Analysis I

Modulprüfung

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$

$$\prod_{k=0}^{n-1}(1+x^{(2^k)}) = \sum_{k=0}^{2^n-1} x^k.$$

Hinweis: $\prod_{k=0}^{n-1}(1+x^{(2^k)}) := (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{(2^{n-1})})$ für $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass $\sum_{k=0}^{\infty} \log\left(1+x^{(2^k)}\right) = \log\left(\frac{1}{1-x}\right)$ für $x \in (-1,1)$.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir müssen zeigen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ die Aussage

$$A(n,x)\colon \quad \prod_{k=0}^{n-1}(1+x^{(2^k)}) = \sum_{k=0}^{2^n-1} x^k$$

wahr ist. Dazu halten wir ein beliebig gewähltes $x \in \mathbb{R}$ fest und wir zeigen per vollständiger Induktion, dass $A(n,x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

Induktionsanfang (IA): Es gilt

$$\prod_{k=0}^{1-1}\left(1+x^{(2^k)}\right) = 1+x = \sum_{k=0}^{1} x^k.$$

Induktionsvoraussetzung (IV): Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$\prod_{k=0}^{n-1}(1+x^{(2^k)}) = \sum_{k=0}^{2^n-1} x^k.$$

Induktionsschritt (IS): Wir folgern

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n}(1+x^{(2^k)}) &= (1+x^{(2^n)})\prod_{k=0}^{n-1}(1+x^{(2^k)}) \\ &\overset{\text{(IV)}}{=} (1+x^{(2^n)})\sum_{k=0}^{2^n-1} x^k = \sum_{k=0}^{2^n-1} x^k + \sum_{k=0}^{2^n-1} x^{k+2^n} = \sum_{k=0}^{2^n-1} x^k + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} x^k = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} x^k.\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist damit $A(n,x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr, und da $x \in \mathbb{R}$ zuvor beliebig gewählt war, ist somit wie gewünscht $A(n,x)$ wahr für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$.

(b) Es sei $x \in (-1,1)$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ betrachten wir zunächst die n-te Partialsumme von $\sum_{k\geq 0} \log\left(1+x^{(2^k)}\right)$: Nach Aufgabenteil (a) und der geometrischen Summenformel (G) gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \log\left(1+x^{(2^k)}\right) = \log\left(\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{(2^k)}\right)\right) \overset{\text{(a)}}{=} \log\left(\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} x^k\right) \overset{\text{(G)}}{=} \log\left(\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}\right).$$

Da $\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$ gilt, folgern wir aus der Stetigkeit des Logarithmus

$$\sum_{k=0}^{n} \log\left(1+x^{(2^k)}\right) = \log\left(\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}\right) \longrightarrow \log\left(\frac{1}{1-x}\right) \quad (n\to\infty).$$

Nach der Definition der Reihenkonvergenz bedeutet dies aber gerade

$$\sum_{k=0}^{\infty} \log\left(1+x^{(2^k)}\right) = \log\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Da $x \in (-1,1)$ zu Beginn beliebig gewählt war, ist die Aussage bewiesen.

Aufgabe 2

(a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

$$\text{(i)} \quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\binom{2n}{n}}, \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{3n-4}{\sqrt{n^4+1}}.$$

(b) Es sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine monoton fallende Nullfolge und $\sum_{n\geq 0} a_n$ divergent.

  (i) Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius von $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ gleich 1 ist.

  (ii) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ konvergent ist.

Lösungsvorschlag:

(a) (i) Es sei $a_n := \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2(n+1)}{n+1}} = \frac{(2n)!}{n!n!}\,\frac{(n+1)!(n+1)!}{(2(n+1))!} = \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2(2+\frac{1}{n})} \longrightarrow \frac{1}{4} < 1 \quad (n\to\infty).$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert also die Reihe $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ (sogar absolut).

(ii) Es sei $a_n := \frac{3n-4}{\sqrt{n^4+1}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist für $n \geq 4$

$$a_n = \frac{2n+(n-4)}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{2n}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{2n}{\sqrt{n^4+3n^4}} = \frac{2n}{2n^2} = \frac{1}{n}.$$

Da die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ nach Vorlesung divergent ist, folgt nun aus dem Minorantenkriterium, dass auch die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{3n-4}{\sqrt{n^4+1}}$ divergent ist.

(b) (i) Es sei ρ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Da $(a_n)_{n\geq 0}$ nach Voraussetzung eine monoton fallende Nullfolge ist, gilt

$$0 \leq a_n \leq a_0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0,$$

und daher auch

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{|a_0|} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Hieraus folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_0|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_0|} = 1,$$

wobei wir den aus der Vorlesung bekannten Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für $a > 0$ zuletzt ausgenutzt haben. Hieraus folgt für den Konvergenzradius

$$\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \geq 1.$$

Andererseits folgt aus der Divergenz von $\sum_{n\geq 0} a_n = \sum_{n\geq 0} a_n 1^n$, dass $\rho \leq 1$ sein muss. Wir erhalten also wie gewünscht $\rho = 1$.

(ii) Da nach Aufgabenteil (i) der Konvergenzradius $\rho = 1$ ist, konvergiert $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ (sogar absolut) für $|x| < 1$, d.h., für $x \in (-1, 1)$, und divergiert für $|x| > 1$. Wir untersuchen noch die Fälle $x = \pm 1$ genauer. Für $x = 1$ ist $\sum_{n\geq 0} a_n$ nach Voraussetzung divergent und für $x = -1$ ist nach dem Leibnizkriterium $\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n$ konvergent. Es folgt

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \colon \sum_{n\geq 0} a_n x^n \text{ ist konvergent} \right\} = [-1, 1).$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(e^{3x} - 1)}{x} \quad , \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to\infty} x^2 \left(\sqrt{x^6 + 3x} - x^3 \right).$$

Lösungsvorschlag:

(a) Mit der Regel von de L'Hospital folgt

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(e^{3x} - 1)}{x} \overset{„\frac{0}{0}“}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{3e^{3x} \cos(e^{3x} - 1)}{1} = 3e^0 \cos(e^0 - 1) = 3,$$

wobei wir für die vorletzte Gleichheit die Stetigkeit der Exponentialfunktion und des Kosinus ausgenutzt haben.

(b) Für $x > 0$ gilt

$$\sqrt{x^6 + 3x} - x^3 = \frac{(\sqrt{x^6 + 3x} - x^3)(\sqrt{x^6 + 3x} + x^3)}{\sqrt{x^6 + 3x} + x^3} = \frac{(\sqrt{x^6 + 3x})^2 - (x^3)^2}{\sqrt{x^6 + 3x} + x^3} = \frac{3x}{\sqrt{x^6 + 3x} + x^3}.$$

Für $x \to \infty$ folgern wir daher

$$x^2 \left(\sqrt{x^6 + 3x} - x^3 \right) = \frac{3x^3}{\sqrt{x^6 + 3x} + x^3} = \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x^5}} + 1} \longrightarrow \frac{3}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{3}{2}.$$

Alternativer Lösungsvorschlag: Für $x > 0$ ist

$$x^2\left(\sqrt{x^6+3x}-x^3\right) = x^5\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^5}}-1\right) = 3\frac{\sqrt{1+\frac{3}{x^5}}-1}{\frac{3}{x^5}}$$

Durch die Substitution $y = \frac{3}{x^5}$ $(x > 0)$ sehen wir, dass der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{x^5}}-1}{\frac{3}{x^5}}$$

genau dann existiert, wenn der Grenzwert

$$\lim_{y\to 0+} \frac{\sqrt{1+y}-1}{y}$$

existiert. Letzterer ist gleich der Ableitung von $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(y) = \sqrt{1+y}$ an der Stelle $y = 0$, also gleich

$$f'(y)|_{y=0} = \left.\frac{1}{2\sqrt{1+y}}\right|_{y=0} = \frac{1}{2}.$$

(Alternativ kann man zur Bestimmung von $\lim_{y\to 0+} \frac{\sqrt{1+y}-1}{y}$ auch wieder die Regel von de L'Hospital verwenden). Wir folgern insgesamt

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(\sqrt{x^6+3x}-x^3\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{x^5}}-1}{\frac{3}{x^5}} = \lim_{y\to 0+} 3\frac{\sqrt{1+y}-1}{y} = \frac{3}{2}.$$

Aufgabe 4

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $y \in (0,1)$ ein $x \in (0,\infty)$ existiert mit

$$(1+x)^2e^{-x} = y.$$

(b) Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ nichtleer und $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Ferner existiere eine in 0 stetige Funktion $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $g(0) = 0$ so, dass

$$|f(z) - f(w)| \le g(|z-w|) \quad \text{für alle } z, w \in D.$$

Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir betrachten die Funktion

$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (1+x)^2e^{-x}.$$

Dann ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Ferner gelten

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (1+x)^2e^{-x} = 1, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (1+x)^2e^{-x} = 0.$$

Hieraus und dem Zwischenwertsatz folgt die zu zeigende Aussage, denn: Ist $y \in (0,1)$ gegeben, so folgt aus $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$ die Existenz eines $x_1 \in (0,\infty)$ mit $f(x_1) > y$ und aus $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ die Existenz eines $x_2 > x_1$ mit $f(x_2) < y$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert daher ein $x \in (x_1, x_2)$ mit $f(x) = y$, d.h., mit

$$(1+x)^2 e^{-x} = y.$$

Da $y \in (0,1)$ beliebig gewählt war, existiert also zu jedem $y \in (0,1)$ ein $x \in (0,\infty)$ mit $(1+x)^2 e^{-x} = y$. Genau dies war zu zeigen.

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Da $g(0) = 0$ und g in 0 stetig ist, existiert nach der ε-δ-Charakterisierung der Stetigkeit ein $\delta > 0$ mit

$$|g(r)| = |g(r) - g(0)| \le \varepsilon \quad \text{für alle } r \in [0,\delta]. \tag{1}$$

Seien nun $z, w \in D$ mit $|z-w| \le \delta$. Dann gilt

$$|f(z) - f(w)| \le g(|z-w|) \le \big|g(|z-w|)\big| \overset{(1)}{\le} \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, zeigt dies die gleichmäßige Stetigkeit von f.

Aufgabe 5

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \colon (1,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\ge 1}$ punktweise konvergiert und geben Sie die Grenzfunktion an.

(b) Sei $\alpha > 1$. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\ge 1}$ gleichmäßig auf (α,∞) konvergiert.

(c) Konvergiert $(f_n)_{n\ge 1}$ gleichmäßig auf $(1,\infty)$? Beweisen oder widerlegen Sie.

Lösungsvorschlag:

(a) Sei $x \in (1,\infty)$. Dann gilt

$$0 \le f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}} \le \frac{x^n}{0+x^{2n}} = x^{-n} \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty).$$

Somit gilt nach dem Sandwichkriterium $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Da $x \in (1,\infty)$ beliebig gewählt war, konvergiert damit $(f_n)_{n\ge 1}$ auf $(1,\infty)$ punktweise gegen die Nullfunktion

$$f \colon (1,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 0.$$

(b) Wir beweisen zunächst, dass f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ fallend ist. Dazu betrachten wir die Funktion $g \in (1,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(t) = \frac{t}{1+t^2}$ und für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $h_n \colon (1,\infty) \to (1,\infty)$, $h_n(x) = x^n$. Wegen

$$g'(t) = \frac{(1+t^2) - 2t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} < 0 \quad \text{für alle } t > 1$$

ist g monoton fallend. Weiter ist aus der Vorlesung bekannt, dass h_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ wachsend ist. Also ist $f_n = g \circ h_n$ als Komposition einer fallenden und wachsenden Funktion fallend. Seien nun $\alpha > 1$ und $J := (\alpha,\infty)$. Da f_n fallend und stetig ist, folgt

$$\|f_n\|_{\infty,J} = \sup_{x\in J} |f_n(x)| = \sup_{x\in J} f_n(x) = \lim_{x\to\alpha+} f_n(x) = f_n(\alpha) \xrightarrow{\text{(a)}} f(\alpha) = 0.$$

Dies zeigt, dass $(f_n)_{n\ge 1}$ auf $J = (\alpha,\infty)$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

(c) Es sei $I := (1, \infty)$. Da wie in Aufgabenteil (b) bereits gesehen die Funktionen f_n fallend sind, folgt

$$\|f_n\|_{\infty,I} = \sup_{x\in I} f_n(x) = \lim_{x\to 1+} f_n(x) = \lim_{x\to 1+} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{1}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere ist $(\|f_n\|_{\infty,I})_{n\geq 1}$ keine Nullfolge. Somit konvergiert $(f_n)_{n\geq 1}$ auf $I = (1, \infty)$ nicht gleichmäßig gegen f.

Alternativer Lösungsvorschlag: Angenommen, $(f_n)_{n\geq 1}$ würde auf I gleichmäßig gegen f konvergieren. Dann wäre $(\|f_n\|_{\infty,I})_{n\geq 1}$ eine Nullfolge. Wir setzen $x_n := 1 + \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\|f_n\|_{\infty,I} = \sup_{x\in I} f_n(x) \geq f_n(x_n) = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{1+(1+\frac{1}{n})^{2n}} \longrightarrow \frac{e}{1+e^2} > 0 \quad (n \to \infty),$$

im Widerspruch dazu, dass $(\|f_n\|_{\infty,I})_{n\geq 1}$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 6

(a) Zeigen Sie

$$\sqrt[3]{1+x} < 1 + \frac{x}{3} \quad \text{für alle } x > 0.$$

(b) Es sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es existiere $\alpha := \lim_{x\to\infty} f'(x)$. Zeigen Sie, dass dann auch $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}(f(x+2) - f(x))$ existiert und dass $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}(f(x+2) - f(x)) = \alpha$ gilt.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 + \frac{x}{3} - \sqrt[3]{1+x}.$$

Dann ist f stetig auf $[0, \infty)$ und differenzierbar auf $(0, \infty)$. Für die Ableitung von f gilt

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(1 - (1+x)^{-\frac{2}{3}}\right) > \left(1 - (1+0)^{-\frac{2}{3}}\right) = 0 \quad \text{für } x > 0.$$

Also ist f strikt wachsend auf $[0, \infty)$. Es folgt

$$f(x) > f(0) = 0 \quad \text{für alle } x > 0.$$

Dies bedeutet aber gerade

$$\sqrt[3]{1+x} < 1 + \frac{x}{3} \quad \text{für alle } x > 0.$$

(b) Es sei $\varepsilon > 0$. Da nach Voraussetzung $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \alpha$ ist, existiert ein $K_\varepsilon > 0$ mit

$$|f'(x) - \alpha| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \geq K_\varepsilon. \tag{2}$$

Für jedes $x \geq K$ existiert aber nach dem Mittelwertsatz ein $\xi_x \in (x, x+2)$ mit

$$\frac{f(x+2) - f(x)}{2} = f'(\xi_x). \tag{3}$$

Mit $x \geq K_\varepsilon$ ist auch $\xi_x \geq K_\varepsilon$, sodass wir aus (2) und (3)

$$\left|\frac{1}{2}(f(x+2) - f(x)) - \alpha\right| = |f'(\xi_x) - \alpha| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \geq K_\varepsilon$$

folgern. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, zeigt dies gerade, dass $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}(f(x+2) - f(x))$ existiert und dass $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}(f(x+2) - f(x)) = \alpha$ gilt.

Aufgabe 7

Zeigen Sie

$$\max\{a > 1 \mid \exists x \in \mathbb{R}\colon a^x = x\} = e^{1/e}.$$

Hinweis: Betrachten Sie für $a > 1$ die Funktion $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = a^x - x$ und bestimmen Sie zunächst $\min_{x\in\mathbb{R}} f_a(x)$.

Lösungsvorschlag:

Für $a > 1$ betrachten wir die Funktion

$$f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_a(x) = a^x - x.$$

Als Differenz differenzierbarer Funktion ist f_a differenzierbar und für die Ableitung gilt

$$f_a'(x) = \log(a)a^x - 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ folgern wir daher

$$f_a'(x) = 0 \iff a^x = \frac{1}{\log a} \iff x = x_a := -\frac{\log(\log a)}{\log a}.$$

Genauer gilt

$$f_a'(x) \begin{cases} < 0, & \text{falls } x < x_a, \\ = 0, & \text{falls } x = x_a, \\ > 0, & \text{falls } x > x_a. \end{cases}$$

Somit ist f_a fallend auf $(-\infty, x_a]$ und wachsend auf (x_a, ∞). Daher ist x_a die Stelle des globalen Minimums von f_a und

$$m_a := \min_{x\in\mathbb{R}} f_a(x) = f_a(x_a) = a^{x_a} - x_a = e^{\log a\left(-\frac{\log(\log a)}{\log a}\right)} + \frac{\log(\log a)}{\log a} = \frac{1}{\log a}\left(1 + \log(\log a)\right).$$

Definieren wir nun

$$A := \{a > 1 \mid \exists x \in \mathbb{R}\colon a^x = x\},$$

so ist nach Aufgabenstellung die Identität

$$\max A = e^{1/e}$$

zu zeigen. Nun gilt

$$A = \{a > 1 \mid \exists x \in \mathbb{R}\colon a^x = x\} = \{a > 1 \mid \exists x \in \mathbb{R}\colon f_a(x) = 0\} = \{a > 1 \mid m_a \leq 0\},$$

wobei wir für die letzte Gleichheit ausgenutzt haben, dass f_a stetig ist und $\lim_{x\to\pm\infty} f_a(x) = \infty$ gilt. Wegen $a > 1$ ist $\log(a) > 0$ und daher gilt $m_a \leq 0$ genau dann, wenn

$$1 + \log(\log(a)) \leq 0 \iff \log(\log(a)) \leq -1 \iff a \leq e^{1/e}.$$

Wir folgern

$$A = \{a > 1 \mid m_a \leq 0\} = (1, e^{1/e}]$$

und damit wie gewünscht

$$\max A = e^{1/e}.$$