

Analysis I, H14

Aufgabe 1

Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ die Abschätzung

$$3^n > (n+1)^2.$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die folgenden Potenzreihen konvergieren.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} x^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+(-1)^n)}{3n^2} x^n$

Aufgabe 3

Beweisen Sie für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$|y \arctan y - x \arctan x| \leq \frac{\pi+1}{2} |y-x|.$$

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x \operatorname{sign}(x-3) + \frac{2x^2-3x-2}{x-2}, & x \neq 2, \\ 3, & x = 2, \end{cases}$$

wobei die Signumsfunktion $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

definiert ist. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen f differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung von f in diesen Punkten.

Aufgabe 5

Beweisen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := e^{-x} + x^2$, genau ein lokales Extremum hat, und dass dieses ein globales Minimum ist.

Aufgabe 6

Untersuchen Sie die gegebenen Funktionenfolgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(a) $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f_n(x) := \frac{n^2 x}{2+n^6 x^3}$.

(b) $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f_n(x) := \frac{\cos(n^2 x)}{n}.$$

Aufgabe 1

LÖSUNG:

Wir machen einen Beweis durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $n = 3$: $3^3 = 27 > 16 = (3 + 1)^2$.

Induktionsvoraussetzung: Sei die Behauptung wahr für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$.

Induktionsschluss: $n \rightsquigarrow n + 1$: Es gilt mit $2n^2 + 2n = 2n(n + 1) > 1$ für alle $n \geq 3$ und der Induktionsvoraussetzung

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3 \cdot (n + 1)^2 = 3n^2 + 6n + 3 = n^2 + 4n + 3 + (2n^2 + 2n) > n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2.$$

Also gilt $3^{n+1} > ((n + 1) + 1)^2$.

Aufgabe 2

LÖSUNG:

- (a) Definiere $a_n := \frac{2^n}{n+1}$. Die zu untersuchende Potenzreihe ist dann $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n+1} \leq \sqrt[n]{2n}$. Aus $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ und $\sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \cdot 1 = 1$ für $n \rightarrow \infty$ folgt mit dem Sandwichkriterium $\sqrt[n]{n+1} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$. Damit gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{\sqrt[n]{n+1}} \rightarrow 2$$

für $n \rightarrow \infty$. Somit ist

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{2}$$

der Konvergenzradius der Potenzreihe. Einsetzen von $x = \frac{1}{2}$ liefert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$,

welche divergiert (harmonische Reihe!). Einsetzen von $x = -\frac{1}{2}$ führt auf $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$. Da

$(\frac{1}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert diese Reihe nach dem Leibnizkriterium. Insgesamt konvergiert die Potenzreihe in genau den $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in [-1/2, 1/2)$.

- (b) Definiere die Folge $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ durch

$$b_k := \begin{cases} 0, & k \text{ ungerade,} \\ \frac{2}{3k^2}, & k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Die zu untersuchende Potenzreihe ist dann $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$. Es gilt $\sqrt[k]{0} = 0 \rightarrow 0$ und

$$\sqrt[k]{\frac{2}{3k^2}} = \sqrt[k]{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{(\sqrt[k]{k})^2} \rightarrow 1 \cdot \frac{1}{1^2} = 1$$

für $k \rightarrow \infty$. Damit ist

$$r = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|b_k|}} = \frac{1}{1} = 1$$

Aufgabe 4

LÖSUNG:

Es gilt $2x^2 - 3x - 2 = (x - 2)(2x + 1)$. Somit hat die Funktion für $x \neq 2$ die Gestalt

$$f(x) = x \operatorname{sign}(x - 3) + 2x + 1.$$

Auf den offenen Mengen $(0, 2)$ und $(2, 3)$ ist damit $f(x) = -x + 2x + 1 = x + 1$ und hat dort die Ableitung $f'(x) = 1$.

Auf der offenen Menge $(3, \infty)$ ist $f(x) = x + 2x + 1 = 3x + 1$ und hat dort die Ableitung $f'(x) = 3$.

Für $x \in (1, 3) \setminus \{2\}$ gilt

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x + 1 - 3}{x - 2} = 1 \rightarrow 1$$

für $x \rightarrow 2$. Somit ist f in $x = 2$ differenzierbar mit $f'(2) = 1$. Betrachte die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $x_n := 3 - \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $x_n \rightarrow 3$ für $n \rightarrow \infty$. Wegen

$$f(x_n) = x_n + 1 = 4 - \frac{1}{n} \rightarrow 4 \neq 7 = f(3)$$

für $n \rightarrow \infty$ ist f nicht stetig in $x = 3$. Damit ist f auch nicht differenzierbar in $x = 3$.

Aufgabe 5

LÖSUNGSVORSCHLAG 1: Es gilt $f'(x) = -e^{-x} + 2x$ und $f''(x) = e^{-x} + 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da f' stetig ist, folgt aus $f'(0) = -1 < 0$ und $f'(1) = -\frac{1}{e} + 2 > 0$ mit dem Zwischenwertsatz, dass f' eine Nullstelle im Intervall $[0, 1]$ hat. Da $f''(x) \geq 2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist f' streng monoton wachsend. f' kann also keine weitere Nullstelle haben, weder im Intervall $[0, 1]$, noch außerhalb von diesem. f kann also nur in eventuell dieser einen Nullstelle der Ableitung ein lokales Extremum haben. Aus $f'' > 0$ folgt ebenfalls, dass an dieser Nullstelle von f' ein lokales Minimum von f vorliegt. Da $f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \pm\infty$ gilt, f stetig ist und keine weiteren lokalen Extrema besitzt, muss das Minimum global sein.

LÖSUNGSVORSCHLAG 2: Es gilt $f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \pm\infty$. Da f stetig ist, ist f somit nach unten beschränkt und hat daher ein globales, also auch lokales, Minimum. Ferner haben wir $f'(x) = -e^{-x} + 2x$ und $f''(x) = e^{-x} + 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. An $f'' \geq 2 > 0$ erkennt man, dass f strikt konvex ist.

Angenommen es gibt zwei lokale Minima in Punkten $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 \neq x_2$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_1 < x_2$ und $f(x_1) \leq f(x_2)$. Dann gibt es ein $y \in (x_1, x_2)$ mit $f(y) \geq f(x_2) (\geq f(x_1))$. Für $\lambda \in (0, 1)$ mit $y = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ gilt also

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = f(y) = (\lambda + (1 - \lambda))f(y) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

was der strikten Konvexität von f widerspricht.

Angenommen f hat ein lokales Maximum in einem Punkt $x_3 \in \mathbb{R}$. f nehme in $x_4 \in \mathbb{R}$ sein globales Minimum an. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x_3 < x_4$. Ebenfalls ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $f(x_4) < f(x_3)$ (ansonsten hat f in x_3 auch ein Minimum und damit (mindestens) zwei, was wir schon abgehandelt haben). Setze $q := \frac{f(x_3) - f(x_4)}{x_4 - x_3} > 0$. Wegen $f'(x_3) = 0$ gibt es aufgrund der Stetigkeit von f' einen Punkt $x_5 \in \mathbb{R}$ mit $x_5 \in (x_3, x_4)$ und $f'(y) \in (-q, 0]$ für alle $y \in [x_3, x_5]$. Für $\lambda \in (0, 1)$ mit $x_5 = \lambda x_3 + (1 - \lambda)x_4$ gilt also mit dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} f(\lambda x_3 + (1 - \lambda)x_4) &= f(x_5) \geq f(x_3) - \max_{z \in [x_3, x_5]} |f'(z)| \cdot (x_5 - x_3) \\ &\geq f(x_3) - q \cdot (x_5 - x_3) \end{aligned}$$

- (b) Durch Ausprobieren findet man die beiden Nullstellen 1 und $\frac{3}{2}$ der Funktion $x \mapsto 2x^2 - 5x + 3$. Zur Bestimmung einer Partialbruchzerlegung des Integranden machen wir den Ansatz

$$\frac{1}{2x^2 - 5x + 3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{2x - 3}.$$

?! falsche
Aufgabe

Multiplikation mit $2x^2 - 5x + 3$ liefert

$$1 = A(2x - 3) + B(x - 1),$$

was durch Koeffizientenvergleich auf die beiden Gleichungen $2A + B = 0$ und $-3A - B = 1$ führt. Addieren der Gleichungen ergibt $A = -1$ und dann erhält man durch Einsetzen $B = 2$. Insgesamt liefert dies

$$\frac{1}{2x^2 - 5x + 3} = \frac{1}{(x - 1)(2x - 3)} = -\frac{1}{x - 1} + \frac{2}{2x - 3}$$

für alle $x \in [2, 3]$. Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{1}{2x^2 - 5x + 3} dx &= \int_2^3 -\frac{1}{x - 1} dx + \int_2^3 \frac{2}{2x - 3} dx \\ &= [-\ln(x - 1)]_2^3 + [\ln(2x - 3)]_2^3 \\ &= -\ln 2 + \ln 3 = \ln\left(\frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(x_3) + \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} \cdot (1 - \lambda)(x_4 - x_3) \\
&= \lambda f(x_3) + (1 - \lambda)f(x_4),
\end{aligned}$$

was der strikten Konvexität von f widerspricht.

Daher kann f kein lokales Maximum und nicht mehr als ein lokales Minimum haben.

Aufgabe 6

LÖSUNG:

- (a) Für jedes $x \in [0, 1]$ gilt

$$f_n(x) = \frac{x}{\frac{2}{n^2} + n^4 x^3} \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$. Also konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion. Definiere $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) := 0$ und setze $x_n := \frac{1}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2 + 1} = \frac{1}{3}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{3}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit konvergiert $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)|$ nicht gegen 0 für $n \rightarrow \infty$. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert also nicht gleichmäßig gegen f .

- (b) Definiere $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) := 0$ für alle $x \in [0, 1]$. Mit der Abschätzung $|\cos(y)| \leq 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} \frac{|\cos(n^2 x)|}{n} \leq \sup_{x \in [0, 1]} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert also gleichmäßig und damit auch punktweise gegen die Funktion f .

Aufgabe 7

LÖSUNG:

- (a) Wir substituieren $y = (\cosh x)^2$ und erhalten mit $\frac{dy}{dx} = 2 \sinh x \cosh x$, $\cosh(-1) = \cosh(1)$ und $\cosh(0) = 1$, dass

$$\int_{-1}^0 (\sinh x)(\cosh x)^3 e^{(\cosh x)^2} dx = \int_{(\cosh 1)^2}^1 \frac{1}{2} y e^y dy.$$

Partielles Integrieren liefert nun

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^0 (\sinh x)(\cosh x)^3 e^{(\cosh x)^2} dx &= \left[\frac{1}{2} y e^y \right]_{(\cosh 1)^2}^1 - \int_{(\cosh 1)^2}^1 \frac{1}{2} e^y dy \\
&= \frac{e}{2} - \frac{1}{2} (\cosh 1)^2 e^{(\cosh 1)^2} - \left[\frac{1}{2} e^y \right]_{(\cosh 1)^2}^1 \\
&= \frac{e}{2} - \frac{1}{2} (\cosh 1)^2 e^{(\cosh 1)^2} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} e^{(\cosh 1)^2} \\
&= \frac{1}{2} (1 - (\cosh 1)^2) e^{(\cosh 1)^2}.
\end{aligned}$$

der Konvergenzradius der Potenzreihe. Einsetzen von $x = 1$ (in die ursprüngliche Reihe) liefert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + (-1)^n)}{3n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3(2k)^2} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

welche konvergiert (hyperharmonische Reihe!). Durch Einsetzen von $x = -1$ erhält man die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{k^2} \cdot (-1)^k$. Da diese Reihe nach dem gerade Gesagten absolut konvergiert, konvergiert sie. Somit konvergiert die zu untersuchende Potenzreihe für genau diejenigen $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in [-1, 1]$.

Aufgabe 3

LÖSUNG:

Definiere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(t) := t \arctan t$. Es gilt

$$f'(t) = \arctan t + \frac{t}{1+t^2}.$$

LÖSUNGSVORSCHLAG 1 FÜR DIE ABSCHÄTZUNG DER ABLEITUNG: Wegen $|t| = |t| \cdot 1 \leq \frac{1}{2}(t^2 + 1)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ zusammen mit der Abschätzung $|\arctan t| \leq \frac{\pi}{2}$ haben wir somit

$$|f'(t)| \leq |\arctan t| + \frac{|t|}{1+t^2} \leq \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\pi+1}{2} \quad (1)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

LÖSUNGSVORSCHLAG 2 FÜR DIE ABSCHÄTZUNG DER ABLEITUNG: Definiere $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g(t) := \frac{t}{1+t^2}$. Es gilt

$$g'(t) = \frac{1 \cdot (1+t^2) - 2t \cdot t}{(1+t^2)^2} = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}.$$

und

$$g''(t) = \frac{-2t \cdot (1+t^2)^2 - 4t(1+t^2) \cdot (1-t^2)}{(1+t^2)^4} = \frac{-2t - 4t^3 - 2t^5 - 4t + 4t^5}{(1+t^2)^4} = \frac{-6t - 4t^3 + 2t^5}{(1+t^2)^4}$$

Die Nullstellen von g' sind $t_{1/2} = \mp 1$. Wegen $g''(t_1) = \frac{1}{2} > 0$ und $g''(t_2) = -\frac{1}{2} < 0$ hat g in t_1 ein Minimum und in t_2 ein Maximum. (Alternativ kann man auch über die Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung argumentieren und braucht die zweite Ableitung dann nicht auszurechnen.) Aus $g(t_1) = -\frac{1}{2}$, $g(t_2) = \frac{1}{2}$ und $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} g(t) = 0$ folgt daraus $\max_{t \in \mathbb{R}} |g(t)| = \frac{1}{2}$. Somit haben wir

$$|f'(t)| \leq |\arctan t| + \left| \frac{t}{1+t^2} \right| \leq \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\pi+1}{2} \quad (2)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. (Für $x = y$ ist die Behauptung klar und für $y < x$ folgt sie analog.) Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (x, y)$ mit

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x).$$

Mit der Abschätzung (1) bzw. (2) erhalten wir daher

$$|y \arctan y - x \arctan x| = |f(y) - f(x)| \leq |f'(\xi)| \cdot |y - x| \leq \frac{\pi+1}{2} |y - x|.$$

Aufgabe 7

Berechnen Sie die Werte der folgenden Riemann-Integrale.

(a)

$$\int_{-1}^0 (\sinh x)(\cosh x)^3 e^{(\cosh x)^2} dx$$

(b)

$$\int_3^4 \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx$$