Mathematik Fachschaft Informatik
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

17.03.2015
Lamm

Analysis I, F15

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass $n^7 - n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ durch 7 teilbar ist.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie

1. $\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x})dx$
2. $\int_0^2 [x^2]dx$.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}$$

konvergiert. Geben Sie für diese x den Wert der Reihe in geschlossener Form an.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\log(x+1)}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

überall differenzierbar ist.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, f(x) = x^n e^{-x}$ für $n \in \mathbb{N}$ genau ein lokales und globales Maximum besitzt. Besitzt Sie auch ein Minimum?

Aufgabe 6

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} \cos^2(\pi \frac{k}{n})}{n}.$$

Aufgabe 7

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $C \in \mathbb{R}$ so, dass $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Es gibt Folgen $x_k \to +\infty$ und $y_k \to -\infty$ mit $f'(x_k) \to 0$ und $f'(y_k) \to 0$ für $k \to \infty$. (Hinweis: Mittelwertsatz!)

Lösung 3

Für $x \leqslant 0$ gilt $\exp(-nx) \geqslant 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $\sum_{n=0}^{\infty} n$ eine positive divergente Minorante.

Für $x > 0$ gilt

$$\sqrt[n]{|n\exp(-nx)|} = \sqrt[n]{n\exp(-x)^n} = \exp(-x)\sqrt[n]{n}.$$

Damit konvergiert die Reihe für positive x nach dem Wurzelkriterium. Insgesamt konvergiert die Reihe also genau dann, wenn $x > 0$ ist.

Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nx)$$

konvergiert für positive x, da die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\exp(-nx)$$

eine konvergente Majorante ist. Für das Cauchy-Produkt mit sich selbst gilt

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nx)\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nx)\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit Koeffizienten

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \exp(-kx)\exp(-(n-k)x) = (n+1)\exp(-nx).$$

Also gilt mit einem Indexshift und der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} n\exp(-nx) &= \exp(-x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\exp(-nx)\\ &= \exp(-x)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-nx)\Big)^2\\ &= \frac{\exp(-x)}{(1-\exp(-x))^2}.\end{aligned}$$

Lösung 6

Bei $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} \cos^2(\pi \frac{k}{n})$ handelt es sich um eine Riemannsche Zwischensumme, mit der Zerlegung $Z = (0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1)$ des Intervalls $[0,1]$ und dem Zwischenvektor $\xi = (0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1)$. Da $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos^2(\pi x)$ beschränkt ist gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} \cos^2(\pi \frac{k}{n}) = \int_0^1 \cos^2(\pi x)\, dx$$

Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}\int_0^1 \cos^2(\pi x)\, dx &= \frac{1}{\pi} \sin(\pi x)\cos(\pi x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{\pi} \sin(\pi x)\pi \sin(\pi x)\, dx \\ &= \int_0^1 1 - \cos^2(\pi x)\, dx = 1 - \int_0^1 \cos^2(\pi x)\, dx\end{aligned}$$

Also gilt $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} \cos^2(\pi \frac{k}{n}) = \frac{1}{2}$

Lösung 7

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt mit dem Mittelwertsatz

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y),$$

wobei ξ aus dem Intervall (x, y) ist. Es sei z_k eine Folge mit $z_k \to \infty$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ liefert der Mittelwertsatz für $x = z_k$ und $y = 2z_k$

$$2C \geq |f(z_k) - f(2z_k)| = |f'(\xi_k)||z_k|,$$

mit $\xi_k \in (z_k, 2z_k)$. Da $|z_k| \to \infty$ für $k \to \infty$, muss $|f'(\xi_k)| \to 0$ gelten. Damit erfüllt $x_k := \xi_k$ das geforderte. Ersetzt man z_k durch eine Folge $\tilde{z}_k$ mit $|\tilde{z}_k| \to -\infty$, liefert die selbe Argumentation die gesuchte Folge y_k.

Lösung 4

Für $x \neq 0$ ist f(x) als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Sei $x = 0$ dann gilt

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(h) - f(0)\big) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(\frac{\log(1+h)}{h} - 1\Big) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\log(h+1) - h}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{h+1} - 1}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{1}{(1+h)^2}}{2} = -\frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \frac{1}{(1+h)^2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Lösung 5

f ist unendlich oft differenzierbar. Es gilt

$$f'(x) = nx^{n-1}\exp(-x) - x^n \exp(-x)$$

und

$$f''(x) = (n-1)nx^{n-2}\exp(-x) - 2nx^{n-1}\exp(-x) + x^n \exp(-x)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter gilt

$$f'(x) = 0 \iff x^{n-1}\exp(-x)(n-x) = 0 \iff x = n,$$

da 0 nicht im Definitionsbereich von f liegt. ($\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$). Also ist $x = n$ die einzige lokale Extremstelle. Weiter gilt

$$f''(n) = -2n^n \exp(-n) + n^n \exp(-n) < 0.$$

Also ist $x = n$ das einzige globale Maximum von f auf $\mathbb{R}_+$.

Es gilt

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0,$$

wobei die Berechnung des zweiten Grenzwerts durch n-maliges Anwenden der Regel von L'Hospital erfolgt. Da $f > 0$ auf $\mathbb{R}_+$ ist, folgt direkt, dass f kein Minimum hat und $x = n$ auch das globale Maximum von f ist.

Die Analysis I Lösungen wurden von Felix H. und Stefan L. erstellt.

Lösung 1

Der Beweis erfolgt mit vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Es sei $n = 0$. Dann ist $n^7 - n = 0$ durch 7 teilbar.

Indunktionsannahme: Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gelte, dass $n^7 - n$ durch 7 teilbar sei.

Indunktionsschluss: Es gilt mit dem Pascal'schen Dreieck

$$\begin{aligned}(n+1)^7 - (n+1) &= n^7 + 7n^2 + 21n^5 + 35n^4 + 35n^3 + 21n^2 + 7n + 1 - (n+1)\\ &= (n^7 - n) + 7(n^6 + 3n^5 + 5n^4 + 5n^3 + 3n^2 + 1)\end{aligned}$$

Die Induktionsannahme liefert, dass der erste Summand durch 7 teilbar ist. Damit lässt sich $(n+1)^7 - (n+1)$ als Summe von zwei Zahlen darstellen, die jeweils durch 7 teilbar sind. Daraus folgt die Behauptung.

Lösung 2

1.
Substituiere $x = y^2$, dann gilt $\mathrm{d}x = 2y\mathrm{d}y$ und mit partieller Integration

$$\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin(y)2y\,\mathrm{d}y = -cos(y)2y|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} cos(y)\,\mathrm{d}y = 2\pi$$

2.
Es gilt

$$[x^2] = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{für } 1 \le x < \sqrt{2} \\ 2 & \text{für } \sqrt{2} \le x < \sqrt{3} \\ 3 & \text{für } \sqrt{3} \le x < 2 \end{cases}$$

und deshalb

$$\begin{aligned}\int_0^2 [x^2]\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 0\,\mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{2}} 1\,\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 2\,\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{3}}^2 3\,\mathrm{d}x\\ &= 1\cdot(\sqrt{2}-1) + 2\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + 3\cdot(2-\sqrt{3}) = 5 - \sqrt{3} - \sqrt{2}\end{aligned}$$