Analysis 1 – Winter 2025/2026 – Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 Bestimmen Sie alle Häufungspunkte folgender Folgen. Untersuchen Sie weiter die Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert für $n \to \infty$.

(a) $a_n := \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(b) $b_1 := \frac{3}{2}$, $\qquad b_{n+1} := 3 - \frac{2}{b_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Lösungsvorschlag: (Aufgabe 1) **(a)** Wir betrachten die beiden Summanden separat. Für den zweiten Summanden gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Die Sinusfunktion $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ nimmt für natürliche Zahlen n periodisch die Werte $1, 0, -1, 0$ an. Wir zerlegen die Folge (a_n) daher in vier Teilfolgen. Sei $k \in \mathbb{N}$.

1. **Fall** $n = 4k+1$**:**

$$a_{4k+1} = \sin\left((4k+1)\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4k+1} = \sin\left(2\pi k + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4k+1} = 1 + \frac{1}{4k+1}.$$

Für $k \to \infty$ konvergiert diese Teilfolge gegen 1.

2. **Fall** $n = 4k+2$**:**

$$a_{4k+2} = \sin\left((4k+2)\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4k+2} = \sin\left(2\pi k + \pi\right) + \frac{1}{4k+2} = 0 + \frac{1}{4k+2}.$$

Für $k \to \infty$ konvergiert diese Teilfolge gegen 0.

3. **Fall** $n = 4k+3$**:**

$$a_{4k+3} = \sin\left((4k+3)\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4k+3} = \sin\left(2\pi k + \frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{4k+3} = -1 + \frac{1}{4k+3}.$$

Für $k \to \infty$ konvergiert diese Teilfolge gegen -1.

4. **Fall** $n = 4k+4$**:**

$$a_{4k+4} = \sin\left((4k+4)\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4k+4} = \sin\left(2\pi(k+1)\right) + \frac{1}{4k+4} = 0 + \frac{1}{4k+4}.$$

Für $k \to \infty$ konvergiert diese Teilfolge ebenfalls gegen 0.

Nach Vorlesung existieren keine weiteren Häufungspunkt (Lemma 2.22). Die Menge der Häufungspunkte ist somit $\{-1, 0, 1\}$. Da die Folge mehr als einen Häufungspunkt besitzt, ist sie insbesondere divergent.

(b) Wir zeigen, dass die Folge (b_n) streng monoton wachsend und nach oben beschränkt ist.

Wir zeigen zunächst induktiv, dass $1 < b_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist $b_1 = \frac{3}{2}$. Es gilt $1 < \frac{3}{2} < 2$.

Induktionsvoraussetzung (IV): Es gelte $1 < b_n < 2$ für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt: Zu zeigen ist $1 < b_{n+1} < 2$. Es gilt mit $b_{n+1} = 3 - \frac{2}{b_n}$, dass

$$1 < 3 - \frac{2}{b_n} < 2 \iff 2 < \frac{2}{b_n} < 1 \iff 1 < b_n < 2$$

Aus der (IV) folgt somit $1 < b_{n+1} < 2$. Die Folge ist also per vollständiger Induktion beschränkt.

Als nächstes zeigen wir die Monotonie. Wir betrachten die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder

$$b_{n+1} - b_n = 3 - \frac{2}{b_n} - b_n = \frac{3b_n - 2 - b_n^2}{b_n} = \frac{-(b_n^2 - 3b_n + 2)}{b_n} = \frac{-(b_n - 1)(b_n - 2)}{b_n}.$$

Aus obiger Induktion wissen wir, dass $1 < b_n < 2$. Folglich ist der Zähler $-(b_n - 1)(b_n - 2) > 0$ und damit der gesamte Bruch positiv. Es gilt also $b_{n+1} - b_n > 0$. Die Folge ist streng monoton wachsend. (Es gibt weitere Wege Monotonie zu zeigen.)

Nach dem *Konvergenzsatz für monotone Folgen* (Theorem 2.14) ist (b_n) also konvergent. Sei $b := \lim_{n\to\infty} b_n$. Dann

$$b = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(3 - \frac{2}{b_n}\right) = 3 - \frac{2}{b}.$$

Wir lösen diese Gleichung nach b auf

$$b = 3 - \frac{2}{b} \iff b^2 = 3b - 2 \iff b^2 - 3b + 2 = 0 \iff (b-1)(b-2) = 0$$

Die möglichen Grenzwerte sind $b = 1$ und $b = 2$. Da die Folge streng monoton wächst und bei $b_1 = \frac{3}{2}$ startet, muss $b \geq \frac{3}{2}$ gelten, also $\lim_{n\to\infty} b_n = 2$. (Die Menge der Häufungspunkte ist somit $\{2\}$.)

Aufgabe 2 Begründen Sie, ob folgende Reihen konvergieren oder divergieren.

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{(2n)!}{(n!)^2 5^n}$ (b) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+\sin(n)}$ (c) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n}{1+n^2}$

Lösungsvorschlag: (Aufgabe 2) **(a)** Sei $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 5^n}$. Wir wenden das *Quotientenkriterium* (Satz 3.14) an

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2 5^{n+1}}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2 5^n}} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \cdot \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{5^n}{5^{n+1}} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)}{1} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4n^2+6n+2}{5(n^2+2n+1)} \\
&= \frac{4n^2+6n+2}{5n^2+10n+5}.
\end{aligned}$$

Für den Grenzwert $n \to \infty$ betrachten wir die höchsten Potenzen von n

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}}{5+\frac{10}{n}+\frac{5}{n^2}} = \frac{4}{5}.$$

Da $\frac{4}{5} < 1$, konvergiert die Reihe absolut nach dem *Quotientenkriterium.*

(b) Gegeben ist die Reihe mit dem Glied $b_n = \frac{1}{n+\sin(n)}$. Da $\sin(n) \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt für den Nenner

$$n + \sin(n) \leq n + 1.$$

Daraus ergibt sich für die Brüche

$$\frac{1}{n+\sin(n)} \geq \frac{1}{n+1}.$$

Da die harmonische Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1}$ divergiert (Beispiel 3.2d), divergiert nach dem *Minorantenkriterium* (Satz 3.12b) auch die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+\sin(n)}$.

(c) Gegeben ist die alternierende Reihe mit $c_n = (-1)^n \frac{n}{1+n^2}$. Wir setzen $\tilde{c}_n = \frac{n}{1+n^2}$ und prüfen, dass $(\tilde{c}_n)_n$ eine fallende Nullfolge ist. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{c}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+1} = \frac{0}{0+1} = 0.$$

Die Folge $(\tilde{c}_n)$ ist also eine Nullfolge.

Um zu zeigen, dass $\tilde{c}_n$ monoton fallend ist, betrachten wir die zugehörige reelle Funktion $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ und leiten diese ab

$$f'(x) = \frac{1\cdot(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

Für $x \geq 1$ ist der Zähler $1 - x^2 \leq 0$ und der Nenner stets positiv. Also ist $f'(x) \leq 0$ für $x \geq 1$, was bedeutet, dass die Folge $(\tilde{c}_n)$ monoton fallend ist.

Da $(\tilde{c}_n)$ eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert die Reihe nach dem *Leibniz-Kriterium* (Satz 3.8).

Aufgabe 3 (a) Es sei die Funktion

$$f\colon [0,1) \to \mathbb{R}; \qquad f(x) = \frac{\sin\left(\sqrt{x-x^2}\,\pi\right)}{\sqrt{1-x}}$$

gegeben.

(i) Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ existiert und geben Sie den Grenzwert an.

(ii) Sei $a \in (0,1)$ beliebig. Zeigen Sie, dass ein $\delta_a > 0$ existiert mit $f(x) \geq \delta_a$ für alle $x \in [a,1)$.

(b) Sei $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $g(0) = g(1)$. Zeigen Sie, dass ein $x \in [0, \frac{1}{2}]$ existiert mit $g(x) = g(x + \frac{1}{2})$.

Lösungsvorschlag: (Aufgabe 3) **(a)** (i) Wir wollen die *Regel von L'Hospital* anwenden. Seien

$$g, h\colon (0,1) \to \mathbb{R}; \qquad g(x) = \sin\left(\sqrt{x-x^2}\,\pi\right), h(x) = \sqrt{1-x}$$

Es gilt g, h sind nach Kettenregel differenzierbar mit $g(x), h(x) \to 0$ für $x \to 1$. Weiter sind die Ableitungen gegeben durch

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos\left(\pi\sqrt{x-x^2}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(\pi\sqrt{x-x^2}\right) \\ &= \cos\left(\pi\sqrt{x-x^2}\right) \cdot \pi \cdot \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} \\ &= \cos\left(\pi\sqrt{x-x^2}\right) \cdot \pi \cdot \frac{1-2x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \end{aligned}$$

und

$$h'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}.$$

Betrachten wir den Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} \frac{g'(x)}{h'(x)} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{\cos\left(\pi\sqrt{x-x^2}\right) \cdot \pi \cdot \frac{1-2x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}}{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \left(-\pi \cos\left(\pi\sqrt{x-x^2}\right) \frac{1-2x}{\sqrt{x}}\right) \\ &= -\pi \cdot \cos\left(\pi\sqrt{1-1}\right) \cdot \frac{1-2(1)}{\sqrt{1}} = \pi. \end{aligned}$$

Nach *L'Hospital* (Theorem 5.30) gilt somit

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{g}{h}(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \pi.$$

(ii) Sei $a \in (0,1)$ beliebig gewählt. Wir betrachten das Intervall $[a,1)$. Da wir in Teil (i) gezeigt haben, dass der linksseitige Grenzwert an der Stelle 1 existiert und gleich π ist, können wir die Funktion f auf das abgeschlossene Intervall $[a,1]$ stetig fortsetzen.

Wir definieren dazu die stetig fortgesetzte Funktion $\tilde{f} \colon [a,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{für } x \in [a,1), \\ \pi, & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Das Intervall $[a,1]$ ist abgeschlossen und beschränkt. *Nach dem Satz vom (Minimum und) Maximum* (Theorem 4.24) existiert also ein $x_0 \in [a,1]$ mit

$$\tilde{f}(x_0) = \min_{x \in [a,1]} \tilde{f}(x) =: m.$$

Wir zeigen nun, dass dieses Minimum echt größer als Null ist ($m > 0$). Da $0 < x - x^2 = x(1-x) < 1$ für $x \in (0,1)$ gilt ist auch

$$0 < \sqrt{x - x^2}\pi < \pi$$

für $x \in (0,1)$, d.h. der Sinus ist positiv. Weiter gilt $0 < \sqrt{1-x}$. Also folgt $f(x) = \tilde{f} > 0$ für $x \in (0,1)$. Für $x = 1$ gilt ebenfalls $\tilde{f}(1) = \pi > 0$. Da also $\tilde{f}(x) > 0$ für alle $x \in [a,1]$ gilt, muss auch $m = \tilde{f}(x_0) > 0$ gelten.

Wir setzten nun $\delta_a \coloneqq m > 0$. Dann gilt für alle $x \in [a,1)$

$$f(x) = \tilde{f}(x) \geq \min_{t \in [a,1]} \tilde{f}(t) = m = \delta_a > 0.$$

(b) Wir betrachten die stetige Hilfsfunktion $h(x) \coloneqq g(x) - g(x + \frac{1}{2})$ für $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Es gilt $h(0) = g(0) - g(\frac{1}{2})$ und $h(\frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2}) - g(1)$. Da $g(0) = g(1)$ vorausgesetzt ist, folgt $h(\frac{1}{2}) = -h(0)$, also

$$h(0)h(\tfrac{1}{2}) \leq 0.$$

Nach dem *Nullstellensatz* (Korollar 4.28) muss die stetige Funktion h eine Nullstelle $x_* \in [0, \frac{1}{2}]$ besitzen und die Behauptung folgt, da

$$h(x_*) = 0 \iff g(x_*) = g(x_* + \tfrac{1}{2}).$$

Aufgabe 4 (a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass die folgende Funktion f stetig ist.

$$f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}; \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1-\cos x}{x^2} & \text{für } x > 0, \\ c & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \qquad g(x) = \begin{cases} x \cdot x^{-x}, & x > 0, \\ x, & x \leq 0, \end{cases}$$

stetig differenzierbar ist.

Lösungsvorschlag: (Aufgabe 4) **(a)** Wir definieren zunächst wieder g als Zähler der Funktion und h als Nenner

$$g, h\colon [0,\infty); \qquad g(x) = x^2 + 1 - \cos x, \qquad h(x) = x^2.$$

Offenbar sind die Funktionen g, h differenzierbar und für $x \to 0^+$ gehen sowohl $g(x)$ als auch $h(x)$ gegen 0. Wir betrachten die ersten Ableitungen

$$g'(x) = 2x + \sin x,$$
$$h'(x) = 2x.$$

Auch hier konvergieren $g'(x), h'(x) \to 0$ für $x \to 0^+$. Wir leiten ein zweites Mal ab

$$g''(x) = 2 + \cos x,$$
$$h''(x) = 2.$$

Nach zweimaligen Anwenden der *L'Hospitalsche Regel* (Theorem 5.30) folgt

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{h(x)} \overset{\text{L'H.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{g'(x)}{h'(x)} \overset{\text{L'H.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{g''(x)}{h''(x)} = \frac{3}{2}.$$

Damit die Funktion in $x = 0$ stetig ist, muss folglich gelten

$$c = \frac{3}{2}.$$

(b) Für $x < 0$ ist $g(x) = x$ ein Polynom und somit stetig differenzierbar mit der Ableitung

$$g'(x) = 1 \quad \text{für } x < 0.$$

Für $x > 0$ gilt per Definition $g(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x\ln(x)}$. Als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen ist g auch hier nach Ketten-/Produktregel stetig differenzierbar. Weiter gilt

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \cdot x^{-x} + x \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-x\ln(x)}\right) \\ &= x^{-x} + x \cdot \mathrm{e}^{-x\ln(x)} \cdot \left(-1 \cdot \ln(x) + (-x) \cdot \frac{1}{x}\right) \\ &= x^{-x} + x \cdot x^{-x} \cdot (-\ln(x) - 1) \\ &= x^{-x} \cdot (1 - x\ln(x) - x) \quad \text{für } x > 0. \end{aligned}$$

Wir prüfen die Differenzierbarkeit im Nullpunkt mithilfe des Differentialquotienten. Für den linksseitigen Grenzwert gilt

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h-0}{h} = 1.$$

Für den rechtsseitigen Grenzwert gilt

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h\cdot h^{-h}-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} h^{-h} = \lim_{h\to 0^+} \mathrm{e}^{-h\ln(h)}.$$

Da $\lim_{h\to 0^+} h\ln(h) = 0$ nach L'Hospital gilt und die Exponentialfunktion stetig ist, folgt

$$\lim_{h\to 0^+} \mathrm{e}^{-h\ln(h)} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

(Aus der Vorlesung Beispiel 5.31 wissen wir $\lim_{h\to 0^+} h^h = 1$. Das darf man hier alternativ natürlich auch verwenden.)

Da der linksseitige und der rechtsseitige Differentialquotient übereinstimmen, ist g nach Vorlesung in $x=0$ differenzierbar mit $g'(0)=1$.

Die Ableitung lautet nun

$$g'(x) = \begin{cases} x^{-x}(1-x\ln(x)-x), & x>0,\\ 1, & x\le 0.\end{cases}$$

Für $x\neq 0$ ist g' als Komposition stetiger Funktionen stetig. Betrachten wir die Stetigkeit bei $x=0$, also dass $\lim_{x\to 0^+} g'(x) = g'(0) = 1$ gilt. Wir betrachten den rechtsseitigen Grenzwert der Ableitung

$$\lim_{x\to 0^+} g'(x) = \lim_{x\to 0^+} \left[x^{-x}\cdot(1-x\ln(x)-x)\right].$$

Wir wissen bereits, dass $\lim_{x\to 0^+} x^{-x} = 1$ und $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ und trivialerweise $\lim_{x\to 0^+} x = 0$. Somit

$$\lim_{x\to 0^+} g'(x) = 1\cdot(1-0-0) = 1$$

und die Behauptung folgt.

Aufgabe 5 (a) Zeigen Sie, dass für $x \geq 0$ die Ungleichung

$$\ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x}$$

gilt.
(b) Untersuchen Sie die folgende Funktionsfolge $(f_n)_n$ auf gleichmäßig Konvergenz für $n \to \infty$ und geben Sie gegebenfalls die Grenzfunktion an. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n \colon [0,\infty) \to \mathbb{R}; \qquad f_n(x) = \frac{x^n}{n(1+x^{2n})}\,.$$

Lösungsvorschlag: (Aufgabe 5) **(a)** Wir betrachten die Differenz

$$g \colon [0,\infty) \to \mathbb{R}; \qquad g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}.$$

Es gilt $g(0) = 0$ und die Ableitung $g'(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$ ist für $x \geq 0$ nicht-negativ. Nach Vorlesung (Satz 5.24) ist g somit monoton steigend. Daraus folgt $g(x) \geq g(0) = 0$ für alle $x \geq 0$ oder äquivalent

$$\ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x},$$

was die gewünschte Ungleichung zeigt.

(b) Wir betrachten zunächst den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für festes $x \in [0,\infty)$. Dabei unterscheiden wir drei Fälle für x:

1. **Fall** $0 \leq x < 1$**:** Es gilt $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ und folglich auch $\lim_{n\to\infty} x^{2n} = 0$. Daraus folgt für den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n(1+x^{2n})} = \frac{0}{\infty \cdot (1+0)} = 0.$$

2. **Fall** $x = 1$**:** Einsetzen von $x = 1$ liefert $f_n(1) = \frac{1^n}{n(1+1^{2n})} = \frac{1}{2n}$. Somit ist

$$\lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0.$$

3. **Fall** $x > 1$**:** Um den Grenzwert zu bestimmen, erweitern wir den Bruch mit x^{-n}

$$f_n(x) = \frac{x^n}{nx^n(x^{-n}+x^n)} = \frac{1}{n(x^{-n}+x^n)}.$$

Da für $x > 1$ der $x^n \to \infty$ und $x^{-n} \to 0$ für $n \to \infty$, folgt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Die punktweise Grenzfunktion ist demnach für alle $x \in [0,\infty)$ die Nullfunktion

$$f \colon [0,\infty) \to \mathbb{R}; \qquad f(x) = 0.$$

Für die gleichmäßige Konvergenz müssen wir zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Es gilt

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x^n}{n(1+x^{2n})} - 0 \right| = \frac{x^n}{n(1+x^{2n})} = f_n(x).$$

Wir bestimmen zunächst die Ableitung mit Ketten- und Produktregel oder Quotientenregel und setzen diese 0

$$f_n'(x) = -\frac{x^{n-1}(x^{2n}-1)}{(1+x^{2n})^2} = 0 \iff x \in \{0,1\}.$$

Da $f_n(0) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$, sowie $f_n(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,\infty)$, folgt nach einer Übung, dass f_n ein globales Maximum annimmt. (Es gilt z.B. $f_n(1) = \frac{1}{2n}$. Da $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$ existiert ein $b > 0$ mit $f_n(x) \leq \frac{1}{2n}$ für $x \geq b$. Nach dem Satz vom Maximum nimmt f_n auf dem Intervall $[0,b]$ ein Maximum größer gleich $f_n(1)$ an. Dieses ist dann aufgrund der Wahl von b bereits global.) Nach Vorlesung (Satz 5.18) muss dieses bei $x = 1$ liegen.

Folglich gilt für das Supremum

$$\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = f_n(1) = \frac{1}{2n} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Die Funktionenfolge konvergiert also gleichmäßig gegen 0.

Aufgabe 6 Sei

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \qquad x \mapsto \mathrm{e}^x(x^2 - x - 1)\,.$$

(a) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen und -werte der Funktion f. Entscheiden Sie, ob es sich um Minima oder Maxima handelt.

(b) Begründen Sie, ob Minima oder Maxima global oder lediglich lokal sind.

Lösungsvorschlag: (Aufgabe 6) **(a)**

Um die lokalen Extremstellen zu finden, untersuchen wir die erste und zweite Ableitung der Funktion $f(x)$. Mit Ketten- und Produktregel gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^x \cdot (x^2 - x - 1) + \mathrm{e}^x \cdot (2x - 1) = \mathrm{e}^x \cdot (x^2 + x - 2)\,, \\ f''(x) &= \mathrm{e}^x \cdot (x^2 + x - 2) + \mathrm{e}^x \cdot (2x + 1) = \mathrm{e}^x \cdot (x^2 + 3x - 1)\,. \end{aligned}$$

Wir wollen erneut Satz 5.18 anwenden, d.h. wir bestimmen zunächst die Nullstellen der Ableitung

$$\mathrm{e}^x \cdot (x^2 + x - 2) = 0 \iff (x^2 + x - 2) = (x + 2)(x - 1) = 0.$$

Die kritischen Stellen sind somit $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$. Als nächstes betrachten wir die zweite Ableitung und zeigen, dass diese nicht verschwindet, siehe Korollar 5.25.

1. **Fall $x_1 = -2$:** $f''(-2) = \mathrm{e}^{-2} \cdot (4 - 6 - 1) = -3\mathrm{e}^{-2} < 0\,.$
   Da die zweite Ableitung negativ ist, liegt bei $x_1 = -2$ nach Vorlesung ein lokales Maximum vor. Der zugehörige Funktionswert lautet
   $$f(-2) = \mathrm{e}^{-2} \cdot (4 + 2 - 1) = \frac{5}{\mathrm{e}^2}\,.$$

2. **Fall $x_2 = 1$:** $f''(1) = \mathrm{e} \cdot (1 + 3 - 1) = 3\mathrm{e} > 0\,.$
   Da die zweite Ableitung positiv ist, liegt bei $x_2 = 1$ nach Vorlesung ein lokales Minimum vor. Der zugehörige Funktionswert lautet
   $$f(1) = \mathrm{e}^1 \cdot (1^2 - 1 - 1) = -\mathrm{e}\,.$$

(b) Wir betrachten das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$. Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x(x^2 - x - 1) = \infty\,.$$

Da die Funktion nach oben unbeschränkt ist, gibt es kein globales Maximum. Das Maximum bei $x_1 = -2$ ist daher lediglich ein lokales Maximum.

Weiter ist

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x(x^2 - x - 1) = 0\,.$$

Also existiert ein $a > 1$ mit $f(x) > f(1) = -\mathrm{e}$ für $x \notin (-a, a)$. Nach dem *Satz vom Maximum* wird das Minimum in $[-a, a]$ angenommen und nach obiger Überlegung muss dieses bei $x_2 = 1$ liegen. Somit ist das Minimum bei $x_2 = 1$ folglich ein globales Minimum.

Aufgabe 7 (a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom vom Grad 2 von

$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}; \qquad x \mapsto \ln(x)$$

im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. Zeigen Sie damit, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left(n - n^2 \ln\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2}.$$

(b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ so, dass

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} z^n$$

konvergiert.
Hinweis: Zur Untersuchung des Konvergenzverhalten für $|z|$ gleich dem Konvergenzradius kann Teil a) hilfreich sein.

Lösungsvorschlag: (Aufgabe 7) **(a)** Wir berechnen zunächst die ersten beiden Ableitungen von $f(x)$ und werten diese am Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ aus:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x) && \Longrightarrow f(1) = 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{x} && \Longrightarrow f'(1) = 1 \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2} && \Longrightarrow f''(1) = -1 \end{aligned}$$

Das Taylor-Polynom zweiten Grades $T_{2,0}(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ lautet somit

$$T_{2,0}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 .$$

Nach dem *Satz von Taylor* (Theorem 5.38.) gilt mit dem Peano-Restglied für $x \to 1$

$$\ln(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right),$$

d.h.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x) - ((x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2)}{(x-1)^2} = 0.$$

Setzen wir $x_n = 1 + \frac{1}{n}$, so erhalten entsprechend

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n}) - ((\frac{1}{n}) - \frac{1}{2}(\frac{1}{n})^2)}{(\frac{1}{n})^2} = \lim_{n\to\infty} \left(n^2 \ln(1+\tfrac{1}{n}) - n + \frac{1}{2}\right) = 0$$

oder anders ausgedrückt

$$\lim_{n\to\infty} \left(n - n^2 \ln\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2}.$$

(b) Wir betrachten die Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ mit den Koeffizienten $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Zur Bestimmung des Konvergenzradius ρ verwenden wir die aus Definition 3.28 bekannte Formel. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Der Konvergenzradius ist somit

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \mathrm{e}.$$

Die Reihe konvergiert also absolut für alle $|z| < \mathrm{e}$ und divergiert für $|z| > \mathrm{e}$.

Wir zeigen mit Hilfe des *Trivalkriteriums* (Korollar 3.6), dass die Reihe für $|z| = \mathrm{e}$ divergiert. Um dies auf Teil (a) zurückzuführen betrachten wir $\ln(|a_n z^n|)$. Für $|z| = \mathrm{e}$ gilt

$$\ln(|a_n z^n|) = \ln\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \mathrm{e}^n\right) = n^2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + n\ln(\mathrm{e})$$
$$= n - n^2 \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = n - n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Nach Teil (a) wissen wir jetzt

$$\lim_{n\to\infty} \ln(|a_n z^n|) = \lim_{n\to\infty} \left(n - n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2}.$$

Da die Exponentialfunktion stetig ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} |a_n z^n| = \lim_{n\to\infty} \exp(\ln(|a_n z^n|)) = \exp\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\mathrm{e}} \neq 0.$$

Die Folge der Summanden für $|z| = e$ ist somit keine Nullfolge und die Reihe divergier in diesem Fall nach Vorlesung (Korollar 3.6).

Die Reihe konvergiert genau dann, wenn $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \mathrm{e}$.