Analysis 1 WS 18/19

Lösungen Klausur 26.03.2019

Aufgabe 1:

(i) Für welche $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$ gilt

$$\frac{1}{|x-2|} > \frac{1}{1+|x-1|}.$$

(ii) Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{l=1}^{n}(2l-1)$

Lösungsvorschlag:

(i) Der Hauptnenner $|x-2|(1+|x-1|)$ ist für alle $x \neq 2$ positiv. Daher kann man die Ungleichung ohne Fallunterscheidung mit dem Hauptnenner multiplizieren und erhält

$$\begin{aligned}\frac{1}{|x-2|} > \frac{1}{1+|x-1|} &\iff 1+|x-1| > |x-2| \\ &\iff (1+|x-1|)^2 > |x-2|^2 = (x-2)^2 \\ &\iff 1+2|x-1|+(x^2-2x+1) > x^2-4x+4 \\ &\iff 2|x-1| = 2|1-x| > 2-2x = 2(1-x) \\ &\iff |1-x| > 1-x \\ &\iff 1-x<0 \\ &\iff x>1\end{aligned}$$

Somit gilt die Ungleichung $\frac{1}{|x-2|} > \frac{1}{1+|x-1|}$ für die reellen Zahlen

$$\{x \in \mathbb{R} : x > 1, x \neq 2\}.$$

(ii) Aus den Übungen ist bekannt, dass $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Somit erhält man

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2.$$

Eine andere Möglichkeit dies zu beweisen ist per vollständiger Induktion:
Induktionsanfang: $(n=1)$: $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1^2$.
Induktionsvoraussetzung: Es gelte $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschluss: $(n \to n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = 2n+1+\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2n+1+n^2 = (n+1)^2.$$

Aufgabe 2: Sei $(a_n)_n$ eine beliebige reelle Folge mit $a_n < 2$ und $a_{n+1}(2-a_n) > 1$. Untersuchen Sie die gegebene Folge auf Konvergenz und geben sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert an.

Beweis. Wenn die Folge konvergiert, z.B. gegen $a := \lim_{n\to\infty} a_n$, dann konvergiert nach den Rechenregeln für konvergente Folgen

$$a_{n+1}(2-a_n) \to a(2-a).$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt per Voraussetzung, dass

$$a_{n+1}(2-a_n) > 1.$$

Somit folgt wiederrum aus den Rechenregeln für konvergente Folgen, dass $a(2-a) \geq 1$ gelten muss. Man rechnet nun nach, dass die einzige Lösung dieser Ungleichung $a = 1$ ist.

$$\begin{aligned}a(2-a) > 1 \iff 2-a \geq \frac{1}{a} \iff 2 \geq \frac{1}{a} + a \iff 2a &\geq 1+a^2 \\ \iff 0 &\geq 1-2a+a^2 \\ \iff 0 &\geq (1-a)^2 \\ \iff a &= 1.\end{aligned}$$

Wir haben somit gezeigt, dass wenn die Folge $(a_n)_n$ konvergiert, so konvergiert sie gegen 1.
Es bleibt zu zeigen, dass die Folge konvergiert:
Nach Voraussetzung gilt $a_n < 2$ und damit folgt aus $a_{n+1}(2-a_n) > 1$, dass $a_{n+1} > 0$ ist. Also ist die Folge beschränkt. Weiter gilt

$$(a_{n+1}-a_n)(2-a_n) = a_{n+1}(2-a_n) - a_n(2-a_n) > 1-2a_n+a_n^2 = (1-a_n)^2 \geq 0.$$

Da $(2-a_n) > 0$ folgt somit $(a_{n+1}-a_n) \geq 0$. Also ist die Folge $(a_n)_n$ monoton wachsend. Aus dem Satz über die monotone Konvergenz folgt nun, dass die Folge $(a_n)_n$ konvergent ist. □

Achtung!!!
Bitte bearbeiten Sie nur eine der folgenden Aufgaben. Je nachdem ob Sie Hörer der Analysis 1 im WS18/19 bei Professor Hundertmark oder Hörer der Analysis 1 im WS 17/18 bei Professor Plum waren. Diejenigen von Ihnen die beide Veranstaltungen gehört haben bearbeiten bitte Aufgabe 3.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Menge der $z \in \mathbb{C}$ für welche die folgenden Potenzreihen konvergieren.

(i) $\sum_n \frac{3^n\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+1}} z^n$,

(ii) $\sum_n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right)^n z^{2n}$.

Alternativ Aufgabe für die Hörer Analysis 1 im WS 17/18 bei Professor Plum

Aufgabe 3':

Es sei $f_n : [1, \pi] \to \mathbb{R}$; $f_n(x) := \frac{\cos(\frac{x}{n})}{1-e^{-xn}}$.

(i) Zeigen Sie, dass $(f_n)_n$ punktweise auf $[1, \pi]$ konvergiert und geben Sie die Grenzfunktion an. Konvergiert $(f_n)_n$ auch gleichmäßig?

(ii) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\pi f_n(x)\, dx.$$

Lösungsvorschlag: (Aufgabe 3)

(i) Die Potenzreihe $\sum_n \frac{3^n\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+1}} z^n$ konvergiert genau für die $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \le \frac{1}{3}$.
Zuerst berechnen wir den Konvergenzradius. Setzte $a_n := \frac{3^n\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+1}}$, dann gilt einerseits

$$\sqrt[n]{|a_n|} = 3\sqrt[n]{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+1}}} \le 3\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{1}}} = 3$$

und andererseits

$$\sqrt[n]{|a_n|} \ge 3\sqrt[n]{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+n^7}}} = 3\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt[n]{n^{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}}}}} = 3\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^3}} \to 3,\ (n \to \infty).$$

Diese Abschätzung und das Einschließungskriterium zeigen, dass $\sqrt[n]{|a_n|} \to 3$ für $n \to \infty$ und damit $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 3$. Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist also $\rho = \frac{1}{3}$.

Sei nun $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \frac{1}{3}$. Dann haben wir

$$|a_n z^n| = a_n |z|^n = \frac{3^n\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+1}}\frac{1}{3^n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+1}} \le \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^7}} = n^{\frac{1}{2}-\frac{7}{2}} = n^{-3}$$

Das heißt, in diesem Fall ist die Reihe $\sum_n n^{-3}$ eine konvergente Majorante für $\sum_n a_n z^n$. Es folgt mit dem Majorantenkriterium, dass $\sum_n a_n z^n$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \frac{1}{3}$ absolut konvergiert. Insgesamt konvergiert die Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \le \frac{1}{3}$.

(ii) Die Potenzreihe $\sum_n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right)^n z^{2n}$ konvergiert genau für die $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \sqrt{2}$. Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig. Wir wollen das Wurzelkriterium auf die Reihe anwenden. Es gilt

$$\sqrt[n]{\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right|^n |z|^{2n}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right)|z|^2 \to \frac{1}{2}|z|^2,\ (n \to \infty).$$

Somit konvergiert die Reihe, wenn $\frac{1}{2}|z|^2 < 1$ und divergiert, wenn $\frac{1}{2}|z|^2 > 1$. Das heißt sie konvergiert wenn $|z| < \sqrt{2}$ und divergiert, wenn $|z| > \sqrt{2}$. Der Konvergenzradius ist $\rho = \sqrt{2}$.

Sei nun $|z| = \sqrt{2}$. Dann gilt

$$\left|\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right)^n z^{2n}\right| = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right)^n (|z|^2)^n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right)^n 2^n = \left(1 + \frac{2}{2n+1}\right)^n$$

Diese Folge konvergiert nicht gegen Null, da $1 + \frac{2}{2n+1} \ge 1$. Das bedeutet die Reihe $\sum_n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right)^n z^{2n}$ divergiert in diesem Fall.

Lösungsvorschlag: (Aufgabe 3')
Sei $f_n : [1,\pi] \to \mathbb{R};\ f_n(x) := \frac{\cos(\frac{x}{n})}{1-e^{-xn}}$.

(i) Die Funktion $\cos : [1,\pi] \to \mathbb{R}\quad x \mapsto \frac{x}{n}$ geht für $n \to \infty$ gegen 1. Ebenso konvergiert die Funktion $g(x) := (1 - e^{-nx})$ für $n \to \infty$ gegen 1 für alle $x \in [1,\pi]$. Somit ist die Funktionenfolge $f_n : [1,\pi] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_n(x) := \frac{\cos(\frac{x}{n})}{1-e^{-xn}}$ punktweise konvergent auf $[1,\pi]$. Die Funktionenfolge ist sogar gleichmäßig konvergent denn mit Hilfe der ersten Ableitung sieht man, dass sie ihr Maximum in einem der Punkte $x = 1$ oder $x = \pi$ annehmen muss.

$$\left(\frac{\cos(\frac{x}{n})}{1-e^{-xn}}\right)' = \frac{-\sin(\frac{x}{n})\frac{1}{n}(1-e^{-xn}) - \cos(\frac{x}{n})ne^{-xn}}{(1-e^{xn})^2}$$

Für alle $x \in [1,\pi]$ und $n \ge 3$ gilt $\sin(\frac{x}{n}) > 0$, $\cos(\frac{x}{n}) > 0$ und $e^{-nx} > 0$. Somit wird die obige Ableitung auf dem offenen Intervall $(1,\pi)$ nicht Null und die auf einem kompakten Intervall gegebene Funktionenfolge f_n muss ihr Maximum in einem der Randpunkte $x = 1$ oder $x = \pi$ annehmen. Nehmen wir an, dass $x = 1$ das Maximum ist:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[1,\pi]} \left|\frac{\cos(\frac{x}{n})}{1-e^{-xn}} - 1\right| \le \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\cos(\frac{1}{n})}{1-e^{-n}} - 1\right| \to 0$$

Ebenso erhalten wir unter der Annahme, dass $x = \pi$ das Maximum ist,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[1,\pi]} \left|\frac{\cos(\frac{x}{n})}{1-e^{-xn}} - 1\right| \le \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\cos(\frac{\pi}{n})}{1-e^{-\pi n}} - 1\right| \to 0$$

Somit ist f_n gleichmäßig konvergent gegen die konstante Funktion 1.

(ii) Da f_n nach (i) gleichmäßig konvergiert und für festes $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen f_n integrierbar sind auf dem Intervall $[1,\pi]$ folgt, dass wir Integration und Grenzwertbildung vertauschen können. Wir erhalten also

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\pi f_n(x)dx = \int_1^\pi \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_1^\pi 1dx = [x]_1^\pi = \pi - 1.$$

Aufgabe 4: Untersuchen Sie ob die Funktion $\ln x : (0,\infty) \to (0,\infty)$ gleichmäßig stetig ist auf

(i) einem Intervall der Form $[a,\infty)$ mit $a > 0$,

(ii) in ganz $(0,\infty)$.

Hinweis für Studenten von Professor Plum: ln bezeichnet den natürlichen Logarithmus log.

Lösungsvorschlag:

(i) $\ln x$ ist in jedem Intervall der Form $[a,\infty)$ mit $a > 0$ gleichmäßig stetig.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wähle $\delta := \varepsilon a$.
Dann gilt für alle $x, y \ge a$, $|x-y| < \delta$:

$$|\ln x - \ln y| = |x-y||\ln \xi'| = |x-y|\frac{1}{\xi} < \frac{\delta}{a} = \varepsilon$$

mit einer geeigneten Zwischenstelle ξ.

Ohne den Mittelwertsatz könnte man für $a \le y \le x$ wie folgt abschätzen:

$$|\ln x - \ln y| = \ln\frac{x}{y} \le \frac{x}{y} - 1 = \frac{x-y}{y} \le \frac{|x-y|}{a} < \frac{\delta}{a} = \varepsilon.$$

$\square$

(ii) $\ln x$ ist nicht auf ganz $(0,\infty)$ gleichmäßig stetig.

Beweis. Für die Negation der gleichmäßigen Stetigkeit ist zu zeigen, dass

$$\exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists x, y > 0 \text{ mit } |x-y| < \delta \text{ und } |\ln x - \ln y| \ge \varepsilon.$$

Sei $\varepsilon := \frac{\ln 2}{2}$ imd $\delta > 0$ beliebig vorgegeben. Wähle $x := \delta$ und $y := \frac{\delta}{2}$. Dann ist sicherlich $|x-y| < \delta$ und

$$|\ln x - \ln y| = \ln \frac{x}{x/2} = \ln 2 \geq \varepsilon\,.$$

□

Aufgabe 5: Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(i) Geben Sie das Epsilon-Delta Kriterium für die Stetigkeit von f in einem Punkt $x_0 \in D$ an.

(ii) Geben Sie das Folgenkriterium für die Stetigkeit von f in einem Punkt $x_0 \in D$ an.

(iii) Zeigen Sie, dass diese beiden Kriterien äquivalent sind.

Lösungsvorschlag:

(i) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in D$ falls

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \;\; \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta\,.$$

(ii) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in D$ falls für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k \in D$ und $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ folgt

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)\,.$$

(iii) *Beweis.* $(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge mit $x_k \in D$ und $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$. Per Voraussetzung existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$.

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad |f(x_k) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \text{für fast alle } k \in \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} |f(x_k) - f(x_0)| = 0\,. \end{aligned}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: (Beweis per Kontraposition) Sei f nicht stetig in $x_0 \in D$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\forall \delta > 0\, \exists x \in D, |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon\,. \tag{1}$$

Wähle $\delta = \frac{1}{n}$. Dann folgt aus (1) dass eine Folge $(x_k)_k$, $x_k \in D$, $x_k \to x_0$ existiert mit

$$|f(x_k) - f(x_0)| \geq \varepsilon\,.$$

Somit konvergiert $f(x_k)$ nicht gegen $f(x_0)$ für $k \to \infty$. Wir haben also aus $\neg(i)$ die Behauptung $\neg(ii)$ gefolgert. Das heißt es gilt: $(ii) \Rightarrow (i)$. □

Aufgabe 6:
Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die folgenden Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie dort deren Ableitung.

(i)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} e^{\cos x}, & x \in (-\infty, 0], \\ \frac{1}{x}, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

(ii)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x\cos(\frac{1}{x})\,, & \text{für } x \neq 0 \\ 0\,, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Lösungsvorschlag:

(i) *Voraussetzung:* Seien $I := \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} e^{\cos x}, & x \in (-\infty, 0], \\ \frac{1}{x}, & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

gegeben.
Behauptung: f ist differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit

$$f'(x) := \begin{cases} -e^{\cos x}\sin x, & x \in (-\infty, 0), \\ -\frac{1}{x^2}, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

In $x = 0$ ist f nicht differenzierbar.

Beweis. Auf der offenen Menge $(-\infty, 0)$ ist f differenzierbar. Mit der Ketteneregel erhält man

$$f'(x) = e^{\cos x} \cdot (-\sin x) = -e^{\cos x}\sin x$$

für alle $x \in (-\infty, 0)$.
Auf der offenen Menge $(0, \infty)$ ist f differenzierbar mit $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
Für $x > 0$ gilt

$$f(x) = \frac{1}{x} \to \infty$$

für $x \to 0+$. Somit ist f in $x = 0$ nicht stetig und daher in $x = 0$ auch nicht differenzierbar. □

(ii) *Voraussetzung:* Sei $I := \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x\cos(\frac{1}{x})\,, & \text{für } x \neq 0 \\ 0\,, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

gegeben.
Behauptung: f ist differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit

$$f'(x) := \cos(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x}\sin(\frac{1}{x}) \quad \forall x \neq 0\,.$$

In $x = 0$ ist f nicht differenzierbar.

Beweis. Nach den Rechenregel für differenzierbare Funktionen, insbesondere die Produkt- und Kettenregel ist die gegebene Funktion in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar und hat dort die Ableitung

$$f'(x) = \cos(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x}\sin(\frac{1}{x}).$$

Wir müssen also nur noch das Verhalten in $x_0 = 0$ untersuchen. Der Differenzenquotient ergibt für $x_0 = 0$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x\cos(\frac{1}{x}) - 0}{x - 0} = \cos(\frac{1}{x}),$$

und $\cos(\frac{1}{x})$ besitzt keinen Grenzwert für $x \to 0$, denn

$$\lim_{x\to 0} \cos(\frac{1}{x}) = \lim_{h\to\infty} \cos(h)$$

und $\cos(h)$ hat keinen Grenzwert für $h \to \infty$. □

Aufgabe 7:

(i) Sei $I \subset \mathbb{R}$. Wann heißt eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und wie ist ihre Ableitungsfunktion definiert?

(ii) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Die Funktion f sei stetig in 0 und g sei differenzierbar in 0 mit $g(0) = 0$. Zeigen Sie, dass $g \cdot f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x)f(x)$ in 0 differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung.

Lösungsvorschlag:

(i) Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar (diffbar) auf I oder einfach differenzierbar falls f in jedem Punkt $x_0 \in I$ diffbar ist. Die hierdurch gegebene Funktion

$$f' : I \to \mathbb{R};\, x_0 \mapsto f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

heißt Ableitungsfunktion oder kurz Ableitung von f.

(ii) *Voraussetzung*: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Die Funktion f sei stetig in 0 und g sei differenzierbar in 0 mit $g(0) = 0$. *Behauptung*: Die Funktion $\varphi := g \cdot f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x)f(x)$ ist in 0 differenzierbar mit $\varphi'(0) = f(0) \cdot g'(0)$.

Beweis. Für alle $h \neq 0$ gilt

$$\frac{\varphi(0+h) - \varphi(0)}{h} = \frac{g(h)f(h) - g(0)f(0)}{h} = \frac{g(h)f(h)}{h} = f(h) \cdot \frac{g(h)}{h} = f(h) \cdot \frac{g(h) - g(0)}{h}.$$

Da f stetig in 0 ist, gilt $f(h) \to f(0)$ für $h \to 0$, und da g differenzierbar in 0 ist, gilt $\frac{g(h)-g(0)}{h} \to g'(0)$ für $h \to 0$. Damit folgt

$$\frac{\varphi(0+h) - \varphi(0)}{h} = f(h) \cdot \frac{g(h) - g(0)}{h} \to f(0) \cdot g'(0)$$

für $h \to 0$, also ist φ nach Definition in 0 differenzierbar mit $\varphi'(0) = f(0) \cdot g'(0)$. □