01.03.2013
Reichel

Analysis I, F13

Aufgabe 1
Untersuchen Sie die angegebenen Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz. (je 1 Punkt)

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(2n+1)!}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-2^{-n}}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+n^2}}$.

Aufgabe 2 (je 1,5 Punkte)
Zeigen Sie jeweils, dass die angegebene Funktion auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung für alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \log\left(\frac{2+\sin(x)}{2+\cos(x)}\right)$.

(b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := |x|^{\frac{5}{4}}$.

Aufgabe 3 (je 1,5 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, sodass die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{2^n n}$ konvergiert.

(b) Es sei $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{1}{x^3+1}$. Bestimmen Sie eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für $x \in (-1,1)$.

Aufgabe 4 (je 1,5 Punkte)
Untersuchen Sie jeweils die angegebene Funktion auf Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitzstetigkeit auf dem angegebenen Definitionsbereich.

(a) $f: (1,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{\cos(\sqrt{x})}{x^2}$,

(b) $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := x^{\frac{1}{3}} - x$.

Aufgabe 1

(a) *Behauptung:* Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(2n+1)!}$ konvergiert absolut.

Beweis: Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^n}{(2n+1)!} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} = e^e.$$

Also konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(2n+1)!}$ nach dem Majorantenkriterium absolut. □

(b) *Behauptung:* Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} - 2^{-n}}$ divergiert.

Beweis: Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} - 2^{-n}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

und letztere Reihe divergiert nach Vorlesung. Nach dem Minorantenkriterium divergiert daher auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} - 2^{-n}}$.

□

(c) *Behauptung:* Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+n^2}}$ konvergiert, aber nicht absolut.

Beweis: Wir setzen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$. Dies ist eine positive Nullfolge und für $n \in \mathbb{N}$

$$1 + (n+1)^2 > 1 + n^2 \iff \sqrt{1+(n+1)^2} > \sqrt{1+n^2} \iff a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} < \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} = a_n.$$

Also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend und damit liefert das Leibniz-Kriterium die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Hingegen gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}n}.$$

Dann folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}n}.$$

und letztere Reihe divergiert nach Vorlesung. Nach dem Minorantenkriterium divergiert daher auch die erste Reihe.

□

Aufgabe 2

(a) *Behauptung:* Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \log\left(\frac{2+\sin(x)}{2+\cos(x)}\right)$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und

und letztere Reihe konvergiert nach dem Leibnizkriterium. Für $x = \sqrt[3]{2}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

und letztere Reihe divergiert nach Vorlesung. $\square$

(b) *Behauptung:* Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n := \begin{cases} (-1)^n, & n = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ für $x \in (-1,1)$, wobei $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \dfrac{1}{x^3+1}$ definiert ist.

Beweis: Für $x \in (-1,1)$ gilt $|(-x)^3| < 1$ und daher

$$f(x) = \frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{1-(-x)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{3k} x^{3k}.$$

Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$a_n := \begin{cases} (-1)^n, & n = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

gilt daher $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für $x \in (-1,1)$. $\square$

Aufgabe 4

(a) *Behauptung:* Die Funktion $f : (1,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{x^2}$ ist Lipschitzstetig, also insbesondere stetig und gleichmäßig stetig, auf $(1,\infty)$.

Beweis: Die Funktion f ist auf $(1,\infty)$ als Verkettung differenzierbarer Funktion differenzierbar auf $(1,\infty)$. Für $x \in (1,\infty)$ gilt außerdem

$$|f'(x)| = \left| \frac{\frac{1}{2}\sin(\sqrt{x})\sqrt{x} + 2\cos(\sqrt{x})}{x^3} \right| \leq \frac{1}{2x^{\frac{5}{2}}} + \frac{2}{x^3} \leq \frac{5}{2}.$$

Damit ist f' beschränkt auf $(1,\infty)$ und f nach Vorlesung auf $(1,\infty)$ Lipschitzstetig. $\square$

(b) *Behauptung:* Die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := x^{\frac{1}{3}} - x$ ist gleichmäßig stetig, also insbesondere stetig, auf $[0,1]$, aber nicht Lipschitzstetig.

Beweis: Es sei $x_0 \in [0,1]$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0,1]$ mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$. Dann folgt

$$f(x_n) = x_n^{\frac{1}{3}} - x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0^{\frac{1}{3}} - x_0 = f(x_0)$$

und damit ist f stetig auf $[0,1]$ (diese Aussage kann auch zitiert werden, falls dies in der Vorlesung formuliert wurde). Da $[0,1]$ beschränkt und abgeschlossen ist, folgt nach Vorlesung sofort die gleichmäßige Stetigkeit von f auf $[0,1]$.

(a) *Behauptung:* $(f_n \cdot g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf I punktweise gegen $h = f \cdot g$.

Beweis: Es sei $x \in I$. Wegen $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ und $g_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} g(x)$ gilt $f_n(x) \cdot g_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)g(x)$. Folglich konvergiert $(f_n \cdot g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf I punktweise gegen $h := f \cdot g$. □

(b) *Behauptung:* $(f_n \cdot g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf I gleichmäßig gegen $f \cdot g$.

Beweis: Da $f_n, g_n \in C(I,\mathbb{R})$ für $n \in \mathbb{N}$ folgt $f, g \in C(I,\mathbb{R})$. Insbesondere gilt daher $C_1 := \|f\|_\infty < \infty$ und $\|g\|_\infty < \infty$. Da $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf I gleichmäßig gegen g konvergiert existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|g_n - g\|_\infty < 1$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$. Für $n \geq n_0$ folgt damit

$$\|g_n\|_\infty \leq \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty < 1 + \|g\| =: C_2 < \infty$$

und

$$\begin{aligned}
\|f_n g_n - fg\|_\infty &\leq \|f_n g_n - f g_n\|_\infty + \|f g_n - fg\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty \|g_n\|_\infty + \|g_n - g\|_\infty \|f\|_\infty \\
&\leq C_2 \|f_n - f\|_\infty + C_1 \|g_n - g\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 7

(a) *Behauptung:* $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{x^2 - \log(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x = \frac{2(e^5-6)}{5}$.

Beweis: Die Funktion $f : [1, e^2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{x^2 - \log(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ ist stetig, also integrierbar. Mit $g : [1, e^2] \to [1, e]$ mit $g(x) := \sqrt{x}$ gilt per Substitutionsregel

$$\begin{aligned}
\int_1^{e^2} f(x)\, \mathrm{d}x &= 2\int_1^{e^2} g'(x)\big(g(x)^4 - \log(g(x))\big)\, \mathrm{d}x = 2\int_{g(1)}^{g(e^2)} y^4 - \log(y)\, \mathrm{d}y \\
&= 2[\tfrac{1}{5}x^5]_1^e - 2[y\log(y) - y]_1^e = \frac{2(e^5-1)}{5} - 2 = \frac{2(e^5-6)}{5}.
\end{aligned}$$

□

(b) *Behauptung:* $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{2x}\sin^2(x)\, \mathrm{d}x = \frac{e^{2\pi}-1}{8}$.

Beweis: Die Funktion $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{2x}\sin^2(x)$ ist offensichtlich stetig und damit integrierbar. Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} e^{2x}\sin^2(x)\, \mathrm{d}x &\overset{PI}{=} [\tfrac{1}{2}e^{2x}\sin^2(x)]_0^\pi - \int_0^\pi e^{2x}\sin(x)\cos(x)\, \mathrm{d}x \\
&\overset{PI}{=} -[\tfrac{1}{2}e^{2x}\sin(x)\cos(x)]_0^\pi + \int_0^\pi \tfrac{1}{2}e^{2x}(\cos^2(x) - \sin^2(x))\, \mathrm{d}x \\
&= [\tfrac{1}{4}e^{2x}]_0^\pi - \int_0^\pi e^{2x}\sin^2(x)\, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Also

$$\int_0^{\pi} e^{2x}\sin^2(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(\frac{e^{2\pi}}{4} - \frac{1}{4}\Big) = \frac{e^{2\pi}-1}{8}.$$

□

Um zu zeigen, dass f auf $[0,1]$ nicht Lipschitzstetig ist, führen wir einen Widerspruchsbeweis. *Annahme:* f ist auf $[0,1]$ Lipschitzstetig. Dann existiert $L \geq 0$ mit $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$ für alle $x, y \in [0,1]$. Setzen wir $y = 0$ und $x \in (0,1)$ erhalten wir

$$x^{\frac{1}{3}} - x = f(x) = |f(x)| \leq L|x| = Lx \implies x^{-\frac{2}{3}} - 1 \leq L \implies x \geq \frac{1}{(L+1)^{\frac{3}{2}}}$$

und wegen $\frac{1}{(1+L)^{\frac{3}{2}}} > 0$ dies ist ein Widerspruch zu $x \in (0,1)$. □

Aufgabe 5

Voraussetzung: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar und $f(x_0) > 0$.

Behauptung (a): Es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(x_0 + \frac{1}{n}) > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$.

Beweis: Da f in x_0 differenzierbar ist, folgt auch die Stetigkeit von f in x_0. Also gilt $f(x_0+\frac{1}{n}) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0)$ und daher existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$. Folglich gilt für $n \geq n_0$

$$f(x_0 + \frac{1}{n}) = f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0) + f(x_0) > -\frac{f(x_0)}{2} + f(x_0) = \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

□

Behauptung (b): Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \left(\frac{f(x_0 + \frac{1}{n})}{f(x_0)}\right)^n$ gilt $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \exp\left(\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right)$.

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\log(a_n) = \frac{\log(f(x_0 + \frac{1}{n})) - \log(f(x_0))}{\frac{1}{n}}. \qquad (*)$$

Da die Funktion $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, liefert die Kettenregel die Differenzierbarkeit von $\log \circ f$ in x_0 mit $(\log \circ f)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$. Also gilt für alle $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $h_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, dass

$$\frac{\log(f(x_0 + h_n)) - \log(f(x_0))}{h_n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

Mit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $h_n := \frac{1}{n}$ folgt mit $(*)$, dass $\log(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$. Es folgt weiter für $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \exp(\log(a_n)) \xrightarrow{n\to\infty} \exp\left(\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right),$$

wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$. □

Aufgabe 6

Voraussetzung: Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n, g_n \in C(I,\mathbb{R})$ für $n \in \mathbb{N}$ sowie $f, g : I \to \mathbb{R}$. Ferner konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf I gleichmäßig gegen f und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf I gleichmäßig gegen g.

es gilt für $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{2+\sin(x)} + \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)}.$$

Beweis: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = \log(2+\sin(x)) - \log(2+\cos(x)).$$

f ist also nach der Kettenregel als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar und

$$f'(x) = \cos(x)\log'(2+\sin(x)) + \sin(x)\log'(2+\cos(x)) = \frac{\cos(x)}{2+\sin(x)} + \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)}.$$

$\square$

(b) *Behauptung:* Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := |x|^{\frac{5}{4}}$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{5}{4}(-x)^{\frac{1}{4}}, & x \in (-\infty, 0), \\ 0, & x = 0, \\ \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}, & x \in (0,\infty). \end{cases}$$

Beweis: Für $x \in (-\infty, 0)$ gilt $f(x) = (-x)^{\frac{5}{4}}$ und für $f(x) = x^{\frac{5}{4}}$ für $x \in (0,\infty)$. Daher sind $f|_{(-\infty,0)}$ und $f|_{(0,\infty)}$ nach der Kettenregel stetig differenzierbare Funktionen und es gilt

$$(f|_{(0,\infty)})'(x) = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}} \quad \text{für } x \in (0,\infty) \qquad \text{und} \qquad (f|_{(-\infty,0)})'(x) = -\frac{5}{4}(-x)^{\frac{1}{4}} \quad \text{für } x \in (-\infty, 0).$$

Folglich gilt $f'(x) = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$ für $x \in (0,\infty)$ und $f'(x) = -\frac{5}{4}(-x)^{\frac{1}{4}}$ für $x \in (-\infty,0)$.
An der Stelle $x = 0$ folgt mit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $h_n \to 0$

$$\left|\frac{f(h_n) - f(0)}{h_n}\right| = \frac{|h_n|^{\frac{5}{4}}}{|h_n|} = |h_n|^{\frac{1}{4}} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

da die Funktion $x \mapsto x^{\frac{1}{4}}$ stetig auf $[0,\infty)$ ist. $\square$

Aufgabe 3

(a) *Behauptung:* Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{2^n n}$ konvergiert genau dann, wenn $x \in [-2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}})$.

Beweis: Wir definieren $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch $a_n := \frac{1}{2^n n}$ und $y := x^3$. Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n$ ist gegeben durch $r = 2$, denn

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}.$$

Also konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{3n}$ absolut wenn $x \in (-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$. An der Stelle $x = -\sqrt[3]{2}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Aufgabe 5
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar und $f(x_0) > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $f(x_0 + \frac{1}{n}) > 0$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$. (1 Punkt)

(b) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $a_n := \left(\dfrac{f(x_0 + \frac{1}{n})}{f(x_0)}\right)^n$. Zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \exp\left(\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right)$.
(2 Punkte)

Hinweis zu (b): Betrachten Sie $\log(a_n)$.

Aufgabe 6
Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n, g_n \in C(I, \mathbb{R})$ für $n \in \mathbb{N}$ sowie $f, g : I \to \mathbb{R}$. Ferner konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf I gleichmäßig gegen f und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf I gleichmäßig gegen g.

(a) Bestimmen Sie die Funktion $h : I \to \mathbb{R}$ mit $f_n \cdot g_n \xrightarrow{n\to\infty} h$ punktweise auf I. (0,5 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass $(f_n \cdot g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf I gleichmäßig gegen h konvergiert. (2,5 Punkte)

Aufgabe 7
Berechnen Sie jeweils den Wert des angegebenen Integrals. (je 1,5 Punkte)

(a) $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{x^2 - \log(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x,$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{2x} \sin^2(x)\, \mathrm{d}x.$