann misst man die Spannung über einen Detektorstromkreis außerhalb der Injektorstromkreises. Dadurch eliminiert man den Ohm'schen Spannungsabfall aus der Messung, und misst nur den Beitrag durch Spinakkumulation.

[19] Die Ersatzschaltung ist ähnlich zum "Toy model" des CIP-GMR. Im Gegensatz zum CIP-GMR bildet die Ersatzschaltung hier allerdings tatsächlich den Spannungsabfall über die einzelnen Schichten ab. Oft findet man diese Erklärung des CPP-GMR im Zusammenhang mit dem CIP-GMR, wo sie eigentlich nicht stimmt.

Nichtlokaler Widerstand für die Geometrie im Schema[20]

$$R_{\mathrm{AP}} - R_{\mathrm{P}} \approx 4p^2 \frac{\mathcal{R}_{\mathrm{N}}}{(M+1)^2} \exp\left(-\frac{d_{\mathrm{N}}}{\lambda_{\mathrm{N}}}\right)$$

für $d_{\mathrm{N}} \gg \lambda_{\mathrm{N}}$. Hier sind $\mathcal{R}_{\mathrm{N}}$ und M durch Gleichungen (5.14) und (5.15) gegeben.

Laterale Strukturen erlauben eine direkte Messung von λ_{N} (λ_{F} ist üblicherweise zu klein). Temperaturabhängigkeit entsprechend Elliott-Yafet (siehe Folien).

Bemerkungen.

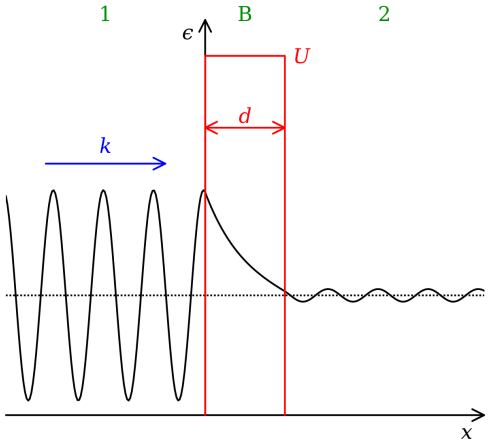
- Spinakkumulation hängt ab von charakteristischen Widerständen $\mathcal{R}$ auf der Längenskala der Filmdicke d (für $d \ll \lambda_{\mathrm{sf}}$) oder der Spindiffusionslänge λ_{sf} (für $d \gg \lambda_{\mathrm{sf}}$).
- selbst für perfekte metallische Grenzflächen ist die Randbedingung (5.11) zu einfach, da es einen mismatch der Bandstrukturen gibt und dadurch einen Grenzflächenwiderstand (in der Regel auch spinabhängig) → kompliziertere Formeln mit Grenzflächenparametern.
- auch der CPP-GMR ist proportional zu p^2.
- meist $\mathcal{R}_{\mathrm{N}} \gg \mathcal{R}_{\mathrm{F}}$, d.h. $M \gg 1$: “resistance mismatch”. Spin-Injektion ist ineffizient in metallischen Kontakten. Insbesondere problematisch für Injektion in Halbleiter. Ausweg: Injektion über Tunnelkontakte (siehe Kapitel 6).
- wegen $\lambda_{\mathrm{sf}} \sim 1\,\mu\mathrm{m}$ kann man Spinströme durch Spinakkumulation in komplexen lateralen Strukturen manipulieren. Insbesondere tritt in der nichtlokalen Geometrie ein “reiner” Spinstrom ohne elektrischen Strom auf, den man für weiterführende Experimente nutzen kann (wegen Mismatch-Problem meist in Experimenten mit Tunnelinjektion, Beispiele siehe Kapitel 6).

[20] S. Takahashi and S. Maekawa, Phys. Rev. B **67**, 052409 (2003)

6 Spinpolarisiertes Tunneln und Tunnelmagnetwiderstand (TMR)[21]

6.a Tunneleffekt

Wir betrachten ein Elektron in einer Dimension mit Energie ϵ und Wellenzahl k, dass auf eine Tunnelbarriere der Höhe $U > \epsilon$ auftrifft.



Für die Wellenfunktion machen wir den Ansatz

$$\Psi_1 = \exp(ikx) + r\exp(-ikx) \tag{6.1}$$
$$\Psi_B = B\exp(\kappa x) + C\exp(-\kappa x) \tag{6.2}$$
$$\Psi_2 = t\exp(ikx) \tag{6.3}$$

mit

$$k^2 = \frac{2m\epsilon}{\hbar^2} \quad \text{und} \quad \kappa^2 = 2m\frac{(U-\epsilon)}{\hbar^2}$$

Wir erhalten für die Transmissions- und Reflexionswahrscheinlichkeit

$$T = |t|^2 = \left(1 + \frac{(k^2+\kappa^2)^2}{4k^2\kappa^2}\sinh^2(\kappa d)\right)^{-1} \approx \left(\frac{4k\kappa}{k^2+\kappa^2}\right)^2 \exp(-2\kappa d) \tag{6.4}$$
$$R = |r|^2 = 1 - T \tag{6.5}$$

Für das dreidimensionale Problem hängt κ vom Einfallswinkel ab (bei schrägem Einfall ist die Barriere effektiv dicker). Es dominiert Tunneln von Elektronen senkrecht zur Barriere (Tunnelkegel). In diffusiven Strukturen ($\boldsymbol{k}$ keine gute Quantenzahl) ignoriert man meist die $\boldsymbol{k}$-Abhängigkeit und nimmt Tunnelraten unabhängig von $\boldsymbol{k}$ an.

[21] Übersichtsartikel: J. S. Moodera *et al.*, Physics Today **63**, 46 (2010), G.-X. Miao *et al.*, Rep. Prog. Phys. **74**, 036501 (2011).

Typische Zahlenwerte: $U - \epsilon = 1$ eV, $d = 1$ nm $\rightarrow \kappa^{-1} \approx 2$ Å, $T \approx 10^{-5}$.

Für den Gesamtstrom summiert man über alle $\boldsymbol{k}$ und schreibt die Summe in ein Integral über Energien um. Im Rahmen des Zweistrommodells ergibt sich

$$I(V) = I_\uparrow(V) + I_\downarrow(V) \tag{6.6}$$

mit

$$I_\sigma(V) = \frac{e}{h} \int_{-\infty}^{\infty} |t_\sigma(\epsilon, V)|^2 \cdot N_{1\sigma}(\epsilon - eV) \cdot N_{2\sigma}(\epsilon) \cdot \big(f(\epsilon) - f(\epsilon - eV)\big)\, d\epsilon \tag{6.7}$$

wobei wir hier nur Transmission ohne Spinflip berücksichtigen. An Tunnelkontakte kann man Spannungen von einigen Volt anlegen. Dementsprechend muss man die Energieabhängigkeit der Zustandsdichten berücksichtigen. Außerdem verändert die Spannung auch die Form der Tunnelbarriere, dementsprechend ist auch die Transmissionswahrscheinlichkeit spannungsabhängig. Bei endlicher Spannung ist $I(V)$ nichtlinear, und man misst oft den differenziellen Leitwert

$$g(V) = \frac{dI}{dV}. \tag{6.8}$$

Der Tunnelleitwert hängt von den Zustandsdichten der beiden Materialen ab, dementsprechend ist Tunnelspektroskopie eine Standardmethode zur Bestimmung von Zustandsdichten.

Im Folgenden betrachten wir Tunnelkontakte mit verschiedenen Materialkombinationen. Wir schreiben N für normale Metalle, F für Ferromagneten und I für die isolierende Tunnelbarriere. Für einen Tunnelkontakt zwischen normalen Metallen (NIN) gilt für $eV \ll U$ und $k_\mathrm{B}T \ll U$

$$\begin{aligned} I(V) &\approx \frac{2e}{h} |t(\epsilon_\mathrm{F}, V = 0)|^2 N_1(\epsilon_\mathrm{F}) N_2(\epsilon_\mathrm{F}) \int_{-\infty}^{\infty} \big(f(\epsilon) - f(\epsilon - eV)\big)\, d\epsilon \\ &= \underbrace{\frac{2e^2}{h} |t|^2 N_1 N_2}_{G} \cdot V \end{aligned} \tag{6.9}$$

Für kleine Spannungen ist die Kennlinie linear, und wir können einen Tunnelleitwert

$$G = \lim_{V \to 0} g(V) \tag{6.10}$$

definieren.

6.b Spinpolarisiertes Tunneln

Analog zum NIN-Kontakt können wir für einen FIN-Kontakt schreiben

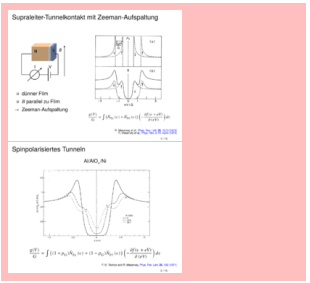
$$G = \frac{e^2}{h} \left(|t_\downarrow|^2 N_{1\downarrow} + |t_\uparrow|^2 N_{1\uparrow} \right) N_2 = G_\downarrow + G_\uparrow. \tag{6.11}$$

Wir können die Spinpolarisation des Tunnelleitwertes definieren als

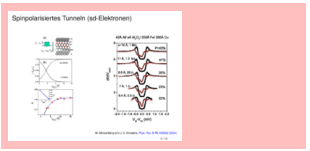
$$p_G = \frac{G_\downarrow - G_\uparrow}{G_\downarrow + G_\uparrow} = \frac{|t_\downarrow|^2 N_{1\downarrow} - |t_\uparrow|^2 N_{1\uparrow}}{|t_\downarrow|^2 N_{1\downarrow} + |t_\uparrow|^2 N_{1\uparrow}}. \tag{6.12}$$

p_G hängt sowohl von Volumeneigenschaften (Zustandsdichte) als auch von Grenzflächeneigenschaften (Transmissionswahrscheinlichkeit) ab. Anfangs hat man versucht, spinpolarisiertes Tunneln hauptsächlich aufgrund der Volumeneigenschaften des Ferromagneten zu erklären.

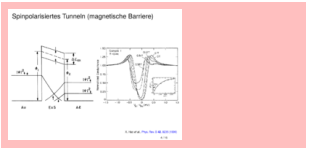
Beispiel 1: Spinpolarisiertes Tunneln in Supraleiter/Ferromagnet-Kontakten (Tedrow & Meservey, 1971).[22] Die Zustandsdichte in Supraleitern hat eine Energielücke und "Kohärenzpeaks". Bei dünnen Filmen mit schwacher Spin-Bahn-Kopplung (z.B. Aluminium) kommt es im Magnetfeld zur Zeemanaufspaltung der Zustandsdichte, dadurch kann man die beiden Spinkanäle beim Tunneln unterscheiden (siehe Folie 1). In Tunnelkontakten zwischen Ferromagneten und Supraleitern kann man daher die Spinpolarisation p_G messen (sowohl Betrag als auch Vorzeichen). Beispiel siehe Folie 2.



Man beobachtet im Experiment üblicherweise positive Spinpolarisation $p_G \sim 10-40\%$, obwohl die Zustandsdichte in starken Ferromagneten negative Polarisation hat. Interpretation: Die Eindringtiefe κ^{-1} ist für die delokalisierten s-Elektronen größer als für die quasi-lokalisierten d-Elektronen. Daher dominiert das Tunneln der s-Elektronen im Majoritätsband. Experiment: siehe Folie 3. Siehe auch mikroskopisches Modell zum TMR auf Folie 16.



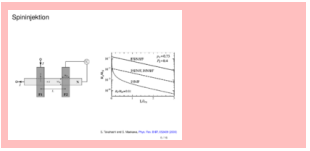
Beispiel 2: Ferromagnetische Barriere. Da die Spinpolarisation des Tunnelleitwertes von der Barriere abhängt, kann man auch eine ferromagnetische Barriere verwenden. Hier führt die Austauschaufspaltung zu einer unterschiedlichen Barrierenhöhe für die beiden Spins. Entsprechend ist auch κ bzw. t spinabhängig ("Spinfilterbarriere"). Klassische Beispiele sind EuS und EuO (siehe Folie 4). Potenziell Spinpolarisation nahe 100% möglich. Problem: Meist nur sehr kleiner Effekt bei Raumtemperatur bzw. Curie-Temperatur unter Raumtemperatur (EuS z.B. ca. 16 K).



Beispiel 3: Spininjektion.[23] Auch spinpolarisiertes Tunneln führt zur Spininjektion. Dafür müssen wir die Randbedingung (5.11) des Valet-Fert-Modells um den Tunnelwiderstand erweitern:

$$\tilde{\mu}_\sigma(x_0 - 0) - \tilde{\mu}_\sigma(x_0 + 0) \quad = \quad e j_\sigma A R_\sigma. \tag{6.13}$$

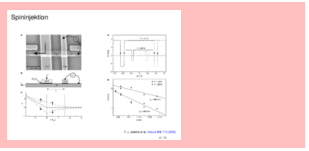
Für Tunnelkontakte gilt $R_\sigma = G_\sigma^{-1} \gg \mathcal{R}_{\mathrm{N/F}}$, es gibt keinen resistance mismatch (siehe Vergleich auf Folie 5). Für den nichtlokalen Widerstand erhält man



[22] Erstes Experiment: P. M. Tedrow and R. Meservey, Phys. Rev. Lett. **26**, 192 (1971); Übersichtsartikel: R. Meservey and P. M. Tedrow, Phys. Rep. **238**, 173 (1994).

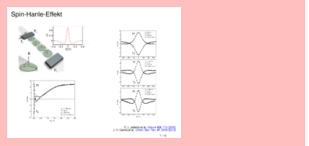
[23] M. Johnson and R. H. Silsbee, Phys. Rev. Lett. **55**, 1790 (1985), F. J. Jedema *et al.*, Nature **416**, 713 (2002)

$$R_{\mathrm{AP}} - R_{\mathrm{P}} = p_G^2 \mathcal{R}_{\mathrm{N}} \exp(-d_{\mathrm{N}}/\lambda_{\mathrm{N}})$$

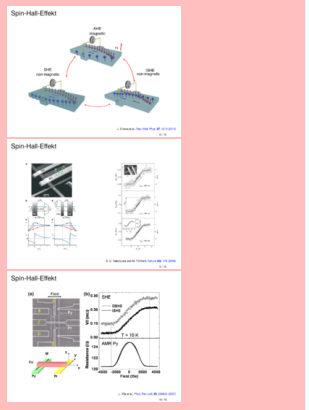


Experimentelles Beispiel: siehe Folie 6. Die effiziente Erzeugung reiner Spinströme über Tunnelinjektion erleichtert weiterführende Experimente, siehe folgende Beispiele.

Beispiel 4: Spin-Hanle-Effekt. Spinakkumulation ist parallel zu Injektormagnetisierung (in der Substratebene). Senkrechtes Magnetfeld $B_\perp$: Spins präzedieren mit $\omega = g\mu_{\mathrm{B}} B_\perp/\hbar$ in der Ebene, d.h. sie rotieren von parallel zu antiparallel und wieder zurück. Bei ballistischem Transport mit fester Flugzeit L/v_{F} vom Injektor zum Detektor würde man eine periodische Oszillation zwischen R_{P} und R_{AP} erwarten. Durch die diffusive Bewegung gibt es eine breite Verteilung von Ankunftszeiten am Detektor um die typische Zeit $t = D^2/L$ herum. Entsprechend sieht man eine gedämpfte Oszillation. Bei großem $B_\perp \sim \mu_0 M_{\mathrm{S}}$ rotiert die Magnetisierung (und damit die Spinakkumulation) aus der Ebene, und man bekommt wieder R_{P} (siehe Folie 7).



Beispiel 5: Spin-Hall-Effekt.[24] Beim anomalen Hall-Effekt in Ferromagneten (Kapitel 4.d) hatten wir gesehen, dass Spin-Bahn-Streuung zu einer spinabhängigen Ablenkung der Elektronen senkrecht zur Magnetisierung führt. Das gleiche passiert auch für die Nichtgleichgewichtsmagnetisierung bei Spininjektion. Dabei gibt es zwei zueinander reziproke Effekte: Ein Ladungsstrom erzeugt einen transversalen Spinstrom (Spin-Hall-Effekt, SHE), oder ein Spinstrom erzeugt einen transversalen Ladungsstrom (inverser Spin-Hall-Effekt, ISHE). Die Kopplung der transversalen Spin- und Ladungsströme $\boldsymbol{j}_s$ und $\boldsymbol{j}_c$ kann durch



$$\begin{aligned} \boldsymbol{j}_s &= \alpha_{\mathrm{SH}} \frac{\hbar}{2e} \boldsymbol{j}_c \times \boldsymbol{\sigma} \quad \text{(SHE)} \\ \boldsymbol{j}_c &= \alpha_{\mathrm{SH}} \frac{2e}{\hbar} \boldsymbol{j}_s \times \boldsymbol{\sigma} \quad \text{(ISHE)} \end{aligned}$$

ausgedrückt werden, wobei $\boldsymbol{\sigma}$ die Spinrichtung angibt und α_{SH} der Spin-Hall-Winkel ist. Auch hier gibt es wieder intrinsische Beiträge (Bandstruktur) und extrinsische Beiträge (skew- und side-jump-Streuung). Entsprechend variieren die Zahlenwerte (typisch: Al $\alpha_{\mathrm{SH}} \sim 0.02\%$, Pt $\alpha_{\mathrm{SH}} \sim 1 - 10\%$). Experimente siehe Folien 9 und 10. Der Spin-Hall-Effekt erlaubt die Erzeugung und Detektion reiner Spinströme ohne magnetische Materialen.

[24] Übersichtsartikel J. Sinova *et al.*, Rev. Mod. Phys. **87**, 1213 (2015)

6.c Tunnelmagnetwiderstand (TMR)

Wir betrachten jetzt einen Tunnelkontakt zwischen zwei Ferromagneten. Wir unterscheiden zwischen paralleler und antiparalleler Magnetisierung.

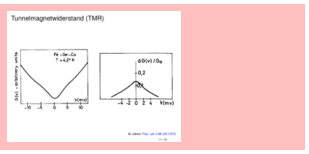
$$G_{\mathrm{P}} = \frac{e^2}{h}\left(|t_{++}|^2 N_{1+}N_{2+} + |t_{--}|^2 N_{1-}N_{2-}\right) = G_{++} + G_{--} \tag{6.14}$$

$$G_{\mathrm{AP}} = \frac{e^2}{h}\left(|t_{+-}|^2 N_{1+}N_{2-} + |t_{-+}|^2 N_{1-}N_{2+}\right) = G_{+-} + G_{-+} \tag{6.15}$$

Hier steht + für Majorität und − für Minorität. Man definiert den TMR wieder als[25]

$$TMR = \frac{R_{\mathrm{AP}} - R_{\mathrm{P}}}{R_{\mathrm{P}}} = \frac{G_{\mathrm{P}} - G_{\mathrm{AP}}}{G_{\mathrm{AP}}}. \tag{6.16}$$

Analog zum GMR gibt es für beliebige Winkel θ zwischen den Magnetisierungen wieder eine Abhängigkeit von $\cos\theta$.



Der TMR wurde 1975 entdeckt (bei Helium-Temperatur, siehe Folie 11), und dann im Wesentlichen wieder vergessen (zunächst nur sehr kleine Effekte bei Raumtemperatur). Auch hier hat man anfangs ein einfaches Modell auf der Basis der Spinpolarisation der Ferromagneten gemacht (Julliere-Modell). Mit der Annahme einer spinunabhängigen Tunnelwahrscheinlichkeit und einer spinpolarisierten Zustandsdichte $N_{\pm} = N(1 \pm p)$ ist

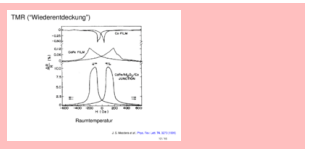
$$G_{\mathrm{P}} = \frac{e^2}{h}|t|^2 N^2\left((1+p)(1+p) + (1-p)(1-p)\right) = \frac{2e^2}{h}|t|^2 N^2(1+p^2)$$

$$G_{\mathrm{AP}} = \frac{e^2}{h}|t|^2 N^2\left((1+p)(1-p) + (1-p)(1+p)\right) = \frac{2e^2}{h}|t|^2 N^2(1-p^2)$$

und damit[26]

$$TMR = \frac{2p^2}{1-p^2}.$$

Wir werden sehen, dass das Julliere-Modell zu einfach ist.



Beispiel 1: TMR bei Raumtemperatur. Nach der Entdeckung des GMR hat man sich auch wieder für den TMR interessiert. 1995 wurden erstmals große Effekte auch bei Raumtemperatur gemessen[27] (siehe Folie 12). Aufgrund der exponenziellen Abhängigkeit der Tunnelraten von den Eindringtiefen kann der TMR sehr groß werden. Entsprechend hat sich die Forschung seither stark vom GMR zum TMR verlagert.

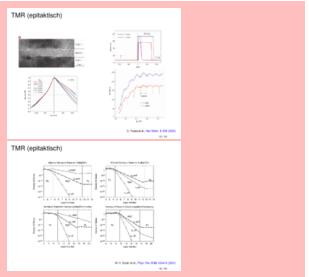
[25] In der Literatur findet man verschiedene Definitionen des TMR mit R_{P} oder R_{AP} im Nenner. Da meist $R_{\mathrm{P}} < R_{\mathrm{AP}}$, gibt die Definitionen hier größere Werte (oft weit über 100%).

[26] M. Julliere, Phys. Lett. A **54**, 225 (1975); Julliere hat den TMR mit G_{P} im Nenner definiert, dann ergibt sich $2p^2/\left(1+p^2\right)$.

[27] T. Miyazaki and N. Tezuka, J. Magn. Magn. Mater. **139**, L231 (1995), J. S. Moodera *et al.*, Phys. Rev. Lett. **74**, 3273 (1995)

Beispiel 2: Abhängigkeit von Barrierenmaterial. Folie 14 zeigt ein Beispiel für die Abhängigkeit des TMR vom Barrierenmaterial für die gleiche Kombination von Ferromagneten (Co und $La_{0.7}Sr_{0.3}MnO_3$). Barrieren: Al_2O_3, $SrTiO_3$, $Ce_{0.69}La_{0.31}O_{1.845}$. Grösse und Vorzeichen des TMR hängen von der Barriere ab. Das zeigt, dass das Julliere-Modell mit seiner Erklärung auf der Basis von Volumeneigenschaften unzureichend ist. Entscheidend sind die evaneszenten Wellenfunktionen in der Barriere.

Beispiel 3: Epitaktische Kontakte. In heteroepitaktischen TMR-Strukturen gibt es eine kohärente Bandstruktur von Ferromagneten und Barriere. Die Spinzustände werden entsprechend der Symmetrie der orbitalen Zustände gefiltert (siehe Folien 15 und 16). Es sind sehr grosse Werte für den TMR möglich. Außerdem kann man Interferenzeffekte als Funktion der Schichtdicke beobachten.



7 Spin Torque

Wir haben bisher die Magnetisierung als vorgegeben betrachtet (z.B. durch Formanisotropie fixiert), und die Auswirkung der Magnetisierung auf den Stromtransport betrachtet. Tatsächlich bedeutet Magnetisierung auch Drehimpuls, und ein Spinstrom ist ein Drehimpulsstrom. Drehimpuls ist wiederum eine Erhaltungsgröße. Der Strom wirkt daher auch auf die Magnetisierung.[28]

Der Spinstrom ist im Allgemeinen eine Tensorgröße. Für ein einzelnes Elektron gilt

Hier ist $\otimes$ das dyadische Produkt

$$I_s = \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{s} \tag{7.1}$$

Quantenmechanisch gilt

$$j_s = \frac{\hbar^2}{2m} \Im \left(\psi^* \boldsymbol{\sigma} \otimes \nabla \psi \right) \tag{7.2}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

ist der Vektor der Paulimatrizen

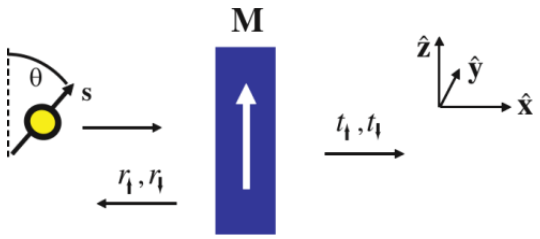
Wir betrachten jetzt ein einzelnes Elektron in einer (Orts-) Dimension (ohne Normierung):

$$\psi = e^{ikx} \left(a \left| \uparrow \right\rangle + b \left| \downarrow \right\rangle \right) \tag{7.3}$$

Die drei Komponenten des Spinstroms sind dann

$$\boldsymbol{j}_x = \begin{pmatrix} j_{xx} \\ j_{xy} \\ j_{xz} \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2 k}{2m} \begin{pmatrix} 2\Re \left(ab^* \right) \\ 2\Im \left(ab^* \right) \\ |a|^2 - |b|^2 \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

Wir betrachten jetzt ein einfaches Modell mit einer spinabhängigen Barriere (analog zu unserem einfachen Tunnelmodell aus Kapitel 6), allerdings lassen wir nichtkollineare Ausrichtung von Elektronenspin und Magnetisierung zu, mit einem Verkippungswinkel θ (hier in der xz-Ebene).



Die einfallenden, transmittierten und reflektierten Wellenfunktionen sind dann

$$\psi_{\mathrm{i}} = e^{ikx} \left(\cos \frac{\theta}{2} \left| \uparrow \right\rangle + \sin \frac{\theta}{2} \left| \downarrow \right\rangle \right) \tag{7.5}$$

$$\psi_{\mathrm{t}} = e^{ikx} \left(t_\uparrow \cos \frac{\theta}{2} \left| \uparrow \right\rangle + t_\downarrow \sin \frac{\theta}{2} \left| \downarrow \right\rangle \right) \tag{7.6}$$

$$\psi_{\mathrm{r}} = e^{-ikx} \left(r_\uparrow \cos \frac{\theta}{2} \left| \uparrow \right\rangle + r_\downarrow \sin \frac{\theta}{2} \left| \downarrow \right\rangle \right) \tag{7.7}$$

[28] Erste Vorhersagen: J. C. Slonczewski, J. Magn. Magn. Mater. **159**, L1 (1996), L. Berger, Phys. Rev. B **54**, 9353 (1996); Übersichtsartikel z.B.: D. C. Ralph and M. D. Stiles, J. Magn. Magn. Mater. **320**, 1190 (2008), A. Brataas *et al.*, Nat. Mater. **11**, 372 (2012).

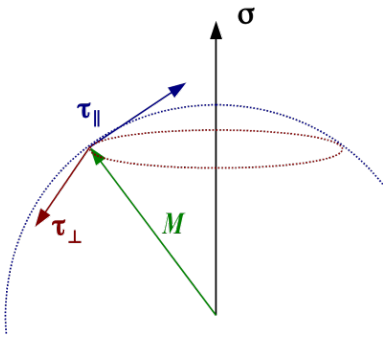
Die Bilanz der Spinströme ergibt das Drehmoment, das auf die Magnetisierung wirkt (Spin Torque)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &\propto \boldsymbol{j}_\mathrm{i} + \boldsymbol{j}_\mathrm{r} - \boldsymbol{j}_\mathrm{t} \\ &\propto \hat{\boldsymbol{x}} \sin\theta \Re\left(1 - t_\uparrow t_\downarrow^* - r_\uparrow r_\downarrow^*\right) \\ &+ \hat{\boldsymbol{y}} \sin\theta \Im\left(1 - t_\uparrow t_\downarrow^* - r_\uparrow r_\downarrow^*\right)\end{aligned} \tag{7.8}$$

Aus dieser Formel können wir einige allgemeine Eigenschaften ablesen

- Ohne Spinfilterung ($t_\uparrow = t_\downarrow$) ist $\boldsymbol{\tau} = 0$.
- Wenn Spin und Magnetisierung kollinear sind (parallel oder antiparallel), ist $\boldsymbol{\tau} = 0$.
- $\boldsymbol{\tau} \perp \boldsymbol{M}$, d.h. $|\boldsymbol{M}|$ ändert sich nicht.

Für realistische dreidimensionale Systeme muss man über alle Elektronen summieren. Außerdem kann der Spin in einer beliebigen Ebene zur Magnetisierung verkippt sein. Man definiert dann einen Spinmischleitwert $G_{\uparrow\downarrow}$, so dass gilt



$$\tau_\parallel \propto \Re G_{\uparrow\downarrow} \tag{7.9}$$
$$\tau_\perp \propto \Im G_{\uparrow\downarrow} \tag{7.10}$$

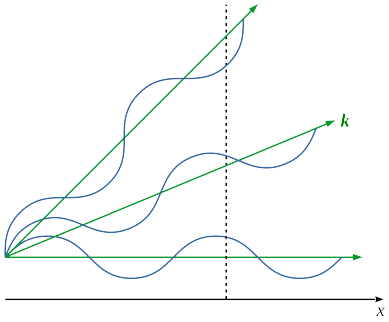
wobei sich parallel und senkrecht auf die Verkippungsebene des Spins beziehen. Das Drehmoment ist außerdem proportional zum Strom I durch die Struktur.

Vergleich mit der Landau-Lifshitz-Gleichung (2.55) zeigt, dass $\tau_\parallel$ analog zu einem Dämpfungsterm und $\tau_\perp$ analog zu einem Magnetfeld wirkt (beides allerdings mit beliebigem Vorzeichen abhängig von $G_{\uparrow\downarrow}$ und I).

Spin Torque in metallischen Strukturen. Wir betrachten jetzt eine einfache N/F-Struktur, mit derselben einfallenden Welle ψ_i aus dem normalen Metall. Für die transmittierte Spinstromdichte beachten wir jetzt allerdings die Spinaufspaltung der Bänder im Ferromagnet, d.h. wir haben $k_\uparrow \neq k_\downarrow$. Für die Stromdichten gilt dann qualitativ

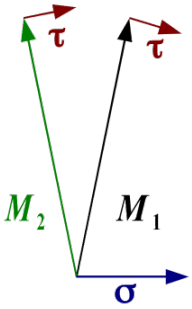
$$\begin{aligned} j_\mathrm{i} &\propto \sin\theta\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\theta\hat{\boldsymbol{z}} \\ j_\mathrm{t} &\propto \cos\left(\Delta k \cdot x\right)\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\left(\Delta k \cdot x\right)\hat{\boldsymbol{y}} + \cdots\hat{\boldsymbol{z}} \end{aligned} \tag{7.11}$$

mit $\Delta k = k_\uparrow - k_\downarrow \sim k_\mathrm{F}$.

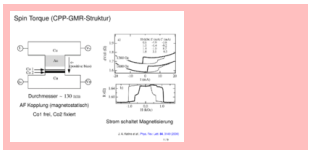


Der transmittierte Spinstrom präzediert auf der Längenskala $1/\Delta k \sim \lambda_F$ um die z-Achse. Durch Mittelung über alle Richtungen (Skizze) verschwindet der transversale Spinstrom ($\propto \hat{x}, \hat{y}$) also nach wenigen Atomlagen fast vollständig, und wir haben $j_t \propto \hat{z}$. In der Bilanz wird also der gesamte transversale Spinstrom als Drehmoment absorbiert, und wir haben (näherungsweise) nur $\tau_\parallel$.

Spin Torque in CPP-GMR-Struktur. Wir betrachten eine FNF-Struktur mit beliebiger Ausrichtung der Magnetisierung. Eine der Schichten sei fixiert (z.B. durch Austausch-Bias), die andere frei.



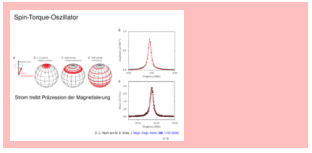
Elektronen fließen von $\boldsymbol{M}_1$ nach $\boldsymbol{M}_2$. Wenn wir annehmen, dass der hinein- und hinausfließende Strom entsprechend der Magnetisierungen polarisiert ist, wird transversaler Drehimpuls in Richtung $\boldsymbol{\sigma}$ übertragen. Infolge dessen wirkt auf beide Magnetisierungen ein Drehmoment $\boldsymbol{\tau}$ in dieselbe Richtung.
Je nachdem, ob der Strom von der fixierten zur freien Schicht fließt oder umgekehrt, dreht sich die freie Schicht zur fixierten hin oder weg (siehe Folie 1).



Tatsächlich ist die Dynamik komplizierter. Analog zum Dämpfungsterm in der Landau-Lifshitz-Gleichung (2.55) kann der Spin Torque geschrieben werden als

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}_i}{\partial t} \propto I \boldsymbol{M}_i \times (\boldsymbol{M}_1 \times \boldsymbol{M}_2).$$

Die "Dämpfung" kann allerdings je nach Richtung des Stroms auch negativ sein, d.h. die Amplitude der Präzessionsbewegung vergrößern. Zusammen mit den restlichen Beiträgen zur Landau-Lifshitz-Gleichung ergibt sich je nach Stärke und Vorzeichen des Stroms Dämpfung, stabile Präzession oder Magnetisierungsumkehr (siehe Folie 2).



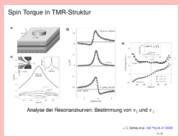
Spin Torque in Tunnelkontakten. Für Tunnelkontakte haben wir $G_P = G_{++} + G_{--}$ und $G_{AP} = G_{+-} + G_{-+}$. Spin Torque erfordert relative hohe Ströme, und daher auch hohe Spannungen. Mit wachsender Spannung sinkt die effektive Barrierenhöhe, und damit werden alle Größen spannungsabhängig. Analog zum differenziellen Leitwert dI/dV misst man deshalb das differenzielle Drehmoment $d\tau/dV$ (englisch "torquance" als Kofferwort aus torque und conductance). Für symmetrische Kontakte ergibt sich

$$\frac{d\tau_\parallel}{dV} = \frac{\hbar}{4e} (G_{++} - G_{--} + G_{+-} - G_{-+}) \sin\theta \qquad (7.12)$$

In Tunnelkontakten tritt auch $\tau_\perp$ auf. Für symmetrische Kontakte findet man näherungsweise

$$\frac{d\tau_\perp}{dV} \propto V \sin\theta \tag{7.13}$$

Die Beiträge kann man durch Analyse der symmetrischen und asymmetrischen Beiträge zur Resonanzkurven bestimmen (siehe Folie 3).



Spin Torque in Domänenwänden. Bisher betrachtet: diskrete FxF-Hybridstrukturen. Auch Domänenwände haben nichtkollineare Magnetisierung. Es treten also auch hier GMR und Spin Torque auf. Da Domänenwände in der Regel relativ breit sind ($\sim$ 100 nm), stellen sie ein relativ schwaches Streupotenzial dar. Die Elektronen folgen mit ihrem Spin adiabatisch der lokalen Magnetisierung. Daraus ergibt sich der adiabatische Spin Torque der Form

Hier ist $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{M}/M_\mathrm{S}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t} = -u\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial x} \tag{7.14}$$

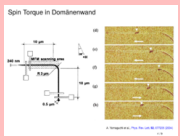
mit

$$u = \frac{g\mu_\mathrm{B}P_j}{2eM_\mathrm{S}}j \tag{7.15}$$

u hat die Dimension einer Geschwindigkeit. Zusätzlich tritt ein nicht-adiabatischer Beitrag der Form

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t} = \beta u \boldsymbol{m} \times \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial x} \tag{7.16}$$

auf. Die Ursache des nicht-adiabatischen Beitrags ist nicht abschließend geklärt. Oft findet man $\beta \approx \alpha$ (Gilbert-Dämpfung). Das deutet auf Streuprozesse als Ursache hin.

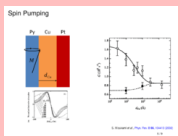


Infolge des Drehmoments bewegt sich die Domänenwand, sobald ein kritischer Strom j_c überschritten ist (siehe Folie 4). Es gibt einen intrinsischen kritischen Strom, der durch die Anisotropie K und die Domänenwandbreite δ_w gegeben ist. Daneben spielt Pinning an Unregelmässigkeiten der Struktur eine Rolle. Typische Geschwindigkeiten sind einige m/s.

Spinpumpen. Spinstrom induziert Oszillationen der Magnetisierung (Spin Torque) Umkehreffekt: Spinpumpen. Oszillierende Magnetisierung treibt Spinstrom an Grenzflächen.

$$\boldsymbol{j}_s \propto \Re\left(G_{\uparrow\downarrow}\right)\boldsymbol{M} \times \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} + \Im\left(G_{\uparrow\downarrow}\right)\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} \tag{7.17}$$

Nachweis: Erhöhte Gilbert-Dämpfung in F/N-Strukturen (siehe Folie 5).



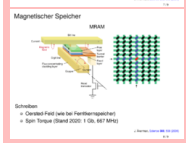
Anwendungsmöglichkeiten.

Oszillatoren:[29]

[29] Übersichtsartikel: T. Chen *et al.*, Proc. IEEE **104**, 1919 (2016)

Spin-Torque-Oszillatoren sind sehr klein und arbeiten im GHz-Bereich → lokale Erzeugung von Mikrowellen aus DC-Strom. Eine Anwendungsmöglichkeit ist microwave-assisted magnetic recording (MAMR) in Festplatten (siehe Folie 6). Die Hochfrequenzfelder regen die magnetische Schicht einer Festplatte an und erleichtern dadurch die Ummagnetisierung.

Magnetisches RAM:[30]



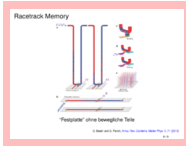
Magnetischer Hauptspeicher ist ein altes Konzept. Ferritkernspeicher waren in den 1950er bis 1970er Jahren dominierend (siehe Folie 7).

Neuere Konzepte basieren auf TMR-Strukturen: Dabei wird ein Bit in der Magnetisierungskonfiguration (parallel oder antiparallel) gespeichert (siehe Folie 8). Zum Schreiben verwendet man

- Oersted-Felder (überkreuzte Leitungen) wie schon beim Ferritkernspeicher. Problem: Hohe Stromdichten, Beeinflussung von Nachbarbits, geringe Packungsdichte.
- Spin Torque (kleinere Stromdichten erforderlich, weniger Störung der Nachbarbits).
  state of the art STT-MRAM (2020): 1 GBit, 667 MHz

Potenziell ist MRAM ein “universeller” Speicher: Sehr schnell (könnte theoretisch sogar Prozessorregister implementieren), nicht-flüchtig, hohe Speicherkapazität möglich (im Moment noch eher begrenzt). Aufgrund der rasanten Entwicklung der Flash-Speicher derzeit allerdings nur Nischenanwendungen (z.B. schneller, nichtflüchtiger Cache für SSD).

Racetrack-Speicher:[31]



Spin Torque verschiebt Domänenwände in einem magnetischen Draht (siehe Folie 9). Ein Schreibkopf prägt ein Bitmuster in Form unterschiedlich magnetisierter Domänen auf, während ein Strom längs des Drahtes das Muster weiterschiebt. Das Bitmuster wird über TMR ausgelesen. Damit kann man eine “Festplatte” ohne bewegliche Teile realisieren. Potenziell ist auch die dritte Dimension nutzbar → hohe Speicherdichte.

[30] Übersichtsartikel: J. Åkerman, Science **308**, 508 (2005), S. Bhatti *et al.*, Materials Today **20**, 530 (2017)

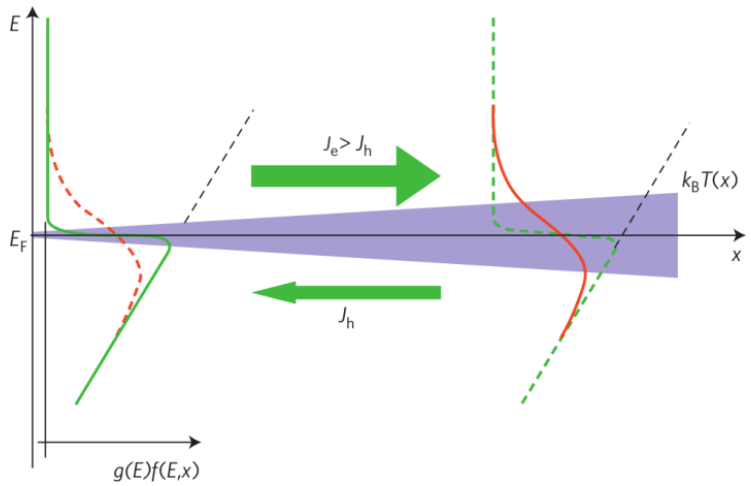
[31] Übersichtsartikel: S. Parkin and S.-H. Yang, Nat. Nano. **10**, 195 (2015)

8 Spezielle Themen

8.a Spinkaloritronik[32]

Unter Spinkaloritronik versteht man die Kopplung von Spin- und Wärmetransport. Dabei können wir zunächst unsere Überlegungen zum spinpolarisierten Transport verallgemeinern.

Zur Erinnerung: In normalen Metallen treten thermoelektrische Effekte auf, wenn der Leitwert an der Fermikante von der Energie abhängt (oder in anderen Worten, wenn die Teilchen-Loch-Symmetrie gebrochen ist).



Ladungsstrom j_c und Wärmestrom j_q sind gekoppelt durch

$$\begin{pmatrix} j_c \\ j_q \end{pmatrix} = \sigma\left(\epsilon_\mathrm{F}\right) \begin{pmatrix} 1 & ST \\ ST & \kappa T/\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla\mu/e \\ -\nabla T/T \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

Hier ist κ die Wärmeleitfähigkeit und S der Seebeck-Koeffizient. Die nichtdiagonalen Elemente beschreiben Thermokraft und Peltier-Effekt. Die treibenden Kräfte sind so normiert, dass die Onsager-Symmetrie von Seebeck und Peltier-Effekt offensichtlich ist. Aus der Sommerfeld-Entwicklung erhält man die Mott-Formel

$$S = -\frac{\pi^2 k_\mathrm{B}^2}{3e} T \left.\frac{\partial \ln \sigma}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=\epsilon_\mathrm{F}} \tag{8.2}$$

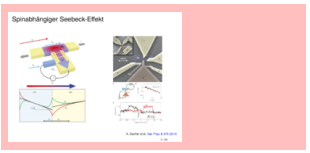
Die Verallgemeinerung auf spinabhängigen Transport liefert

$$\begin{pmatrix} j_c \\ j_s \\ j_q \end{pmatrix} = \sigma\left(\epsilon_\mathrm{F}\right) \begin{pmatrix} 1 & P & ST \\ P & 1 & P'ST \\ ST & P'ST & \kappa T/\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla\mu/e \\ \nabla\mu_s/2e \\ -\nabla T/T \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

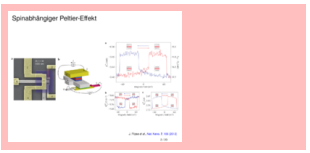
mit $P = \left(\sigma_\downarrow - \sigma_\uparrow\right) / \left(\sigma_\downarrow + \sigma_\uparrow\right)$, $\mu_s = \mu_\downarrow - \mu_\uparrow$, $S = \left(\sigma_\downarrow S_\downarrow + \sigma_\uparrow S_\uparrow\right) / \left(\sigma_\downarrow + \sigma_\uparrow\right)$, und $P' = \partial(P\sigma)/\partial\epsilon$.

[32] Übersichtsartikel: G. E. W. Bauer *et al.*, Nat. Mater. **11**, 391 (2012)

Beispiel 1: Spinabhängiger Seebeck-Effekt. Temperaturgradient erzeugt Spinstrom (siehe Folie 1).



Beispiel 2: Spinabhängiger Peltier-Effekt. Spinstrom erzeugt Temperaturgradient (siehe Folie 2).

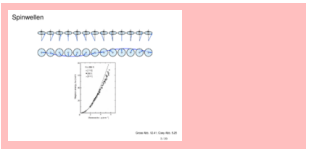


8.b Magnon Spintronics[33]

Bisher besprochen: Spintransport durch einzelne Elektronen. Spintorque und Spinpumpen funktionieren auch mit magnetischen Isolatoren.

Dabei benutzt: Spin-Hall-Effekt (z.B. Pt, starke Spin-Bahn-WW) konvertiert zwischen Ladungs- und Spinstrom, Spinpumpen/Spintorque übertragen Spinstrom in Isolator.

Spinwellen. Wir interessieren uns in erster Linie für Temperaturen weit unterhalb der Curie-Temperatur, so dass die magnetischen Momente im Wesentlichen parallel ausgerichtet sind. Eine mögliche Anregung wäre ein einzelner Spinflip, der Energieaufwand dafür ist allerdings $\sim k_B T_C$. Stattdessen bilden sich Spinwellen, d.h. periodische Auslenkungen der magnetischen Momente aus der Ruhelage (siehe Folie 3). Die Quanten der Spinwellen nennt man Magnonen (analog zu Phononen als quantisierte Gitterschwingungen). Ein Magnon verringert dabei den Gesamtspin um $\hbar$, d.h. ein Magnon ist quasi ein auf das ganze Gitter verteilter Spinflip. Die Dispersion ferromagnetischer Magnonen in einer eindimensionalen Spinkette (Gitterkonstante a, Austausch J zwischen nächsten Nachbarn, Wellenzahl q) ist



$$\epsilon(q) = 4JS\,(1 - \cos(qa)) \tag{8.4}$$

Typische Größenordnung 0-50 meV (ähnlich Phononen). Für kleine q gilt

- Ferromagneten: $\epsilon(q) \propto q^2$
- Antiferromagneten: $\epsilon(q) \propto q$

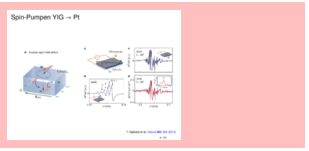
Beliebtes Material: Yttrium-Eisen-Granat (Yttrium Iron Garnet, YIG)

$Y_3Fe_2(FeO_4)_3$, Ferrimagnet, Isolator, $T_C = 553$ K (280 °C), beliebt für Mikrowellenanwendungen (sehr hohe Gütefaktoren bei ferromagnetischer Resonanz). Maximale Magnonenfrequenzen im THz-Bereich.

Beispiel 1: Spin-Pumpen. Mikrowelleneinstrahlung lässt Magnetisierung in YIG oszillieren.

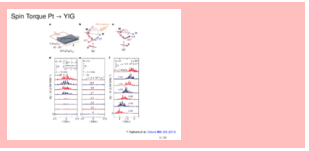
[33] Übersichtsartikel: A. V. Chumak *et al.*, Nat. Phys. **11**, 453 (2015)

Spinstrom wird in Pt gepumpt.



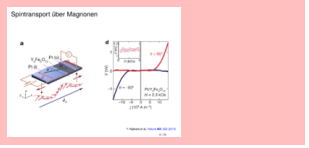
Inverser Spin-Hall-Effekt erzeugt messbare Spannung (siehe Folie 4).

Beispiel 2: Spin-Torque. Spin-Hall-Effekt konvertiert Strom durch Pt in Spinstrom



Spinstrom erzeugt Spin-Torque auf YIG (siehe Folie 5).

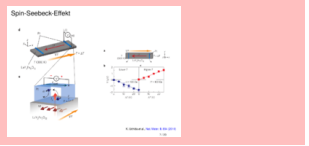
YIG oszilliert



Kombination aus 1&2: Spintransport über Magnonen durch YIG (siehe Folie 6).

Anregung auch optisch möglich (heizen, Spezialfall von Spinkaloritronik, Magnonen tragen auch zu Wärmekapazität/Wärmetransport bei).

Beispiel 3: Spin-Seebeck-Effekt. Magnonen transportierten sowohl Wärme als auch Drehimpuls.



Elektrische Detektion über Spinpumpen/Spin-Hall-Effekt (siehe Folie 7).

8.c Skyrmionen[34]

Skyrmionen sind teilchenartige magnetische Texturen mit speziellen topologischen Eigenschaften. Konzept stammt aus Teilchenphysik (Tony Skyrme, 1962).

Topologie. Topologie ist die mathematische Beschreibung stetiger Verformungen (siehe Folie 8). Dabei treten topologische Invarianten auf (z.B. ein topologischer Index), die durch kontinuierliche Verformung nicht verändert werden können (z.B. genau ein Loch in Kaffeetasse/Torus, genau eine Windung im Möbiusband). Oft unterscheiden sich Geometrien mit unterschiedlicher Topologie (d.h. unterschiedlichem topologischen Index) qualitativ. Ein Möbiusband hat zum Beispiel nur eine Oberfläche, ein Band ohne Windung hat zwei).

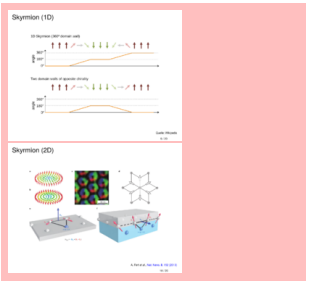
Vielfältige Anwendungen in der Physik:

- Bandstrukturen (topologische Isolatoren)
- Spintexturen (Skyrmionen)
- Vortizees (Kosterlitz-Thouless-Übergang)
- Majoranas

[34] Übersichtsartikel: N. Nagaosa and Y. Tokura, Nat. Nano. **8**, 899 (2013)

- Quanten-Hall-Effekt
- …

Nobelpreis 2016: Thouless, Haldane, Kosterlitz



Magnetische Skyrmionen. Skyrmionen sind topologische magnetische Texturen (siehe Folien 9 und 10).

Mögliche Ursachen:

- Frustration verschiedener Wechselwirkungen (z.B. out-of-plane Oberflächenanisotropie vs in-plane Formanisotropie)
- Dzyaloshinskii–Moriya-Wechselwirkung (indirekte Austauschwechselwirkung mit Spin-Bahn-Kopplung in nicht-zentrosymmetrischen Systemen, z.B. Oberflächen/Grenzflächen)

$$H_{\mathrm{DM}} = -\boldsymbol{D}_{ij} \cdot \left(\boldsymbol{S}_i \times \boldsymbol{S}_j\right)$$

Topologische Skyrmionenzahl in magnetischem Film

$$N_{\mathrm{Sk}} = \frac{1}{4\pi} \iint \boldsymbol{n} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial y} \right) dxdy \tag{8.5}$$

Schreibt man den Ortsvektor als

$$\boldsymbol{r} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \tag{8.6}$$

und den Richtungsvektor der Magnetisierung als

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} \cos\Phi \sin\Theta \\ \sin\Phi \sin\Theta \\ \cos\Theta \end{pmatrix} \tag{8.7}$$

ergibt sich

$$N_{\mathrm{Sk}} = \frac{1}{4\pi} \left[\cos\Theta\right]_{r=0}^{r=\infty} \cdot \left[\Phi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \tag{8.8}$$

Man definiert die Vortizität

$$m = \frac{1}{2\pi} \left[\Phi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \tag{8.9}$$

und die Helizität γ, so dass gilt

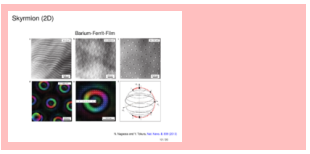
$$\Phi = m\varphi + \gamma \tag{8.10}$$

(siehe Beispiele auf Folie 11). Für $\left[\cos\Theta\right]_{r=0}^{r=\infty} = 2$ (Magnetisierung zeigt außen nach oben und im Zentrum nach unten) gilt dann

$$N_{\mathrm{Sk}} = m \tag{8.11}$$

Einige Eigenschaften

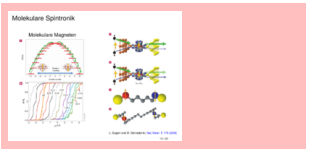
- Skyrmionen können nicht durch kontinuierliche Verformung der Magnetisierung erzeugt bzw. vernichtet werden: “topologisch geschützter” Zustand. Trotzdem können sie natürlich diskontinuierlich erzeugt/vernichtet werden, z.B. je nach Energiebilanz, oder durch thermische Anregung.
- Skyrmionen können durch Spin-Torque bewegt werden (analog zu Domänenwänden), geringe Stromdichten nötig.
- Skyrmionen können sehr klein sein (wenige nm)



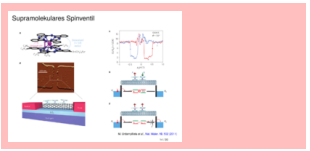
Experimentelle Beispiele siehe Folie 12. Skyrmionen in dünnem Scandium-dotiertem Barrium-Ferrit-Film. Ohne Feld: Lamellenstruktur. Mit Feld: Skyrmionen. Zwei Varianten mit verschiedener Helizität (Energieminima). Mögliche Anwendung: Informationspeicherung (vgl. magnetische Blasenspeicher).

8.d Molekulare Spintronik[35]

Kleinstmögliches magnetisches Element: Atom oder Molekül.



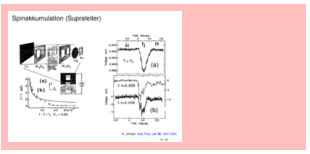
Beispiel 1: Mn_{12}(acetate)$_{16}$. Gesamtspin $S = 10$, Hysterese bei tiefen Temperaturen (siehe Folie 13).



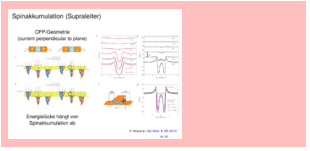
Beispiel 2: Molekulares Spinventil (siehe Folie 14).

8.e Supraleitende Spintronik[36]

In Supraleitern sind Elektronen im Grundzustand zu Cooper-Paaren gebunden, die eine makroskopische Wellenfunktion besetzen. Cooperpaare sind in klassischen Supraleitern Singuletts. Daneben gibt es fermionische Quasiteilchen-Anregungen (Spin $\frac{1}{2}$), analog zu den Elektronen in normalen Metallen.



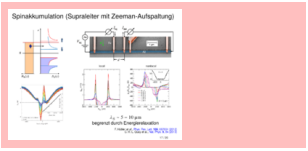
Beispiel 1: Quasiteilchen-Spinventil. Spininjektion erzeugt Quasiteilchen-Spinakkumulation (analog zu normalem Spinventil, siehe Folie 15). Spinakkumulation kann auch die Supraleitung beeinflussen (siehe Folie 16). Mögliche Vorteile: große Spinrelaxationszeiten.



[35] Übersichtsartikel: L. Bogani and W. Wernsdorfer, Nat. Mater. **7**, 179 (2008)

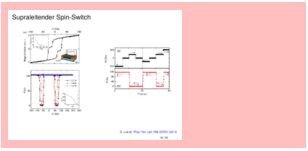
[36] Übersichtsartikel: M. Eschrig, Phys. Today **64**(1), 43 (2011), J. Linder and J. W. A. Robinson, Nat. Phys. **11**, 307 (2015), M. G. Blamire and J. W. A. Robinson, J. Phys.: Condens. Matter **26**, 453201 (2014)

Beispiel 2: Spininjektion mit Zeeman-Aufspaltung. Schon in Kapitel 6 gesehen: Spinpolarisiertes Tunneln mit Zeeman-Aufspaltung der Zustandsdichte (Tedrow & Meservey).

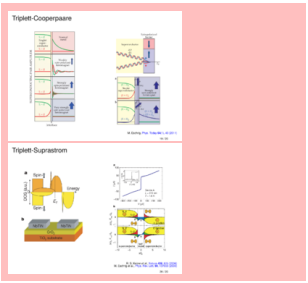


Mit Zeeman-Aufspaltung ist die Zustandsdichte spinabhängig (ähnlich wie im Ferromagnet), Spinpolarisation beinahe 100%, große Spinrelaxationszeit (siehe Folie 17).

Beispiel 3: Supraleitender Spin-Schalter. Cooper-Paare spüren Austauschaufspaltung des Ferromagneten. Dünner supraleitender Film zwischen zwei Ferromagneten: Supraleitung schaltbar (siehe Folie 18).



Beispiel 4: Triplett-Cooperpaare. An Grenzflächen zwischen Supraleitern und Ferromagneten werden Triplett-Cooperpaare erzeugt. Spinpolarisierter Suprastrom (siehe Folien 19 und 20).



9 Glossar

Formelzeichen	Bedeutung
A	Vektorpotenzial
A	Fläche
B	Magnetische Flussdichte
C	Kapazität
D	Diffusionskonstante
E	Elektrisches Feld
ϵ_F	Fermienergie
G	Leitwert
H	Hamiltonian, Magnetfeld
I	Strom, Korrelationsfunktion
L	Länge, Gesamtbahndrehimpuls, Induktivität
N	Zustandsdichte, Teilchenzahl
N	Entmagnetisierungsfaktor
P	Spinpolarisation
Q	Ladung
R	Ort
S	Gesamtspin, Stromkorrelationen
T	Temperatur
T_c	Kritische Temperatur
T_{kq}	Tunnelmatrixelement
T	Transmissionswahrscheinlichkeit
U, U_0	Einteilchenpotenzial, innere Energie
V	Spannung, Volumen
W	Arbeit
a	Gitterkonstante

d	Abstand
e	Elementarladung, Euler'sche Zahl
f	Frequenz
f_0,f_k, ...	Fermifunktion, Verteilungsfunktionen
g	Gyromagnetischer Faktor, differenzieller Leitwert, Green's-Funktion, Verteilungsfunktion
$h(\hbar)$	Planck'sches Wirkungsquantum (reduziert)
h_{ex}	Austauschenergie
j	Stromdichte
k	Wellenzahl
k_{F}	Fermi-Wellenzahl
k_{B}	Boltzmann-Konstante
l	Freie Weglänge
m	Elektronenmasse, Spinquantenzahl
n	Elektronenkonzentration, normierte Zustandsdichte
q, q	Wellenzahl, Ladung
r	Ort
t	Zeit
v	Geschwindigkeit
v_{F}	Fermigeschwindigkeit
v_{g}	Gruppengeschwindigkeit
x	Ort
Γ	Rate
Φ	Magnetischer Fluss
Φ_0	Flussquant
Ω	Volumen
Θ	Heaviside-Funktion

γ	Euler'sche Konstante
δ	Kronecker-Delta
ϵ	Energie
φ	elektrostatisches Potenzial
λ	Relaxationslänge
μ	Chemisches Potenzial
μ_{B}	Bohr'sches Magneton
μ_0	Vakuumpermeabilität
σ	Spin, Leitfähigkeit
τ	Streuzeit, Relaxationszeit
ω	Kreisfrequenz
ω_{D}	Debyefrequenz
ψ	Wellenfunktion
ρ	spez. Widerstand

Literatur

[1] P. Weiss, J. Phys. Theor. Appl. **6**, 661 (1907)

[2] A. B. Pippard, *Magnetoresistance in Metals*, Cambridge University Press (1989)

[3] E. H. Sondheimer, Adv. Phys. **1**, 1 (1952)

[4] I. A. Campbell and A. Fert, in E. P. Wohlfarth (ed.), *Ferromagnetic Materials*, volume 3, North Holland (1982)

[5] W. Thomson, Proc. R. Soc. Lond. **8**, 546 (1856)

[6] R. Gross and A. Marx, *Spintronik-Skript*

[7] X. Zhang and W. Butler, in Y. Xu *et al.* (eds.), *Handbook of Spintronics*, 3–69, Springer Netherlands, Dordrecht (2016)

[8] R. E. Camley and J. Barnaś, Phys. Rev. Lett. **63**, 664 (1989)

[9] T. Valet and A. Fert, Phys. Rev. B **48**, 7099 (1993)

[10] R. J. Elliott, Phys. Rev. **96**, 266 (1954)

[11] Y. Yafet, in F. Seitz and D. Turnbull (eds.), *Solid State Physics*, volume 14, 1, Academic Press, New York (1963)

[12] F. J. Jedema *et al.*, Phys. Rev. B **67**, 085319 (2003)

[13] J. Bass and W. P. Pratt, J. Phys.: Condens. Matter **19**, 183201 (2007)

[14] S. Takahashi and S. Maekawa, Phys. Rev. B **67**, 052409 (2003)

[15] J. S. Moodera *et al.*, Physics Today **63**, 46 (2010)

[16] G.-X. Miao *et al.*, Rep. Prog. Phys. **74**, 036501 (2011)

[17] P. M. Tedrow and R. Meservey, Phys. Rev. Lett. **26**, 192 (1971)

[18] R. Meservey and P. M. Tedrow, Phys. Rep. **238**, 173 (1994)

[19] M. Johnson and R. H. Silsbee, Phys. Rev. Lett. **55**, 1790 (1985)

[20] F. J. Jedema *et al.*, Nature **416**, 713 (2002)

[21] J. Sinova *et al.*, Rev. Mod. Phys. **87**, 1213 (2015)

[22] M. Julliere, Phys. Lett. A **54**, 225 (1975)

[23] T. Miyazaki and N. Tezuka, J. Magn. Magn. Mater. **139**, L231 (1995)

[24] J. S. Moodera *et al.*, Phys. Rev. Lett. **74**, 3273 (1995)

[25] J. C. Slonczewski, J. Magn. Magn. Mater. **159**, L1 (1996)

[26] L. Berger, Phys. Rev. B **54**, 9353 (1996)

[27] D. C. Ralph and M. D. Stiles, J. Magn. Magn. Mater. **320**, 1190 (2008)

[28] A. Brataas *et al.*, Nat. Mater. **11**, 372 (2012)

[29] T. Chen *et al.*, Proc. IEEE **104**, 1919 (2016)

[30] J. Åkerman, Science **308**, 508 (2005)

[31] S. Bhatti *et al.*, Materials Today **20**, 530 (2017)

[32] S. Parkin and S.-H. Yang, Nat. Nano. **10**, 195 (2015)

[33] G. E. W. Bauer *et al.*, Nat. Mater. **11**, 391 (2012)

[34] A. V. Chumak *et al.*, Nat. Phys. **11**, 453 (2015)

[35] N. Nagaosa and Y. Tokura, Nat. Nano. **8**, 899 (2013)

[36] L. Bogani and W. Wernsdorfer, Nat. Mater. **7**, 179 (2008)

[37] M. Eschrig, Phys. Today **64**(1), 43 (2011)

[38] J. Linder and J. W. A. Robinson, Nat. Phys. **11**, 307 (2015)

[39] M. G. Blamire and J. W. A. Robinson, J. Phys.: Condens. Matter **26**, 453201 (2014)