Analysis I

Modulprüfung

Aufgabe 1

Es sei $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := \frac{5a_n}{3+a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie $0 < a_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ strikt wachsend ist.

(c) Begründen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion. Da $a_1 = 1$ per Definition gilt, ist $0 < a_1 < 2$ trivialerweise erfüllt. Es gelte nun $0 < a_n < 2$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$a_n > 0 \Longrightarrow a_{n+1} = \frac{5a_n}{3+a_n} > 0,$$
$$a_n < 2 \Longrightarrow 2 - a_{n+1} = \frac{2(3+a_n) - 5a_n}{3+a_n} = 3 \cdot \frac{2-a_n}{3+a_n} > 0.$$

Also gilt auch $0 < a_{n+1} < 2$. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist $0 < a_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Nach Aufgabenteil (a) ist $0 < a_n < 2$ und daher

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5}{3+a_n} > \frac{5}{3+2} = 1 \Longrightarrow a_{n+1} > a_n.$$

$$\textit{alternativ: } a_{n+1} - a_n = \frac{5a_n}{3+a_n} - \frac{a_n(3+a_n)}{3+a_n} = \frac{a_n(2-a_n)}{3+a_n} > 0 \Longrightarrow a_{n+1} > a_n.$$

Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig war, folgern wir $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h., $(a_n)_{n\geq 1}$ ist strikt wachsend.

(c) Nach Aufgabenteilen (a) und (b) ist $(a_n)_{n\geq 1}$ (strikt) wachsend und durch 2 nach oben beschränkt. Damit ist nach dem Monotoniekriterium die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent. Sei $a \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $(a_n)_{n\geq 1}$. Da $a_1 = 1$ und $(a_n)_{n\geq 1}$ strikt wachsend ist, muss $a > 1$, also insbesondere $a \neq 0$ und $a \neq -3$ sein. Aus den Grenzwertsätzen erhalten wir

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5a_n}{3+a_n} \overset{a\neq -3}{=} \frac{5a}{3+a} \implies a(3+a) = 5a \overset{a\neq 0}{\Longrightarrow} 3+a = 5 \implies a = 2.$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren.

$$\text{(a)} \quad \sum_{n\geq 1}(-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n\geq 1}\frac{n!}{2^{(n^2)}}, \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n\geq 1}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{(n^3)}.$$

Lösungsvorschlag:

(a) Wir definieren $a_n := \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ für $n \in \mathbb{N}$. Da $x \mapsto \sin(x)$ auf $[0,1]$ wachsend ist, ist (a_n) fallend:

$$a_{n+1} = \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \sin\left(\frac{1}{n}\right) = a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aus der Stetigkeit des Sinus folgt ferner, dass (a_n) eine Nullfolge ist:

$$a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \to \sin(0) = 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Also ist $(a_n)_{n\geq 1}$ eine fallende Nullfolge. Damit konvergiert $\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$ nach dem Leibniz-kriterium.

(b) Wir setzen $a_n := \frac{n!}{2^{(n^2)}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)!/2^{(n+1)^2}}{n!/2^{n^2}} = \frac{n+1}{2^{2n+1}} = 2(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^{(n+1)} \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \longrightarrow \infty, \tag{1}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $(nq^n)_{n\geq 1}$ für $q \in [0,1)$ eine Nullfolge ist (vgl. Übungsblatt 11; alternativ kann man $nq^n = ne^{\ln(q)n}$ für $q \in (0,1)$ schreiben und $\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$ (Beispiel 5.28 d)) ausnutzen). Nach dem Quotientenkriterium konvergiert $\sum_{n\geq 1} a_n$.
Anmerkung: Da für die Anwendung des Quotientenkriteriums $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ ausreicht, reicht es z.B. auch aus, $n+1 \leq 2^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, per vollständiger Induktion zu zeigen, da dann nach (1) die Ungleichung $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Wir definieren $a_n := \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3}$ für $n \in \mathbb{N}$. Es ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\right)^{n^2} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}} \to \frac{1}{e} < 1 \quad (n \to \infty),$$

da nach der Vorlesung $\lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{k})^k = e > 1$ gilt. Nach dem Wurzelkriterium konvergiert $\sum_{n\geq 1} a_n$.

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie $\frac{y}{2} \leq \ln(1+y) \leq y$ für $y \in [0,1]$.

(b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) z^n$ konvergiert.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir definieren die Funktionen $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(y) = \ln(1+y) - \tfrac{y}{2}, \quad g(y) = y - \ln(1+y) \quad \text{für } y \in [0,1].$$

Es gilt $f(0) = g(0) = 0$ und für $y \in [0,1]$

$$f'(y) = \tfrac{1}{1+y} - \tfrac{1}{2} \geq \tfrac{1}{1+1} - \tfrac{1}{2} = 0, \qquad g'(y) = 1 - \tfrac{1}{1+y} \geq 1 - \tfrac{1}{1+0} = 0.$$

Also sind f und g wachsend, und daher gilt für $y \in [0,1]$

$$\begin{array}{rlcl} & 0 = f(0) \leq f(y) & \text{und} & 0 = g(0) \leq g(y), \\ \text{also} & \tfrac{y}{2} \leq \ln(1+y) & \text{und} & \ln(1+y) \leq y. \end{array}$$

(b) Aus (a) folgt (mit $y := \frac{1}{n^2}$)

$$\frac{1}{2n^2} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

und daraus durch Ziehen der n-ten Wurzel

$$\frac{1}{\sqrt[n]{2}\,(\sqrt[n]{n})^2} \leq \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da nach der Vorlesung und Übung $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ gilt, folgt aus dem Sandwichlemma

$$\lim_{n\to\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Also ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) z^n$ gleich 1. Dies bedeutet, dass $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) z^n$ für $|z| < 1$ (absolut) konvergiert und für $|z| > 1$ divergiert. Wir untersuchen den Fall $|z| = 1$ genauer. Für $|z| = 1$ gilt nach (a)

$$\left|\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) z^n\right| = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) |z|^n \overset{\text{a)}}{\leq} \frac{1}{n^2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, folgt aus dem Majorantenkriterium, dass $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) z^n$ (absolut) konvergiert. Zusammenfassend erhalten wir also für $z \in \mathbb{C}$ die Äquivalenz:

$$\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) z^n \text{ konvergiert} \iff |z| \leq 1.$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0^+} (1+2x)^{\frac{1}{3x}}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1 - \sin(x)}{x^2}.$$

Lösungsvorschlag:

(a) Es ist

$$(1+2x)^{\frac{1}{3x}} = e^{\frac{\ln(1+2x)}{3x}} \quad \text{für } x > 0.$$

Nach der Regel von de L'Hospital ist

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+2x)}{3x} \overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3(1+2x)} = \frac{2}{3},$$

wobei die Gleichungskette von rechts nach links zu lesen ist. Nun folgt aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{x\to 0^+} (1+2x)^{\frac{1}{3x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(1+2x)}{3x}} = e^{\frac{2}{3}}.$$

(b) Aus der Regel von de L'Hospital folgt

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1 - \sin x}{x^2} \overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - \cos x}{2x} \overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x + \sin(x)}{2} = \frac{e^0 + 0}{2} = \frac{1}{2},$$

wobei die Gleichungskette von rechts nach links zu lesen ist und im letzten Schritt die Stetigkeit von exp und sin ausgenutzt wurden.

Aufgabe 5

(a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $e^{-x} = \sqrt{x} - 1$ genau eine Lösung $x \in [0,4]$ hat.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Zeigen Sie, dass f ein globales Minimum hat.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir definieren

$$f\colon [0,4] \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x} - \sqrt{x} + 1.$$

und stellen fest, dass $x \in [0,4]$ genau dann eine Lösung der Gleichung $e^{-x} = \sqrt{x} - 1$ ist, wenn x eine Nullstelle von f ist. Als Komposition stetiger Funktionen ist f stetig. Ferner gilt

$$\begin{aligned} f(0) &= e^0 - \sqrt{0} + 1 = 2 > 0, \\ f(4) &= e^{-4} - \sqrt{4} + 1 = e^{-4} - 1 < 0, \quad \text{da } e > 1. \end{aligned}$$

Nach dem Nullstellensatz existiert also ein $x_0 \in (0,4)$ mit $f(x_0) = 0$. Da

$$f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0 \quad \text{für alle } x \in (0,4],$$

ist f strikt fallend auf $[0,4]$ und kann damit nur höchstens eine Nullstelle haben. Somit ist die Lösung x_0 eindeutig.

(b) Da nach Voraussetzung $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ gilt, existiert ein $K > 0$ mit

$$f(x) \geq |f(0)| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| \geq K. \tag{2}$$

Da ferner f stetig ist, folgt aus dem Satz vom Maximum, dass $m := \min_{x\in[-K,K]} f(x)$ existiert. Tatsächlich ist dann m das Minimum von f auf ganz $\mathbb{R}$: Denn aus (2) folgt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq K$

$$f(x) \geq |f(0)| \geq f(0) \geq m.$$

Da nach Definition von m auch $f(x) \geq m$ für alle $x \in [-K, K]$ gilt, erhalten wir schließlich $f(x) \geq m$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h., $m = \min_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

Aufgabe 6

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^{\frac{1}{n}}\, e^{-nx}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\geq1}$ auf $[0,\infty)$ punktweise konvergiert und geben Sie die Grenzfunktion f an.

(b) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\geq1}$ gleichmäßig auf $[1,\infty)$ konvergiert.

(c) Konvergiert $(f_n)_{n\geq1}$ gleichmäßig auf $[0,\infty)$?

Lösungsvorschlag:

(a) Es gilt $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $x > 0$. Aus der Vorlesung sind die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ und $\lim_{n\to\infty} e^{-nx} = 0$ bekannt. Also folgt

$$f_n(x) = x^{\frac{1}{n}} e^{-nx} \to 1 \cdot 0 \quad (n \to \infty).$$

Somit konvergiert $(f_n)_{n\geq1}$ punktweise gegen die Nullfunktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

(b) Für $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f_n'(x) = \tfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} e^{-nx} + x^{\frac{1}{n}}(-n)e^{-nx} = \left(\tfrac{1}{nx} - n\right) f_n(x).$$

Da $f_n(x) > 0$ für $x > 0$ ist, folgt

$$f_n'(x) \begin{cases} > 0 & \iff \frac{1}{nx} - n > 0 \iff x \in \left(0, \frac{1}{n^2}\right), \\ = 0 & \iff \frac{1}{nx} - n = 0 \iff x = \frac{1}{n^2}, \\ < 0 & \iff \frac{1}{nx} - n < 0 \iff x \in \left(\frac{1}{n^2}, \infty\right). \end{cases} \tag{3}$$

Insbesondere ist f_n fallend auf $[\frac{1}{n^2}, \infty) \supseteq [1,\infty) =: J$. Somit ist

$$\|f_n - f\|_{\infty,J} = \|f_n\|_{\infty,J} = \sup_{x\in J} |f_n(x)| = \sup_{x\in J} f_n(x) = f_n(1) \overset{\text{(a)}}{\to} f(1) = 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Also konvergiert $(f_n)_{n\geq1}$ gleichmäßig gegen f auf $J = [1,\infty)$.

(c) Sei $I := [0,\infty)$. Aus (3) folgt, dass f_n in $x_n := n^{-2}$ ein globales Maximum hat. Wir folgern

$$\|f_n - f\|_{\infty,I} = \|f_n\|_{\infty,I} = f_n(x_n) = \frac{1}{\sqrt[n]{n}^2} e^{-\frac{1}{n}} \to 1 \cdot 1 \neq 0 \quad (n \to \infty),$$

wobei wir $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ verwendet haben, vgl. Übung 4 (anstelle von (x_n) kann man z.B. auch die Folge $(y_n) = (\frac{1}{n})$ betrachten). Also konvergiert $(f_n)_{n\geq 1}$ nicht gleichmäßig gegen f auf $I = [0,\infty)$.

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2(x)\cos\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

stetig differenzierbar auf $[0,\infty)$ ist.

Lösungsvorschlag:

Offenbar ist $f \in C^\infty((0,\infty))$. Also hängt die stetige Differenzierbarkeit von f nur vom Punkt $x_0 = 0$ ab. Für $x \to 0^+$ haben wir

$$0 \leq \left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| = \left|\frac{\sin x}{x}\right| |\sin x| \, |\cos(x^{-\frac{1}{2}})| \leq \left|\frac{\sin x}{x}\right| |\sin x| \to 1 \cdot |\sin(0)| = 0,$$

wobei wir zuletzt $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (nach Vorlesung oder der Regel von de L'Hospital) und die Stetigkeit des Sinus ausgenutzt haben. Also ist f in 0 differenzierbar und es gilt $f'(0) = 0$. Für $x > 0$ folgt aus der Produkt- und Kettenregel

$$\begin{aligned} f'(x) =& 2\sin(x)\cos(x)\cos(x^{-\frac{1}{2}}) + \sin^2(x)\left(-\sin(x^{-\frac{1}{2}})\right) \cdot \frac{-1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \\ =& 2\sin(x)\cos(x)\cos(x^{-\frac{1}{2}}) + \frac{\sin^2(x)}{2x^2}\sin(x^{-\frac{1}{2}})\, x^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Wegen $|\sin y| \leq 1$, $|\cos y| \leq 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$ folgt hieraus

$$|f'(x)| \leq 2|\sin x| + \frac{1}{2}\left|\frac{\sin x}{x}\right|^2 x^{\frac{1}{2}} \quad \text{für alle } x > 0.$$

Für $x \to 0^+$ haben wir somit

$$|f'(x) - f'(0)| = |f'(x)| \leq 2|\sin x| + \frac{1}{2}\left|\frac{\sin x}{x}\right|^2 x^{\frac{1}{2}} \to 2 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot 0 = 0,$$

wobei wir wieder $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, die Stetigkeit des Sinus und der Wurzelfunktion ausgenutzt haben. Dies zeigt, dass f' in 0 stetig und somit f auf $[0,\infty)$ stetig differenzierbar ist.