Mathematik Fachschaft Informatik
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

02.03.2016
Schnaubelt/Lamm

Analysis I, F15/16

Aufgabe 1

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion die Ungleichung

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$. Dabei dürfen Sie die aus der Vorlesung bekannte Abschätzung

$$2 \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq 3$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ benutzen. (Hinweis: $3^6 = 729$.)

Aufgabe 2

Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Reihen konvergieren. Begründen Sie Ihre Antwort.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+2n+3}{3n+5}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^{n-1}}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

(Hinweis: Hörer der Vorlesung von Herrn Prof. Dr. Schnaubelt ersetzen bitte $\sum_{n=0}^{\infty}$ bzw. $\sum_{n=1}^{\infty}$ durch $\sum_{n\geq 0}$ bzw. $\sum_{n\geq 1}$.

Aufgabe 3

Es sei $f_n : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Funktionenfolge mit $f_n(x) = 2n\Big((2x)^{\frac{1}{n}} - 1\Big)$.

1. Zeigen Sie, dass f_n für $n \to \infty$ punktweise konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
   Hinweis: Schreiben Sie $(2x)^{\frac{1}{n}} = \exp(\frac{1}{n}\log(2x))$, bzw. $(2x)^{\frac{1}{n}} = \exp(\frac{1}{n}\ln(2x))$.
2. Zeigen Sie, dass f_n auf dem Intervall $[1,2]$ sogar gleichmässig konvergiert.

Aufgabe 4

1. Berechnen Sie die Ableitungen für $x \in \mathbb{R}$ der Funktionen
   a) $f(x) = 2 \cdot 4^x + x \cdot 2^4 + 4 \cdot x^2$;
   b) $g(x) = \cos(\sin(\cos(x)))$.
2. Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}\,dx.$$

Lösung von Aufgabe 1

1. Teil: $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n!$
Für $n = 6$ gilt die Ungleichung, da $2^6 = 64 < 720 = 6!$. Wegen dem Hinweis ist $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und aus Induktionsannahme ergibt sich damit

$$\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n}{3}\right)^n (n+1) < n!(n+1) = (n+1)!.$$

2. Teil: $n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$
Für $n = 6$ gilt die Ungleichung, da $3^6 = 729 > 720 = 6!$. Wegen dem Hinweis ist $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq 2$ und zusammen mit der Induktionsannahme ergibt sich

$$(n+1)! = n!(n+1) < \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n}{2}\right)^n (n+1) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}.$$

Lösung von Aufgabe 2

Die Reihe ist

1. nicht konvergent, da $a_n := \frac{n^2+2n+3}{3n+5} \geq \frac{n}{8}$ keine Nullfolge ist;
2. konvergent, da $b_n := \frac{2+(-1)^n}{2^{n-1}} \leq 3 \cdot 2^{-n-1}$ und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-1} = 2$ konvergent ist. Die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ folgt nun aus dem Majorantenkriterium.
3. konvergent, denn $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to e^{-1} < 1$, also konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

Lösung von Aufgabe 3

1. Die Restglied-Formel von Lagrange liefert für alle $x \in [1, \infty)$ ein $\xi_x \in [0, \frac{1}{n}\log(2x)]$ mit
$$(2x)^{1/n} = \exp(\frac{1}{n}\log(2x)) = 1 + \frac{1}{n}\log(2x) + \frac{e^{\xi_x}}{2}(\frac{1}{n}\log(2x))^2,$$
also folgt mit $n \to \infty$ für jedes $x \in [1, \infty)$
$$f_n(x) = 2n(\frac{1}{n}\log(2x) + \frac{e^{\xi_x}}{2}(\frac{1}{n}\log(2x))^2) = 2\log(2x) + \frac{e^{\xi_x}\log^2(2x)}{n} \to 2\log(2x) =: f(x).$$
<u>Alternative Lösung:</u> Für $x \in [1, \infty)$ fest betrachten wir die Funktion
$$g_x(y) := \frac{2\Big((2x)^y - 1\Big)}{y}$$
und der Grenzwert für $n \to \infty$ von f_n entspicht dem Grenzwert $y \to 0$ von g_x. Mit der Regel von L'Hospital folgt nun
$$\lim_{y \searrow 0} g_x(y) = \lim_{y \searrow 0} 2\log(2x)(2x)^y = 2\log(2x).$$

2. Aus der obigen Formel folgt
$$\sup_{x\in[1,2]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n}\sup_{x\in[1,2]} e^{\xi_x}\log^2(2x) \leq \frac{4\log^2(4)}{n} \to 0$$

Lösung von Aufgabe 6

1. Da $f'(x) = \frac{1}{2}(4-x)^{-1-\frac{1}{2}}$ gilt die Behauptung für $n = 1$. Per Induktion schliessen wir nun

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}(4-x)^{-n-\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}\frac{2n+1}{2}(4-x)^{-n-1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1\cdot 3\cdots(2(n+1)-1)}{2^{n+1}}(4-x)^{-n-1-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

2. Wir definieren $a_n := \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^{3n+1}n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n+1}}$. Damit berechnet sich die Taylorreihe von f im Ursprung wie folgt:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \end{aligned}$$

3. Es gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2 2^{4n+5}} \frac{(n!)^2 2^{4n+1}}{(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2 2^4} \to \frac{1}{4}.$$

Aus dem Quotientenkriterium folgt nun das der Konvergenzradius der Taylorreihe 4 ist.

Lösung von Aufgabe 7

Nach dem Satz von Rolle existiert ein $x_1 \in (0, \frac{1}{2})$ bzw. $x_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$ mit $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. Eine weitere Anwendung des Satzes von Rolle auf f' im Intervall $[x_1, x_2]$ liefert nun die Existenz eines $x_0 \in (x_1, x_2) \subset (0, 1)$ mit $f''(x_0) = 0$. Man bemerke dabei, dass f' auf dem Intervall $(0, 1)$ stetig differenzierbar ist, und $[x_1, x_2] \subset (0, 1)$ gilt.

mit $n \to \infty$. Also konvergiert f_n auf $[1, 2]$ auch gleichmässig gegen f.
Alternative Lösung: Für $x \geq \frac{1}{2}$ gilt

$$f_n'(x) - f'(x) = \frac{1}{x}\Big((2x)^{1/n} - 1\Big) \geq 0$$

und zusammen mit $f_n(\frac{1}{2}) - f(\frac{1}{2}) = 0$ folgt

$$\sup_{x \in [1,2]} |f_n(x) - f(x)| = |f_n(2) - f(2)| \to 0$$

wegen dem ersten Teil der Aufgabe.

Lösung von Aufgabe 4

1. a) $f'(x) = 2\log(4)4^x + 2^4 + 8x$;
   b) $g'(x) = \sin(\sin(\cos(x)))\cos(\cos(x))\sin(x)$
2. Wir substituieren $u = 2 - x^2$, d.h. $-2x = \frac{du}{dx}$ und $x^2 = 2 - u$, d.h.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2-u}{\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{2}\int_1^2 \Big(\frac{2}{\sqrt{u}} - \sqrt{u}\Big)\,du \\ &= \left(2\sqrt{u} - \frac{1}{3}u^{3/2}\right)\Big|_{u=1}^{u=2} \\ &= 2\sqrt{2} - 2 + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2} = \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{5}{3}.\end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 5

1. Sei $f(x) := \arcsin^2 x - \frac{\pi^2}{16}$ und $g(x) := 2x^2 - 1$. Da $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ folgt $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0 = g(\frac{1}{\sqrt{2}})$. Auf $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ hat sin die Umkehrfunktion arcsin mit $\arcsin' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ und damit gilt $f'(x) = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ und $f'(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Aus $g'(x) = 4x$, $g'(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2}$ und der Regel von L'Hospital folgt nun

$$\lim_{x \to \frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\arcsin^2 x - \frac{\pi^2}{16}}{2x^2 - 1} = \lim_{x \to \frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\pi}{4}.$$

2. Sei nun $h(x) := \sin x - x\cos x$ und $k(x) := x^3$. Es gilt $h(0) = 0 = k(0)$. Weiter gilt $h'(x) = x\sin x$ und $k'(x) = 3x^2$ und damit $\frac{h'(x)}{k'(x)} = \frac{\sin x}{3x}$. Nach der der Regel von L'Hospital gilt nun

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{k(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{h'(x)}{k'(x)} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3}.$$

Aufgabe 5

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

1. $\lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\arcsin^2 x-\frac{\pi^2}{16}}{2x^2-1}$; (Hinweis: $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$)
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$.

Aufgabe 6

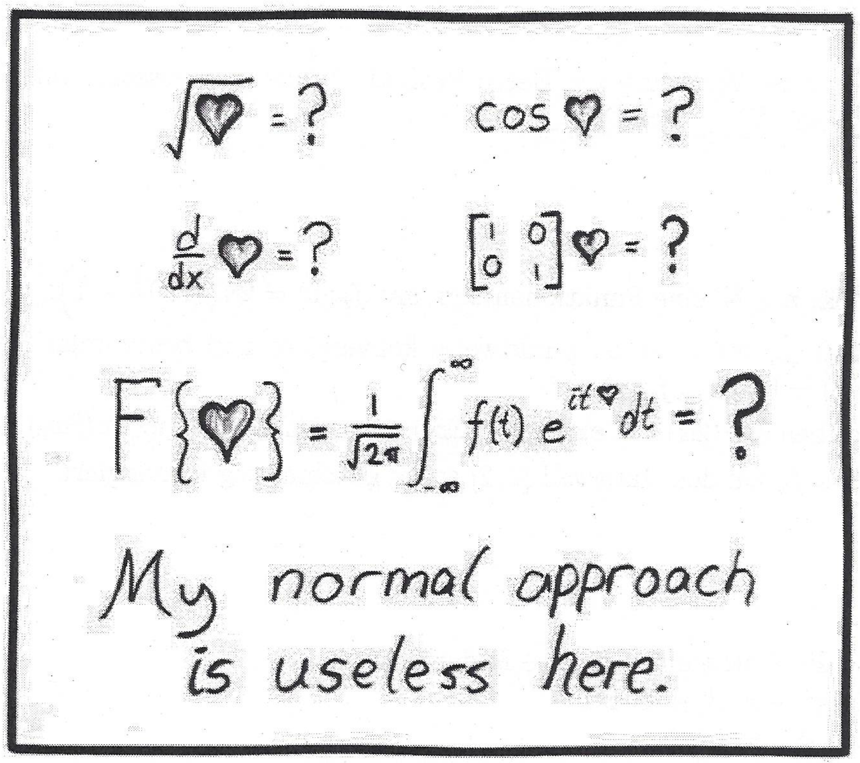
1. Sei $f:(-\infty,4)\to\mathbb{R}$, $f(x):=\frac{1}{\sqrt{4-x}}$. Zeigen Sie für alle $n\in\mathbb{N}$ und $x\in(-\infty,4)$ per Induktion die Formel

$$f^{(n)}(x)=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}(4-x)^{-n-\frac{1}{2}}.$$

2. Bestimmen Sie die Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt $0\in(-\infty,4)$.
3. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe mit Hilfe des Quotienkriteriums.

Aufgabe 7

Sei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ stetig und auf $(0,1)$ zweimal stetig differenzierbar und es gelte $f(0)=f(\frac{1}{2})=f(1)$. Zeigen Sie, dass ein $x_0\in(0,1)$ existiert mit $f''(x_0)=0$.



Permanent link to this comic: http://xkcd.com/55/