

Ana 1 SoSe 2019

Name:

Matrikelnummer:

Punkte:

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass

(i) Für alle $a, b \geq 0$ gilt:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2.$$

Lösungsvorschlag:

(i) Die beiden Ungleichungen folgen direkt durch quadrieren. Genauer gilt, dass

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

äquivalent ist zu

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \frac{(a + b)^2}{4} \geq ab$$

und das zu

$$2(a^2 + b^2) \geq a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

und das wieder zu

$$(a - b)^2 \geq 0 \geq -(a - b)^2. \quad \square$$

(ii) Beweis durch Induktion.

Induktionsanfang: Sei $n = 1$, dann gilt offensichtlich

$$\sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1 = 1^2 = \left(\sum_{k=1}^1 k \right)^2.$$

Induktionsvoraussetzung (I.V.): Für beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2.$$

Lösungen Analysis I, September 2019

Name:

Matrikelnummer:

Punkte:

Induktionsschluss: $n \rightarrow n + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 \stackrel{\text{I.V.}}{=} \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)n}{2} \right)^2 + (n+1)^3 \\ &= \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 (n^2 + 4(n+1)) \\ &= \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 (n^2 + 4n + 4) \\ &= \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 (n+2)^2 \\ &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} k \right)^2 \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Name:

Matrikelnummer:

Punkte:

Aufgabe 2:

- (i) Was ist eine reelle Folge und wann nennt man eine solche Folge konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$?
- (ii) Geben Sie die Definition einer Cauchyfolge an.
- (iii) Zeigen Sie, dass eine reelle Cauchyfolge genau dann konvergiert wenn sie eine konvergente Teilfolge besitzt.

Lösungsvorschlag:

- (i) Eine reelle Folge ist eine Abbildung von $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, z.B. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{R}$.
Eine reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert (für $n \rightarrow \infty$) gegen $a \in \mathbb{R}$ falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k \text{ folgt } |a_n - a| < \varepsilon.$$

- (ii) Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchyfolge, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq k \text{ ist } |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

- (iii) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Cauchyfolge.
 $\Rightarrow$: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass wenn $(b_n)_n$ eine konvergente Folge ist mit Grenzwert L so konvergiert jede Teilfolge von $(b_n)_n$ auch gegen L . Somit gilt, da die Cauchyfolge $(a_n)_n$ konvergiert, dass auch jede Teilfolge von $(a_n)_n$ konvergiert und zwar gegen den selben Grenzwert.

Zur Vollständigkeit der Beweis der Aussage aus der Vorlesung:

Beweis. Sei $(b_{n_k})_k$ Teilfolge von $(b_n)_n$, d.h. $n_k = \sigma(k)$ für eine Ausdünnung $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.
Da $\sigma(k+1) > \sigma(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt per Induktion

$$\sigma(k) \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} : \forall n \geq K \text{ folgt } |a_n - L| < \varepsilon$$

dann gilt auch $|a_{\sigma(k)} - L| < \varepsilon$ für alle $k \geq K$. Also $a_{\sigma(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} L$. □

$\Leftarrow$: Sei $(a_{n_k})_k$ konvergente Teilfolge der Cauchyfolge $(a_n)_n$ mit Grenzwert a .
Also $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \in \mathbb{R}$. Da $(a_n)_n$ Cauchyfolge ist gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} : |a_m - a_n| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq K.$$

Sei $n \geq K$ fest aber beliebig gewählt. Weiter sei $k > n$. Dann ist auch $n_k > n$ und somit ist $m = n_k > n$. Da $(a_n)_n$ Cauchyfolge ist folgt, dass $|a_{n_k} - a_n| < \varepsilon$ für alle $k > n$ und somit

$$|a - a_n| = \lim_{k \rightarrow \infty} |a_{n_k} - a_n| \leq \varepsilon.$$

Damit gilt $|a - a_n| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq K$ also ist a Grenzwert der Folge $(a_n)_n$. □

Name:

Matrikelnummer:

Punkte:

Aufgabe 3: Sei die reelle Folge $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, rekursiv definiert durch

$$\xi_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\xi_n + \frac{a}{\xi_n} \right)$$

mit $a > 0$, $\xi_1 > 1$. Zeigen Sie, dass $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.
Hinweis: Arithmetisches und geometrisches Mittel.

Lösungsvorschlag: Sei die Folge $(\xi_n)_n$ definiert wie in der Aufgabenstellung. Dann folgt aus der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel, dass

$$\xi_n = \frac{1}{2} \left(\xi_{n-1} + \frac{a}{\xi_{n-1}} \right) \geq \sqrt{\xi_{n-1} \cdot \frac{a}{\xi_{n-1}}} = \sqrt{a}.$$

Also gilt für alle $n \geq 2$

$$\xi_n \geq \sqrt{a}.$$

Damit kann man zeigen, dass die Folge $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist:

$$\frac{\xi_{n+1}}{\xi_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{\xi_n^2} \right) \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{(\sqrt{a})^2} \right) = 1.$$

Da jede monoton fallende nach unten beschränkte Folge einen Grenzwert besitzt wissen wir nun also dass der Grenzwert

$$\lambda := \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$$

existiert. Weiter gilt

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(\lambda + \frac{a}{\lambda} \right) \iff \lambda^2 = \frac{1}{2} \lambda^2 + \frac{a}{2} \implies \lambda = \sqrt{a}.$$

Somit ist die Aussage bewiesen, wobei noch zu beachten ist, dass $-\sqrt{a}$ nicht die Lösung sein kann, da $\xi_n \geq 0$ ist. □

Name:

Matrikelnummer:

Punkte:

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen sowie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, in denen die Potenzreihe konvergiert.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} x^n,$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} x^n,$

Lösungsvorschlag:

- (i) Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} x^n$ besitzt den Konvergenzradius 1 und konvergiert in $x \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $x \in [-1, 1)$ ist.

Beweis. Definiere $a_n := \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}}}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 1}} = 1$$

für $n \rightarrow \infty$, also ergibt sich für den Konvergenzradius r nach Definition

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = 1.$$

Weiter ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ nach dem Minorantenkriterium divergent, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ eine divergente Minorante ist, also konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} x^n$ nicht in $x = 1$. Da aber $(\frac{1}{\sqrt{n+1}})_{n+1}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} (-1)^n$ nach dem Leibniz-Kriterium, also konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} x^n$ in $x = -1$. $\square$

- (ii) Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} x^n$ besitzt den Konvergenzradius $\frac{e}{2}$ und konvergiert in $x \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $|x| < \frac{e}{2}$ ist.

Beweis. Definiere $a_n := \frac{2^n n!}{n^n} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{2^n \cdot n! \cdot (n+1)^{n+1}}{2^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot n^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{e}{2}$$

für $n \rightarrow \infty$. Also ist der Konvergenzradius gleich $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{e}{2}$.

Name:

Matrikelnummer:

Punkte:

Sei nun $x \in \{-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}\}$ und $b_n := a_n x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{a_{n+1}}{a_n} |x| = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{e}{2} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \geq 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Hier wird verwendet, dass $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ monoton wächst, also somit stets $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$ ist. Hieraus folgt induktiv, daß $|b_n| \geq |b_1| \geq e$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, also ist $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge. Somit ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent, das heißt, die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} x^n$ konvergiert nicht in x . $\square$

Name:

Matrikelnummer:

Punkte:

Aufgabe 5:

- (i) Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Für alle $r \in \mathbb{Q}$ gelte $f(r) = g(r)$. Zeigen Sie, dass dann $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (ii) Sei $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Gibt es dann eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(r) = g(r)$ für alle $r \in \mathbb{Q}$?
- (iii) Zeigen Sie, dass die Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(x) := \frac{x}{1+x^2}$$

gleichmäßig stetig ist.

Lösungsvorschlag:

- (i) Sei $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ beliebig. Zu zeigen ist $f(x_0) = g(x_0)$. Die rationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$. Also gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine rationale Zahl r_n mit $|x_0 - r_n| \leq \frac{1}{n}$. Die Folge $(r_n)_n$ konvergiert gegen x_0 und nach Voraussetzung gilt $g(r_n) = f(r_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da f, g stetig sind, gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$, also

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(r_n) = g(x_0). \quad \square$$

- (ii) Nein, ein Gegenbeispiel wäre die in der Vorlesung mehrfach erwähnt stetige Funktion $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cap \mathbb{Q} \\ -1 & \text{falls } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q} \\ 1 & \text{falls } x \in (\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

- (iii) Es gilt

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \leq \begin{cases} |x|, & |x| \leq 1 \\ \frac{|x|}{x^2} = \frac{1}{|x|}, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

also gilt $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $x, y \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{x(1+y^2) - y(1+x^2)}{1+x^2+y^2+x^2y^2} \right| = \left| \frac{x-y+xy^2-yx^2}{1+x^2+y^2+x^2y^2} \right| \\ &\leq \frac{|x-y|}{1+x^2+y^2+x^2y^2} + \frac{|xy||x-y|}{1+x^2+y^2+x^2y^2} \\ &\leq |x-y| + |x-y| \underbrace{\frac{|xy|}{1+x^2y^2}}_{=|f(xy)| \leq 1} \\ &\leq 2|x-y|. \end{aligned}$$

Damit ist f Lipschitz-stetig und somit gleichmäßig stetig. $\square$

Name:

Matrikelnummer:

Punkte:

Aufgabe 6:

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Bestimmen Sie alle $x \in I$, in denen die folgenden Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar sind und berechnen Sie dort deren Ableitung.

- (i) $I := (1, \infty)$ und $f(x) := e^{\frac{1}{1-x^2}}$.

- (ii) $I := \mathbb{R}$ und

$$f(x) := \begin{cases} e^{-(x+1)}, & x \in (-\infty, -1) \\ x^2, & x \in [-1, 0) \\ x^4, & x \in [0, \infty) \end{cases}$$

Lösungsvorschlag:

- (i) Behauptung: f ist auf ganz $(1, \infty)$ differenzierbar und hat die Ableitung

$$f'(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}} \frac{2x}{(1-x^2)^2} \quad \text{für alle } x \in I.$$

Beweis: f ist nach der Ketten- und der Quotientenregel ($(1-x^2) \neq 0$ für alle $x \in I$) differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}} \frac{-1}{(1-x^2)^2} (-2x) = e^{\frac{1}{1-x^2}} \frac{2x}{(1-x^2)^2} \quad \text{für alle } x \in I. \quad \square$$

- (ii) Behauptung: f ist differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ mit Ableitung

$$f'(x) := \begin{cases} -e^{-(x+1)}, & x \in (-\infty, -1) \\ 2x, & x \in (-1, 0) \\ 0, & x = 0 \\ 4x^3, & x \in (0, \infty) \end{cases}$$

Beweis: Auf der offenen Menge $(-\infty, -1)$ ist $f(x) = e^{-(x+1)}$ differenzierbar mit der Ableitung $f'(x) = -e^{-(x+1)}$.

Auf der offenen Menge $(-1, 0)$ ist $f(x) = x^2$ differenzierbar mit der Ableitung $f'(x) = 2x$.

Auf der offenen Menge $(0, \infty)$ ist $f(x) = x^4$ differenzierbar mit der Ableitung $f'(x) = 4x^3$.

Für $h \neq 0$ mit $|h| < 1$ gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^4}{h} = 0$$

Name: _____ Matrikelnummer: _____ Punkte:

und

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2}{h} = 0.$$

Somit ist f differenzierbar in $x = 0$ mit Ableitung $f'(0) = 0$.

Wegen

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(-1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - 2h}{h} = -2$$

und

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{-h} - 1}{h} = -1$$

ist f in -1 nicht differenzierbar. □

Name: _____ Matrikelnummer: _____ Punkte:

Aufgabe 7:

(i) Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definiert in einer Umgebung U von 0. Für ein $a > 1$ gelte $|f(x)| \leq |x|^a$ für alle $x \in U$. Zeigen Sie, dass f in $x_0 := 0$ differenzierbar ist und dort die Ableitung $f'(0) = 0$ besitzt.

(ii) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$|f(x) - f(y)| \leq 42|x - y|^{\frac{\pi}{2}}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f unendlich oft differenzierbar ist.

Lösungsvorschlag:

(i) Die Aussage lässt sich durch betrachten des Differenzenquotienten sehr einfach lösen. Wegen $|f(x)| \leq |x|^a$ ist $f(0) = 0$. Somit erhalten wir für den Differenzenquotienten:

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq |x|^{a-1} \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow 0.$$

Also existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten und f ist somit differenzierbar in $x_0 = 0$. Da der Grenzwert 0 ist, folgt $f'(0) = 0$.

(ii) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $|f(x) - f(y)| \leq 42|x - y|^{\frac{\pi}{2}}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Für beliebige aber feste $x, y \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \frac{42|x - y|^{\frac{\pi}{2}}}{|x - y|} = 42|x - y|^{\frac{\pi}{2}-1}.$$

Da $\frac{\pi}{2} > 1$ folgt

$$\lim_{x \rightarrow y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq 42 \lim_{x \rightarrow y} |x - y|^{\frac{\pi}{2}-1} = 0$$

Da x, y beliebig waren ist die Funktion f also differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ mit Ableitung $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit ist f insbesondere unendlich oft differenzierbar. □