Analysis 1 – Winter 2025/2026

Aufgabe 1 Bestimmen Sie alle Häufungspunkte folgender Folgen. Untersuchen Sie weiter die Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert für $n \to \infty$.

(a) $a_n := \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(b) $b_1 := \frac{3}{2}$, $b_{n+1} := 3 - \frac{2}{b_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 2 Begründen Sie, ob folgende Reihen konvergieren oder divergieren.

$$\text{(a)} \sum_{n\geq 1} \frac{(2n)!}{(n!)^2 5^n} \qquad \text{(b)} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+\sin(n)} \qquad \text{(c)} \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n}{1+n^2}$$

Aufgabe 3 (a) Es sei die Funktion

$$f\colon [0,1) \to \mathbb{R}; \qquad f(x) = \frac{\sin\left(\sqrt{x-x^2}\,\pi\right)}{\sqrt{1-x}}$$

gegeben.

(i) Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ existiert und geben Sie den Grenzwert an.

(ii) Sei $a \in (0,1)$ beliebig. Zeigen Sie, dass ein $\delta_a > 0$ existiert mit $f(x) \geq \delta_a$ für alle $x \in [a,1)$.

(b) Sei $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $g(0) = g(1)$. Zeigen Sie, dass ein $x \in [0, \frac{1}{2}]$ existiert mit $g(x) = g(x + \frac{1}{2})$.

Aufgabe 4 (a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass die folgende Funktion f stetig ist.

$$f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}; \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1-\cos x}{x^2} & \text{für } x > 0, \\ c & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \qquad g(x) = \begin{cases} x \cdot x^{-x}, & x > 0, \\ x, & x \leq 0, \end{cases}$$

stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 5 (a) Zeigen Sie, dass für $x \geq 0$ die Ungleichung

$$\ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x}$$

gilt.

(b) Untersuchen Sie die folgende Funktionsfolge $(f_n)_n$ auf gleichmäßig Konvergenz für $n \to \infty$ und geben Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion an. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}; \qquad f_n(x) = \frac{x^n}{n(1+x^{2n})}\,.$$

Aufgabe 6 Sei

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \qquad x \mapsto \mathrm{e}^x(x^2 - x - 1)\,.$$

(a) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen und -werte der Funktion f. Entscheiden Sie, ob es sich um Minima oder Maxima handelt.

(b) Begründen Sie, ob Minima oder Maxima global oder lediglich lokal sind.

Aufgabe 7 (a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom vom Grad 2 von

$$f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}; \qquad x \mapsto \ln(x)$$

im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. Zeigen Sie damit, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left(n - n^2 \ln\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2}.$$

(b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ so, dass

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} z^n$$

konvergiert.
Hinweis: Zur Untersuchung des Konvergenzverhalten für $|z|$ gleich dem Konvergenzradius kann Teil a) hilfreich sein.