Mathematik Fachschaft Informatik
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

01.03.2014
Hundertmark

Analysis I, F14

Aufgabe 1
Beweisen Sie: 157 ist ein Teiler von $12^{n+1} + 13^{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie alle Häufungswerte und, falls existent, den Limes superior und den Limes inferior der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \begin{cases} \sqrt[n]{n} \cdot \sinh(n), & n \text{ ungerade}, \\ (-1)^{n/2} \cdot \frac{n-1}{n+3}, & n \text{ gerade}. \end{cases}$$

Aufgabe 3
Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen und bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Potenzreihen konvergieren.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n} x^n.$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3} x^n.$$

Aufgabe 4
Beweisen Sie für alle $y > x > 0$ die Ungleichung

$$ye^{y^2} - xe^{x^2} \leq (y-x)(1+2y^2)e^{y^2}.$$

Aufgabe 5
Beweisen Sie, dass die Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := e^x - \ln x - 3$ im Intervall $[1,2]$ genau einen Fixpunkt hat.

Aufgabe 6
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x\,|x| + \frac{e^x}{x+1}, & x \neq -1, \\ 1, & x = -1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen f differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung von f in diesen x.

Aufgabe 7
Begründen Sie, ob die folgenden Integrale existieren, und berechnen Sie gegenbenfalls ihren Wert.

(a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 (\cos x)^3 \, dx.$$

(b)

$$\int_1^2 x^2 e^{-x} \, dx.$$

Da $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, ist diese Reihe nach dem Leibnizkriterium konvergent. Also ist die zu untersuchende Potenzreihe in $x = 1/2$ konvergent. Setzt man $x = -1/2$ in die Potenzreihe ein, so erhält man die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

welche divergiert. Somit ist die Potenzreihe in $x = -1/2$ nicht konvergent. Da Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzkreises konvergieren und außerhalb dieses divergieren, konvergiert die zu untersuchenden Potenzreihe daher insgesamt genau in denjenigen $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in (-1/2, 1/2]$.

(b) Setze $a_n := \frac{n^n}{3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{n}{\sqrt[n]{3}} \to \infty$$

für $n \to \infty$ wegen $\sqrt[n]{3} \to 1$ für $n \to \infty$. Somit ist

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty.$$

Der Konvergenzradius ist damit 0. Folglich konvergiert die Potenzreihe nur im ihrem Entwicklungspunkt $x = 0$.

Aufgabe 4

Seien $y > x > 0$. Definiere $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch $f(t) := te^{t^2}$. Dann gilt

$$f'(t) = e^{t^2} + 2t^2e^{t^2} = (1 + 2t^2)e^{t^2}.$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in (x, y)$ mit

$$ye^{y^2} - xe^{x^2} = f(y) - f(x) = (y - x)f'(\xi) = (y - x)(1 + 2\xi^2)e^{\xi^2}.$$

Da die Funktionen $t \mapsto 1 + 2t^2$ und $t \mapsto e^{t^2}$ auf $(0,\infty)$ monoton wachsend und positiv sind, wächst f' auf $(0,\infty)$ monoton. Daher gilt

$$(1 + 2\xi^2)e^{\xi^2} \leq (1 + 2y^2)e^{y^2}.$$

Wegen $y - x > 0$ ergibt sich

$$ye^{y^2} - xe^{x^2} \leq (y - x)(1 + 2y^2)e^{y^2}.$$

Aufgabe 5

Setze $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch $g(x) := f(x) - x = e^x - \ln x - 3 - x$. Mit $e \in \left[\frac{5}{2}, 3\right]$ und weil der Logarithmus monoton wachsend ist, erhält man

$$g(1) = e^1 - \ln 1 - 3 - 1 = e - 3 - 1 \leq -1 \leq 0 \quad \text{und}$$
$$g(2) = e^2 - \ln 2 - 3 - 2 \geq \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 1 - 3 - 2 = \frac{25}{4} - 6 = \frac{1}{4} \geq 0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz hat g somit eine Nullstelle in $[1,2]$. Ferner haben wir $g'(x) = e^x - \frac{1}{x} - 1$. Da auf $[1,2]$ die Funktion $e \mapsto e^x$ wächst und die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ fällt, erhalten wir

$$g'(x) \geq g'(1) = e^1 - \frac{1}{1} - 1 > 0$$

$[1,2]$ und daher auf diesem Riemann-intergrierbar. Mit partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \left[-x^2e^{-x}\right]_1^2 - \int_1^2 -2xe^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= -4e^{-2} + e^{-1} + \left[-2xe^{-x}\right]_1^2 - \int_1^2 -2e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= -4e^{-2} + e^{-1} - 4e^{-2} + 2e^{-1} + \left[-2e^{-x}\right]_1^2 \\
&= -8e^{-2} + 3e^{-1} - 2e^{-2} + 2e^{-1} \\
&= 5e^{-1} - 10e^{-2}.
\end{aligned}$$

für alle $x \in [1,2]$. Somit wächst g streng monoton in $[1,2]$ und kann daher keine weitere Nullstelle in $[1,2]$ haben. Da die Nullstellen von g genau den Fixpunkten von f entsprechen, hat f folglich genau einen Fixpunkt in $[1,2]$.

Aufgabe 6

Auf der offenen Mengen $(-\infty,-1)$ und $(-1,0)$ ist $f(x) = -x^2 + \frac{e^x}{x+1}$ und hat nach der Quotientenregel dort die Ableitung

$$f'(x) = -2x + \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = -2x + \frac{xe^x}{(x+1)^2}.$$

Auf der offenen Menge $(0,\infty)$ ist $f(x) = x^2 + \frac{e^x}{x+1}$ und hat nach der Quotientenregel dort die Ableitung

$$f'(x) = 2x + \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = 2x + \frac{xe^x}{(x+1)^2}.$$

Definiere $g : (-1,1) \to \mathbb{R}$ durch $g(x) := x\,|x|$. Für $h \neq 0$ mit $|h| < 1$ gilt

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{g(0+h)-g(0)}{h} - 0\right| = \lim_{h\to 0}\left|\frac{h\,|h|}{h}\right| = \lim_{h\to 0}|h| = 0.$$

Also ist g differenzierbar in $x = 0$ mit Ableitung 0. Damit ist auch f in $x = 0$ differenzierbar mit Ableitung

$$f'(0) = 0 + \frac{xe^x}{(x+1)^2}\bigg|_{x=0} = 0.$$

Für die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := -1 - \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \to -1$ für $n \to \infty$ und

$$f(x_n) = -x_n^2 + \frac{e^{x_n}}{x_n + 1} = -(-1 - \frac{1}{n})^2 + e^{-1-\frac{1}{n}} \cdot (-n).$$

Wegen $-(-1-\frac{1}{n})^2 \to -1$ und $e^{-1-\frac{1}{n}} \to e^{-1}$ für $n \to -\infty$ gilt $f(x_n) \to -\infty$ für $n \to \infty$. Damit ist f in $x = -1$ unstetig und daher dort nicht differenzierbar.[1]

Aufgabe 7

(a) Die Funktion $x \mapsto (\sin x)^2(\cos x)^3$ ist stetig auf dem abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ und daher über dieses Intervall Riemann-integrierbar. Wegen $\sin(0) = 0$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ und $(\cos x)^2 = 1 - (\sin x)^2$ für alle $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt mit Hilfe der Substitution $y = \sin x$, dass

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2(\cos x)^3\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big((\sin x)^2 - (\sin x)^4\big)\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (y^2 - y^4)\,dy = \big[\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5\big]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}.\end{aligned}$$

(b) Die Funktion $x \mapsto x^2e^{-x}$ ist stetig auf dem abgeschlossenen und beschränkten Intervall

[1] Vom Korrektor wurde vorgeschlagen, man sollte zum Beweis der Unstetigkeit in -1 eine beliebige gegen -1 konvergente Folge von Argumenten verwenden, und nicht die aufgeschriebene konkrete.

Aufgabe 1

Wir beweisen die Aussage mit vollständiger Induktion.
Induktionsanfang: $n = 1$: 157 teilt $12^{1+1} + 13^{2\cdot 1-1} = 12^2 + 13^1 = 157$.
Induktionsvoraussetzung: Es sei 157 ein Teiler von $12^{n+1} + 13^{2n-1}$ für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschluss: $n \rightsquigarrow n+1$: Es gilt

$$\begin{aligned} 12^{(n+1)+1} + 13^{2(n+1)-1} &= 12 \cdot 12^{n+1} + 13^2 \cdot 13^{2n-1} \\ &= 12 \cdot (12^{n+1} + 13^{2n-1}) + (13^2 - 12) \cdot 13^{2n-1} \\ &= 12 \cdot (12^{n+1} + 13^{2n-1}) + 157 \cdot 13^{2n-1}. \end{aligned}$$

Da 157 nach Induktionsvoraussetzung ein Teiler von $12^{n+1} + 13^{2n-1}$ ist und weil 13^{2n-1} eine natürliche Zahl ist, ist daher insgesamt 157 ein Teiler von $12^{(n+1)+1} + 13^{2(n+1)-1}$, was den Beweis abschließt.

Aufgabe 2

Wir betrachten die drei Teilfolgen $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_k := a_{4k}$, $c_k := a_{4k-2}$ und $d_k := a_{2k-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$b_k = \frac{4k-1}{4k+3} = \frac{4-\frac{1}{k}}{4+\frac{3}{k}} \to 1$$

und

$$c_k = (-1) \cdot \frac{4k-2-1}{4k-2+3} = -\frac{4k-3}{4k-1} = -\frac{4-\frac{3}{k}}{4-\frac{1}{k}} \to -1$$

für $k \to \infty$. -1 und 1 sind damit Häufungswerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wegen $\sqrt[n]{n} \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und weil die Folge $(\sinh(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sowie jeder ihrer Teilfolgen nach oben unbeschränkt ist, hat die Teilfolge $c_k = \sqrt[2k-1]{(2k-1)} \cdot \sinh(2k-1)$ keine konvergente Teilfolge.
Da jedes Folgenglied von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einer der drei oben definierten Teilfolge vorkommt, hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine weiteren als die bereits genannten Häufungswerte und ist nach unten beschränkt. Somit ist $\{-1, 1\}$ die Menge der Häufungswerte und der Limes inferior ist -1. Der Limes superior existiert nicht (bzw. ist ∞), da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben unbeschränkt ist.

Aufgabe 3

(a) Setze $a_n := (-1)^n \frac{2^n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{\sqrt[n]{n}} \to 2$$

für $n \to \infty$ und somit

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2.$$

Der Konvergenzradius ist damit $\frac{1}{2}$. Setzt man $x = 1/2$ in die Potenzreihe ein, so erhält man die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}.$$