Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum

Lösungsvorschlag zur Modulprüfung Analysis I

15.03.2018

Aufgabe 1:
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 := 10, \qquad a_{n+1} := \frac{a_n^2+6}{2a_n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten durch 3 beschränkt ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(i) *Behauptung:* Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n - 3 \geq 0$.

Beweis: Die Behauptung kann mittels vollständiger Induktion bewiesen werden.
IA: Nach Voraussetzung gilt $a_1 - 3 = 10 - 3 = 7 \geq 0$.
IV: Die Aussage gelte bereits für ein $n \in \mathbb{N}$, d.h. es gelte bereits $a_n - 3 \geq 0$.
IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Nach Induktionsvoraussetzung ist insbesondere $a_n \geq 3 > \frac{1}{2}$ und damit $2a_n - 1 > 0$.
Weiter gilt

$$a_{n+1} - 3 = \frac{a_n^2+6}{2a_n-1} - 3 = \frac{a_n^2+6-6a_n+3}{2a_n-1} = \frac{a_n^2-6a_n+9}{2a_n-1} = \frac{(a_n-3)^2}{2a_n-1} \underset{\text{IV}}{\geq} 0$$

und damit $a_n \geq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

(ii) *Behauptung:* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 3.

Beweis: Zunächst gilt wegen Teil (i) $a_n + 2 \geq 3 + 2 = 5 \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter gilt für $n \in \mathbb{N}$ (wieder mit (i))

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2+6}{2a_n-1} = \frac{2a_n^2-a_n-a_n^2-6}{2a_n-1} = \frac{a_n^2-a_n-6}{2a_n-1} = \frac{(a_n+2)(a_n-3)}{2a_n-1} \geq 0,$$

also $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Daher ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten beschränkt und somit konvergent. Sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dann muss a die folgende Gleichung erfüllen

$$a = \frac{a^2+6}{2a-1} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - a - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a+2)(a-3) = 0,$$

also gilt (wegen (i)) $a = 3$. □

Aufgabe 2:

(i) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{\pi^{2n}(n!)^2}.$$

(ii) Bestimmen Sie sämtliche $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Potenzreihe konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n+1}}(x-2)^{2n}.$$

Hinweis: Sie dürfen den folgenden Grenzwert ohne Beweis verwenden:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Außerdem dürfen Sie die folgende Abschätzung ohne Beweis verwenden:

$$n! \geq \frac{(n+1)^n}{e^n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(i) *Behauptung:* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{\pi^{2n}(n!)^2}$ konvergiert (absolut).

Beweis: Es sei $a_n := \frac{n^{2n}}{\pi^{2n}(n!)^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit erhält man

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^{2(n+1)}}{\pi^{2(n+1)}((n+1)!)^2} \frac{\pi^{2n}(n!)^2}{n^{2n}} = \frac{1}{\pi^2}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^2 \to \left(\frac{e}{\pi}\right)^2 < 1 \quad (n\to\infty).$$

Somit konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{\pi^{2n}(n!)^2}$ nach dem Quotientenkriterium (absolut). □

(ii) *Behauptung:* Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n+1}}(x-2)^{2n}$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| < \sqrt{e}$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| \geq \sqrt{e}$.

Beweis: Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$a_k := \begin{cases} \frac{n!}{n^{n+1}}, & k = 2n,\ n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n+1}}(x-2)^{2n} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-2)^k$. Für $k = 2n$ erhält man

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[2n]{\frac{n!}{n^{n+1}}} = \left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^{\frac{1}{2}} \to \frac{1}{\sqrt{e}} \quad (n\to\infty).$$

Damit erhält man den Konvergenzradius

$$r = \left(\limsup_{k\to\infty} |a_k|\right)^{-1} = \sqrt{e},$$

d.h. die Potenzreihe konvergiert absolut für $|x-2| < \sqrt{e}$ und divergiert für $|x-2| > \sqrt{e}$.
Für $x = 2 \pm \sqrt{e}$ erhält man die folgende Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+1}}$. Es gilt

$$\frac{n!e^n}{n^{n+1}} \geq \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\geq 1} \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit divergiert die Potenzreihe für $|x-2| = \sqrt{e}$ nach dem Minorantenkriterium. □

Aufgabe 3:
Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei gegeben durch

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) := e^{-nx^2}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf $\mathbb{R}$ konvergiert und geben Sie die Grenzfunktion an. Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch gleichmäßig?

(ii) Für $R \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $f_{n,R} := f_n\big|_{\mathbb{R}\setminus[-R,R]}$. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$(f_{n,R})_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gleichmäßig gegen } 0 \quad \Leftrightarrow \quad R > 0.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(i) *Behauptung:* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}.$$

Beweis: Für $x = 0$ gilt $f_n(x) = e^{-nx^2} = e^0 = 1 \to 1$ $(n\to\infty)$ und für $x \neq 0$ gilt $f_n(x) = e^{-nx^2} \to 0$ $(n\to\infty)$. Daher konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}.$$

Da die punktweise Grenzfunktion f unstetig ist, konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig. □

(ii) *Behauptung:* $(f_{n,R})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen 0 genau dann, wenn $R > 0$.

Beweis: $\Rightarrow$: Sei $R = 0$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := \frac{1}{n}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ ist eine Folge in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Es gilt

$$f_{n,R}(x_n) - f(x_n) = e^{-n\frac{1}{n^2}} - 0 = e^{-\frac{1}{n}} \to 1 \quad (n\to\infty),$$

d.h. $(f_{n,R})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gleichmäßig.

$\Leftarrow$: Sei nun $R > 0$ und $\varepsilon > 0$. Zu ε wähle $n_0\in\mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{-\log(\varepsilon)}{R^2}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$ und für alle $x \in \mathbb{R}\setminus[-R,R]$

$$|f_{n,R}(x) - f(x)| = \left|e^{-nx^2} - 0\right| = e^{-nx^2} \leq e^{-n_0R^2} < \varepsilon,$$

also konvergiert $(f_{n,R})_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen 0. □

Aufgabe 4:
Zeigen Sie, dass die Ungleichung

$$\sin(y)e^y - \sin(x)e^x \geq (y-x)e^x\cos(y)$$

für alle $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$ gilt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:
Behauptung: Für $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$ gilt $\sin(y)e^y - \sin(x)e^x \geq (y-x)e^x\cos(y)$.

Beweis: Die Funktion $f\colon (0,\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sin(x)e^x$ ist differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz existiert somit zu $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$ ein $\xi \in (x,y)$ mit

$$\sin(y)e^y - \sin(x)e^x = f(y) - f(x) = (y-x)f'(\xi) = (y-x)(\cos(\xi)+\sin(\xi))e^{\xi}.$$

Es gilt $y - x > 0$ und $e^x > 0$. Außerdem sind $\sin(x)$ und e^x monoton wachsend, sowie $\cos(x)$ monoton fallend auf $(0,\frac{\pi}{2})$, d.h. es gilt $(\cos(\xi)+\sin(\xi))e^{\xi} \geq (\cos(y)+0)e^x$. Damit erhält man

$$\sin(y)e^y - \sin(x)e^x \geq (y-x)\cos(y)e^x.$$

□

Aufgabe 5:
Bestimmen Sie sämtliche $\alpha,\beta > 0$ so, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} 2\sin(x), & x\in(-\infty,0] \\ \alpha\log(x+\beta), & x\in(0,\infty) \end{cases}$$

differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ ist. Geben Sie außerdem die Ableitung f' an.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:
Behauptung: f ist differenzierbar genau dann, wenn $\alpha = 2$ und $\beta = 1$.

Beweis: Auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist f nach den Ableitungsregeln differenzierbar. Da 0 ein Häufungspunkt von $\mathbb{R}$ ist, ist f stetig auf ganz $\mathbb{R}$, genau dann wenn gilt

$$0 = f(0) = \lim_{x\to 0-} f(x) \overset{!}{=} \lim_{x\to 0+} f(x) = \alpha\log(\beta),$$

also genau dann, wenn $\log(\beta) = 0$. Somit ist f stetig, genau dann wenn $\beta = 1$, denn log ist streng monoton auf $(0,\infty)$.

Damit f differenzierbar ist, muss außerdem gelten

$$2 = \lim_{h\to 0-}\frac{2\sin(h)}{h} = \lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h} \overset{!}{=} \lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+}\frac{\alpha\log(h+1)}{h} = \alpha,$$

also ist f genau dann differenzierbar, wenn $\alpha = 2$ (Beachte: Der letzte Grenzwert ist bekannt aus der Übung oder kann mit den Regeln von de l'Hospital begründet werden). Die gesuchte Ableitung von f lautet

$$f'\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f'(x) = \begin{cases} 2\cos(x), & x\in(-\infty,0] \\ \frac{2}{x+1}, & x\in(0,\infty) \end{cases}.$$

□

Aufgabe 6:
Es sei $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine stetige und positive Funktion mit

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0. \qquad (*)$$

(i) Beweisen Sie, dass f ein globales Maximum besitzt, d.h. es existiert ein $x_* \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \leq f(x_*)$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

(ii) Nun sei f zusätzlich differenzierbar. Zeigen Sie, dass es $x_-, x_+ \in \mathbb{R}$ gibt mit $f'(x_-) < 0$ und $f'(x_+) > 0$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

(i) *Behauptung:* f besitzt ein globales Maximum.

Beweis: Da $f > 0$ ist, gilt insbesondere $c := f(0) > 0$. Wegen Voraussetzung $(*)$ existiert ein $R > 0$ mit $f(x) = |f(x)| < \frac{c}{2}$ für alle $|x| > R$. Zudem ist $[-R,R]$ beschränkt und abgeschlossen. Wegen der Stetigkeit von f existiert also ein $x_* \in [-R,R]$ mit $f(x) \leq f(x_*)$ für alle $x\in[-R,R]$. Weiter gilt (wegen $0\in[-R,R]$) $f(x_*) \geq f(0) = c$ und somit $f(x_*) \geq c > \frac{c}{2} > f(x)$ für alle $|x| > R$, d.h. f besitzt ein globales Maximum. □

(ii) *Behauptung:* Es existieren $x_-, x_+ \in\mathbb{R}$ mit $f'(x_-) < 0$ und $f'(x_+) > 0$.

Beweis: Wähle ein $y_+ < -R$ und $y_- > R$. Dann gilt $f(y_+), f(y_-) < \frac{c}{2}$ und somit

$$\begin{aligned} f(x_*) - f(y_+) &> c - \frac{c}{2} > 0, \\ f(x_*) - f(y_-) &> c - \frac{c}{2} > 0, \\ x_* - y_+ &> -R + R = 0, \\ x_* - y_- &< R - R = 0. \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz existieren $x_+, x_- \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x_*) - f(y_+) = (x_* - y_+)f'(x_+) \quad \Leftrightarrow \quad f'(x_+) = \frac{f(x_*) - f(y_+)}{x_* - y_+} > 0,$$
$$f(x_*) - f(y_-) = (x_* - y_-)f'(x_-) \quad \Leftrightarrow \quad f'(x_-) = \frac{f(x_*) - f(y_-)}{x_* - y_-} < 0.$$

□

Aufgabe 7:
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos^3(x)\ dx,$ (ii) $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\ dx,$ (iii) $\displaystyle\int_1^{e^{\frac{1}{n+1}}} x^n \log(x)\ dx.$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:

(i) *Behauptung:* Es gilt $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos^3(x)\ dx = \frac{1}{4}$.

Beweis: Mit $g(x) := \cos(x)$ $(x \in [0, \frac{\pi}{2}])$ und $g'(x) = -\sin(x)$ erhält man

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos^3(x)\ dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(x)g(x)^3\ dx = -\int_1^0 x^3\ dx = \frac{1}{4}.$$

□

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\ dx = 2$

Beweis: Mittels Substitution und partieller Integration erhält man

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\ dx = \int_0^1 2ye^y\ dy = [2ye^y]_0^1 - \int_0^1 2e^y\ dy = 2e - [2e^y]_0^1 = 2e - (2e-2) = 2.$$

□

(iii) *Behauptung:* Es gilt $\int_1^{e^{\frac{1}{n+1}}} x^n \log(x)\ dx = \frac{1}{(n+1)^2}$.

Beweis: Mittels Substitution und partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}
\int_1^{e^{\frac{1}{n+1}}} x^n \log(x) dx &= \int_0^{\frac{1}{n+1}} e^{y(n+1)} y dy \\
&= \left[\frac{1}{n+1} e^{y(n+1)} y\right]_0^{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{1}{n+1}} e^{y(n+1)} dy \\
&= \frac{e}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\left[e^{y(n+1)}\right]_0^{\frac{1}{n+1}} \\
&= \frac{e}{(n+1)^2} - \frac{e}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \\
&= \frac{1}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

□