Schmoeger
Analysis I

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: XX P.
Bemerkungen: Hauptklausur

Mathematik Fachschaft Informatik
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Aufgabe 1

Die Folge (a_n) sei gegeben durch

$$a_1 := 0, \qquad a_{n+1} = \frac{5}{36} + a_n^2 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

a) Gehen Sie davon aus, dass (a_n) konvergiert. Welche beiden Werte kommen für den Grenzwert in Frage?

b) Zeigen Sie nun, das (a_n) tatsächlich konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 2

a) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2n)!}{(2n-1)^{2n-1}}.$$

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Potenzreihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n + \frac{1}{n}}{2} x^n.$$

Aufgabe 3

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)^n.$$

Prüfen Sie die Funktionenfolge (f_n) auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 4

Die Funktion $f : [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\cos(x)} - \sqrt{\cos(2x)}}{x} & , x \neq 0, \\ c & , x = 0, \end{cases}$$

für ein $c \in \mathbb{R}$.

a) Für welchen Wert von c ist f stetig auf $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Zeigen Sie, dass f für dieses c auf $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ differenzierbar ist und berechnen Sie f'.
Hinweis: Sie können benutzen, dass $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Aufgabe 5

Zeigen Sie die Ungleichung

$$\log(x+1) \leqslant x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

für alle $x \in [0, \infty)$.
Hinweis für Hörer von Prof. Schnaubelt: log *ist der natürliche Logarithmus* ln.

Aufgabe 1

a) Wenn die rekursiv definierte Folge (a_n) gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, dann können wir auf die Rekursion den Grenzwert $n \to \infty$ anwenden. Beachte, dass die Folge (a_{n+1}) ebenfalls gegen a konvergiert. Somit folgt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{36} + a_n^2\right) = \frac{5}{36} + (\lim_{n\to\infty} a_n)^2 = \frac{5}{36} + a^2,$$

also $a^2 - a + \frac{5}{36} = 0$. Dies liefert die Möglichen Werte

$$a = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot \frac{5}{36}}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{\frac{16}{36}}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} = \begin{cases} \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} \end{cases}.$$

b) Wir benutzen das Monotoniekriterium, um die Konvergenz zu zeigen. Zunächst sehen wir anhand der Definition, dass $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wegen $a_1 = 0$ und $a_{n+1} = \frac{5}{36} + a_n^2 \geqslant \frac{5}{36} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Behauptung: Es gilt $a_n \leqslant \frac{1}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsanfang: Es gilt $a_1 = 0 \leqslant \frac{1}{6}$.
Induktionsschritt: Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung (IV)). Dann folgt

$$a_{n+1} = \frac{5}{36} + a_n^2 \overset{\text{(IV)},\, a_n \geqslant 0}{\leqslant} \frac{5}{36} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Behauptung: Es gilt $a_{n+1} \geqslant a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsanfang: Es gilt $a_2 = \frac{5}{36} + 0^2 = \frac{5}{36} \geqslant 0 = a_1$.
Induktionsschritt: Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung (IV)). Dann folgt

$$a_{n+2} = \frac{5}{36} + a_{n+1}^2 \overset{\text{(IV)}}{\geqslant} \frac{5}{36} + a_n^2 = a_{n+1}.$$

Alternativ gilt $a_{n+1} = (a_n - \frac{1}{6})(a_n - \frac{5}{6}) + a_n \overset{a_n \leqslant \frac{1}{6}}{\geqslant} a_n$.
Nach dem Monotoniekriterium konvergiert nun die Folge (a_n). Wegen $a_n \leqslant \frac{1}{6}$ folgt auch $a := \lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \frac{1}{6}$. Aus Teil a) folgt somit $a = \frac{1}{6}$.

Aufgabe 2

a) Wir benutzen das Quotientenkriterium. Sei dazu $a_n := \frac{2^{2n}(2n)!}{(2n-1)^{2n-1}}$. Dann folgt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{2^{2(n+1)}(2(n+1))!}{(2(n+1)-1)^{2(n+1)-1}}}{\frac{2^{2n}(2n)!}{(2n-1)^{2n-1}}} = \frac{2^{2n+2}(2n+2)!(2n-1)^{2n-1}}{2^{2n}(2n)!(2n+1)^{2n+1}} = \frac{4(2n+2)(2n+1)}{(2n-1)^2} \cdot \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{2n+1}$$

$$= \frac{8(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{(2-\frac{1}{n})^2}\left(1 - \frac{2}{2n+1}\right)^{2n+1} \to \frac{8\cdot 2}{2\cdot 2} \cdot e^{-2} = \frac{4}{e^2} \overset{e>2}{<} 1.$$

Somit konvergiert die gegebene Reihe absolut.

b) Wir definieren $a_n := \frac{e^n + \frac{1}{n}}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$e = \frac{e}{1} \overset{n\to\infty}{\longleftarrow} \frac{\sqrt[n]{e^n}}{\sqrt[n]{2}} = \sqrt[n]{\frac{e^n}{2}} \leqslant \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \sqrt[n]{\frac{e^n + e^n}{2}} = \sqrt[n]{e^n} = e \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e.$$

für $x \to 0$ als Differenzenquotienten.

b) Sei nun $c = 0$. Dann ist f für $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \setminus \{0\}$ als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar und es folgt

$$f'(x) = \frac{\frac{-\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)}} - \frac{-2\sin(2x)}{2\sqrt{\cos(2x)}}}{x} - \frac{\sqrt{\cos(x)} - \sqrt{\cos(2x)}}{x^2}$$
$$= \frac{\sin(2x)}{x\sqrt{\cos(2x)}} - \frac{\sin(x)}{2x\sqrt{\cos(x)}} + \frac{\sqrt{\cos(2x)} - \sqrt{\cos(x)}}{x^2}$$

Für $x = 0$ betrachten wir den Differenzenquotienten und erkennen wieder mit L'Hospital, dass

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos(x)} - \sqrt{\cos(2x)}}{x^2} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)}} - \frac{-2\sin(2x)}{2\sqrt{\cos(2x)}}}{2x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{\cos(2x)}} \cdot \frac{\sin(2x)}{2x} - \frac{1}{4\sqrt{\cos(x)}} \cdot \frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

womit f auch in 0 differenzierbar ist mit $f'(0) = \frac{3}{4}$.
Alternativ erweitern wir den Bruch wieder und erhalten für $x \neq 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\cos(2x)}} \frac{\cos(x) - \cos(2x)}{x^2}.$$

Entweder wenden wir hier für den zweiten Bruch L'Hospital an und nutzen den Grenzwert im Hinweis aus, oder wir nutzen zwei Mal L'Hospital, oder sehen sogar, dass

$$\frac{\cos(x) - \cos(2x)}{x^2} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(1 - 2^{2n})x^{2(n-1)}}{(2n)!} \to \frac{3}{4}$$

für $x \to 0$ mit der Potenzreihenentwicklung des Kosinus.

Aufgabe 5

Definiere $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \log(x+1)$ für $x \in [0, \infty)$. Dann gilt $f(0) = 0$ und wir haben

$$f'(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{x+1} > 0$$
$$\overset{\cdot(x+1)}{\iff} \quad x + 1 - x^2 - x + x^3 + x^2 - 1 = x^3 > 0$$

für jedes $x \in (0, \infty)$. Das zeigt, dass f strikt wächst auf $[0, \infty)$. Es folgt $f(x) \geq f(0) = 0$ für alle $x \in [0, \infty)$ und hieraus folgt

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \geq \log(x+1)$$

für alle $x \in [0, \infty)$.

Aufgabe 6

Eine Fallunterscheidung ist nicht unbedingt nötig, sie vereinfacht jedoch das korrekte Argumentieren.

$(f(b)-f(a))f'(c)=0$: Entweder ist $f'(c)=0$ und wir sind fertig mit $x_0=c$. Oder $f(b)-f(a)=0$, womit wir nach dem Mittelwertsatz ein $x_0 \in (a,b)$ finden mit

$$0 = f(b)-f(a) = f'(x_0)(b-a) \Rightarrow f'(x_0)=0.$$

$(f(b)-f(a))f'(c)<0$: Es ist genau eine der Zahlen $f(b)-f(a)$ und $f'(c)$ größer 0 und eine kleiner 0 (wären beide Zahlen größer oder gleich 0, so wäre das Produkt größer oder gleich 0 (ein Widerspruch), also ist eine der Zahlen kleiner 0; ist die andere Zahl kleiner oder gleich 0, so wäre das Produkt größer oder gleich 0 (ein Widerspruch)).

Sei nun $f(b)-f(a)>0$ und $f'(c)<0$ (der andere Fall wird analog bewiesen). Es folgt mit dem Mittelwertsatz die Existenz eines $\xi \in (a,b)$ mit

$$0 < f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a) \overset{b>a}{\Rightarrow} f'(\xi) > 0.$$

Da f' stetig ist und $f'(c)<0<f'(\xi)$, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass ein x_0 zwischen c und ξ existiert mit $f'(x_0)=0$. Damit ist die Behauptung gezeigt. Im umgekehrten Fall ist $f'(\xi)<0$ und $f'(c)>0$, sodass der Zwischenwertsatz dasselbe Resultat liefert.

Aufgabe 7

a) Zuerst substituieren wir $x=\mathrm{e}^u$ dann ist "$\mathrm{d}x=\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$" und $u=\log(x)$. Danach integrieren wir zweimal partiell

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} (\log(x))^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \underset{\downarrow}{u^2}\underset{\uparrow}{\mathrm{e}^u}\,\mathrm{d}u = [u^2\mathrm{e}^u]_0^1 - \int_0^1 \underset{\downarrow}{2u}\underset{\uparrow}{\mathrm{e}^u}\,\mathrm{d}u\\ &= \mathrm{e}-0-[2u\mathrm{e}^u]_0^1 + \int_0^1 2\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}-2\mathrm{e}+0+[2\mathrm{e}^u]_0^1 = -\mathrm{e}+2\mathrm{e}-2\\ &= \mathrm{e}-2.\end{aligned}$$

b) Wieder substituieren wir als erstes, diesmal $u=\sqrt{x}$. Dann ist "$\mathrm{d}u=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$" und somit

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^4 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^2 \frac{u-1}{u+1}\,\mathrm{d}u.$$

Jetzt spalten wir das Integral auf. Für das erste der dann entstehenden Integrale brauchen wir partielle Integration. Eine Stammfunktion des zweiten Integranden sollte bekannt sein.

$$\begin{aligned}2\int_1^2 \frac{u-1}{u+1}\,\mathrm{d}u &= 2\int_1^2 \underset{\downarrow}{u}\underset{\uparrow}{\frac{1}{u+1}}\,\mathrm{d}u - 2\int_1^2 \frac{1}{u+1}\,\mathrm{d}u\\ &= 2[u\log(u+1)]_1^2 - 2\int_1^2 \log(u+1)\,\mathrm{d}u - 2[\log(u+1)]_1^2\\ &= 2(2\log(3)-\log(2)) - 2[(u+1)\log(u+1)-(u+1)]_1^2 - 2(\log(3)-\log(2))\\ &= 2\log(3) - 2(3\log(3)-2\log(2)-3+2)\\ &= -4\log(3)+4\log(2)+2 = 4\log(\tfrac{2}{3})+2.\end{aligned}$$

Eine etwas elegantere Möglichkeit: Substituiere $y=\sqrt{x}+1$. Dann ist "$\mathrm{d}y=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$" und $\sqrt{x}=y-1$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}2\int_1^4 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= 2\int_2^3 \frac{y-2}{y}\,\mathrm{d}y = 2\int_2^3 1\,\mathrm{d}y - 4\int_2^3 \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y\\ &= 2(3-2)-4[\log(y)]_2^3 = 2-4\log(\tfrac{3}{2}) = 2+4\log(\tfrac{2}{3}).\end{aligned}$$

Nach Vorlesung konvergiert nun auch $\sqrt[n]{|a_n|}$ und der Konvergenzradius der Potenzreihe ist durch $\frac{1}{e}$ gegeben, womit diese für $x \in (-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$ kon- und für $|x| > \frac{1}{e}$ divergiert. Für $x = \pm\frac{1}{e}$ ist der Betrag der Summanden gegeben durch

$$\frac{e^n + \frac{1}{n}}{2} e^{-n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2ne^n} \longrightarrow \frac{1}{2} \quad (n \to \infty),$$

womit sie keine Nullfolge bilden und die Reihe deshalb nicht konvergieren kann. Die Potenzreihe konvergiert also genau dann, wenn $x \in (-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$.

AUFGABE 3

Wir wissen, dass $x < x+1 < e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es folgt, dass $\frac{x}{e^x} < 1$ für alle $x \in [0,\infty)$ und somit

$$f_n(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)^n \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

D.h. die Funktionenfolge (f_n) konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = 0$.
Um zu zeigen, dass (f_n) sogar gleichmäßig konvergiert, beachte zunächst, dass $f_n(x) \geq 0$ für jedes $x \in [0,\infty)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist f_n differenzierbar mit

$$f_n'(x) = n\left(\frac{x}{e^x}\right)^{n-1} \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = n\left(\frac{x}{e^x}\right)^{n-1} \frac{(1-x)e^x}{(e^x)^2} = n\left(\frac{x}{e^x}\right)^{n-1} \frac{1-x}{e^x} \quad \text{für } x \in [0,\infty).$$

Wir sehen, dass

$$f_n'(x) = 0 \iff x = 0 \text{ oder } 1 - x = 0 \iff x = 0 \text{ oder } x = 1.$$

Wir sehen auch, dass $f_n'(x) > 0$ für $x \in (0,1)$ und dass $f_n'(x) < 0$ für $x \in (1,\infty)$. Somit ist f_n strikt wachsend auf $[0,1]$ und strikt fallend auf $[1,\infty)$. D.h. f_n besitzt ein globales Maximum in 1. Wir erhalten

$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) \leq f_n(1) = \left(\frac{1}{e}\right)^n \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Da die Folge auf der rechten Seite unabhängig von x ist, folgt dass (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert.

AUFGABE 4

a) Für $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \setminus \{0\}$ ist die Funktion f stetig als Komposition stetiger Funktionen, da sowohl $\cos(x)$ als auch $\cos(2x)$ stetig und nicht-negativ sind. Außerdem gilt mit der Regel von L'Hospital, dass

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos(x)} - \sqrt{\cos(2x)}}{x} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)}} - \frac{-2\sin(2x)}{2\sqrt{\cos(2x)}}}{1} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\cos(2x)}} - \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} = \frac{\sin(0)}{\sqrt{\cos(0)}} - \frac{\sin(0)}{\sqrt{\cos(0)}} = 0,\end{aligned}$$

da der letzte Grenzwert existiert. Somit ist f stetig auf $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ genau dann, wenn $c = 0$, da nur dann $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$.
Alternativ erweitern wir den Bruch und erhalten für $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\cos(2x)}} \frac{\cos(x) - \cos(2x)}{x}.$$

Entweder wenden wir hier für den zweiten Bruch L'Hospital an (einfacher als oben; der erste Bruch konvergiert gegen $\frac{1}{2}$ für $x \to 0$) oder sehen sogar, dass

$$\frac{\cos(x) - \cos(2x)}{x} = \frac{\cos(x) - 1}{x} - 2\frac{\cos(2x) - 1}{2x} \longrightarrow \sin(0) - 2\sin(0) = 0$$

Aufgabe 6

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei außerdem $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf $[a,b]$ und es existiere ein $c \in [a,b]$ mit $(f(b) - f(a))f'(c) \leqslant 0$. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in [a,b]$ existiert mit $f'(x_0) = 0$.

Aufgabe 7

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_1^e (\log(x))^2 \,\mathrm{d}x,$ b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \,\mathrm{d}x.$

Hinweis für Hörer von Prof. Schnaubelt: log *ist der natürliche Logarithmus* ln.