Prof. Dr. Tobias Lamm
Jasmin Hörter, M.Sc.

Wintersemester 2019/20
11. März 2020

# Analysis I
## Klausur 11.03.20
### Lösungen

**Aufgabe 1 (3+3 Punkte)**

Berechnen Sie die Grenzwerte

a)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right),$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e}{\sqrt[2]{e}}\cdot\frac{\sqrt[3]{e}}{\sqrt[4]{e}}\cdot\frac{\sqrt[5]{e}}{\sqrt[6]{e}}\cdot\ldots\cdot\frac{\sqrt[2n-1]{e}}{\sqrt[2n]{e}}\right).$$

**Lösung:**

a) Via Partialbruchzerlegung haben wir

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}=\frac{A(k+1)+Bk}{k(k+1)}$$

mit $A=1$ und $B=-1$. Also

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

b) Es ist

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e}{\sqrt[2]{e}}\cdot\frac{\sqrt[3]{e}}{\sqrt[4]{e}}\cdot\frac{\sqrt[5]{e}}{\sqrt[6]{e}}\cdot\ldots\cdot\frac{\sqrt[2n-1]{e}}{\sqrt[2n]{e}}\right)=\prod_{i=1}^{\infty}e^{\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i}}=e^{\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i}\right)}$$

und

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\ldots=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}=\log(2).$$

Somit

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e}{\sqrt[2]{e}}\cdot\frac{\sqrt[3]{e}}{\sqrt[4]{e}}\cdot\frac{\sqrt[5]{e}}{\sqrt[6]{e}}\cdot\ldots\cdot\frac{\sqrt[2n-1]{e}}{\sqrt[2n]{e}}\right)=e^{\log 2}=2.$$

**Aufgabe 2 (3+3+3+1 Punkte)**

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ die $n$-te harmonische Zahl. Wir definieren die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n := H_n - \log(n).$$

Zeigen Sie:

a) $\log(x) \leqslant x - 1$ für alle $x > 0$.

b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

c) $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

d) Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}(H_n - \log(n)) \approx 0.57721$ heißt *Euler-Mascheroni Konstante*. Warum existiert dieser Grenzwert?

**Lösung:**

a) Da $\log(x)$ konkav verwenden wir die Ungleichung für konkave Funktionen $F : D \to \mathbb{R}$ aus der Vorlesung

$$f(x) \leqslant f(y) + f'(y) \cdot (x - y) \qquad \text{für alle } x, y \in D.$$

Wir verwenden dies für $x$ und $y = 1$ und mit $(\log(x))' = \frac{1}{x}$:

$$\log(x) \leqslant x - 1.$$

b) Wir betrachten

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n = H_{n+1} - \log(n+1) - (H_n - \log(n)) &= \frac{1}{n+1} + \log(n) - \log(n+1) \\ &= \frac{1}{n+1} + \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0, \end{aligned}$$

wobei wir für die Ungleichung Teil (i) verwendet haben. Somit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.

c) Für alle $k \in \{1, ..., n\}$ gilt $\frac{1}{k} \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x+1} dx$. Damit gilt

$$\begin{aligned} H_n &\geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x+1} dx = \int_0^n \frac{1}{x+1} dx \\ &= \log(x+1)\Big|_0^n = \log(n+1) - \log(1) = \log(n+1). \end{aligned}$$

Da $\log(x)$ monoton wachsend auf $(1, \infty)$ ist somit $a_n = H_n - \log(n) \geqslant \log(n+1) - \log(n) \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

d) Die Folge $(a_n)$ ist nach Teil (ii) und (iii) monoton fallend und von unten beschränkt. Nach dem Satz von der Monotonen Konvergenz aus der Vorlesung folgt nun, dass die Folge konvergiert.

— bitte wenden —

**Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte)**

Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{3x+2}$

b) $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log((x + \sin x)^2)$

c) $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^{\sin\sqrt{x}}$

**Lösung:**

a) Mit der Quotientenregel folgt für $x \neq \frac{-2}{3}$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(3x+2) - 3(x^2 - 2x + 1)}{(3x+2)^2} = \frac{3x^2 + 4x - 7}{(3x+2)^2}.$$

b) Es ist $g(x) = \log((x + \sin x)^2) = 2 \log|x + \sin x|$ und für $x \neq 0$ ist

$$g'(x) = \frac{2}{x + \sin x} \cdot (1 + \cos x) = \frac{2 + 2\cos x}{x + \sin x}.$$

c) Wir haben $h(x) = x^{\sin\sqrt{x}} = e^{\sin\sqrt{x}\cdot\log x}$ und somit

$$\begin{aligned} h'(x) &= e^{\sin\sqrt{x}\cdot\log x} \cdot \left( \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \log x + \frac{\sin\sqrt{x}}{x} \right) \\ &= x^{\sin\sqrt{x}} \cdot \left( \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \log x + \frac{\sin\sqrt{x}}{x} \right). \end{aligned}$$

**Aufgabe 4 (4 Punkte)**

Sei $\phi : (-1,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch $\phi(x) := \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geqslant 1$ gilt

$$\phi^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} + \frac{(n-1)!}{(1-x)^n}.$$

**Lösung:**
Wir zeigen die Behauptung mit vollständiger Induktion. Für $n = 1$ ist

$$\phi'(x) = \frac{1-x}{1+x}\left(\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}\right) = \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \phi^{(1)}(x).$$

IV: Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.
IS: Wir leiten $\phi^{(n)}(x)$ ab

$$\begin{aligned}\left(\phi^{(n)}\right)'(x) &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^{n+1}} \cdot (-n) + \frac{(n-1)!}{(1-x)^{n+1}} \cdot n \\ &= (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} + \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} = \phi^{(n+1)}(x).\end{aligned}$$

## Aufgabe 5 (5 Punkte)

Finden Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + x)\sqrt{|x|}$.

**Lösung:**
$f$ ist nicht differenzierbar in $x = 0$. Da $f(0) = 0$ und $f(x) > 0$ in einer punktierten Umgebung von $x = 0$, ist $x = 0$ ein lokales Minimum.
Für $x > 0$ gilt $f(x) = (1 + x)\sqrt{x}$. $f$ ist hier differenzierbar mit

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{1 + x}{2\sqrt{x}}.$$

Weiter ist

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{x} = \frac{1 + x}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

Dies ist aber keine Lösung für $x > 0$. Das heisst es gibt keine Extrema für $x > 0$.
Für $x < 0$ gilt $f(x) = (1 + x)\sqrt{-x}$ und

$$f'(x) = \sqrt{-x} - \frac{1 + x}{2\sqrt{-x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-x} = \frac{1 + x}{2\sqrt{-x}} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

Da $f'(x) > 0$ für $x < -\frac{1}{3}$ und $f'(x) < 0$ für $x > -\frac{1}{3}$ ist $x = -\frac{1}{3}$ ein lokales Maximum. Damit sind $\{-\frac{1}{3}, 0\}$ alle lokalen Extrema.

**Aufgabe 6 (4+3+3 Punkte)**

Es sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ eine Funktionenfolge

a) Zeigen Sie, dass $f_n$ punktweise konvergiert und bestimmen Sie die Grenzfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass die Konvergenz auf dem Intervall $(-\infty, -2]$ gleichmäßig ist.

c) Ist die Konvergenz gleichmäßig auf $\mathbb{R}$? Begründen Sie ihre Antwort.

**Lösung:**

a) Offenbar ist $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. Ist $x \neq 0$, so gilt

$$f_n(x) = \frac{1}{x} \cdot nx^2 e^{-nx^2}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wegen $x \neq 0$ gilt $\lim_{n\to\infty}(nx^2) = \infty$ und nach Vorlesung gilt $\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$. Zusammen ergibt sich somit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ und die Funktionenfolge konvergiert also punktweise auf ganz $\mathbb{R}$ gegen die Nullfunktion.

b) Sei $\varepsilon > 0$. Aus $\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$ folgt die Existenz einer Zahl $M > 0$ so, dass $0 < xe^{-x} < \varepsilon$ für alle $x > M$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{M}{4}$ erhalten wir somit $nx^2 \geqslant 4n > M$ für alle $x \leqslant -2$. Folglich gilt

$$|f_n(x)| = \left| \frac{1}{x} \cdot nx^2 e^{-nx^2} \right| \leqslant \frac{1}{2} \cdot nx^2 e^{-nx^2} < \varepsilon$$

für alle $n > \frac{M}{4}$ und alle $x \leqslant -2$. Somit konvergiert die Funktionenfolge auf $(-\infty, -2]$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

c) Die Funktionenfolge konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig. Wäre die Konvergenz gleichmäßig, so gäbe es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \geqslant n_0$. Insbesondere müsste dann $|f_n(\frac{1}{n})| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$ gelten. Allerdings ist

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-\frac{1}{n}} \to 1 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

**Aufgabe 7 (4+3 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Integrale

a) $\int_0^\pi x^2 \cos x dx$,

b) $\int_0^1 \frac{\exp(\sqrt{t}+1)}{\sqrt{t}} dt$.

**Lösung:**

a) Wir verwenden partielle Integration mit $u(x) = x^2$ und $v'(x) = \cos(x)$. Dann ist $u'(x) = 2x$ und $v(x) = \sin(x)$. Damit folgt

$$\int_0^\pi x^2 \cos x dx = x^2 \sin x \Big|_0^\pi - 2 \int_0^\pi x \sin x dx = -2 \int_0^\pi x \sin x dx.$$

Wir integrieren erneut partiell mit $u(x) = x,\ u'(x) = 1$ und $v'(x) = \sin x,\ v(x) = -\cos x$

$$\begin{aligned} &= -2 \left( -x \cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx \right) \\ &= -2\pi + 2 \sin x \Big|_0^\pi \\ &= -2\pi. \end{aligned}$$

b) Wir substituieren $x = \sqrt{t}$ und $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$. Damit

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^{\sqrt{t}+1}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^1 e^{x+1} dx = 2e \int_0^1 e^x dx \\ = 2e \cdot e^x \Big|_0^1 \\ = 2e^2 - 2e. \end{aligned}$$