Analysis 1

Kurzskript Wintersemester 2021/22

Dorothee Frey
Fakultät für Mathematik
Karlsruher Institut für Technologie

31.01.2022[1]

[1]Das Vorlesungsskript wird laufend aktualisiert. Es ist ergänzend zur Vorlesung gedacht und enthält nicht alle Beweise, Beispiele, Skizzen und Erläuterungen der Vorlesung.

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Grundlagen

Das erste Kapitel entält eine knappe Zusammenfassung einiger grundlegender Begriffe der Logik und der Mengenlehre, und führt ein erstes Beweisprinzip, das Prinzip der vollständigen Induktion, ein. Wir setzen dabei ein Grundverständnis von Mengen als bekannt voraus.

1.1. Bezeichnungen

Wir setzen die natürlichen, die ganzen und die rationalen Zahlen als bekannt voraus, außerdem auch deren Rechenregeln zur Addition und Multiplikation. Als Notation wird verwendet:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \qquad \text{(natürliche Zahlen)},\\
&\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\},\\
&\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \qquad \text{(ganze Zahlen)},\\
&\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ \text{Bruch gekürzt}\} \qquad \text{(rationale Zahlen)}.
\end{aligned}$$

Logische Grundbegriffe. Wir verwenden die folgenden logischen Zeichen:

$$\begin{aligned}
\neg &\quad \text{Negation}\\
\wedge &\quad \text{und}\\
\vee &\quad \text{oder}\\
\Rightarrow &\quad \text{Implikation}\\
\Leftrightarrow &\quad \text{Äquivalenz}\\
\forall &\quad \text{für alle}\\
\exists &\quad \text{es existiert}\\
\exists! &\quad \text{es existiert genau ein}
\end{aligned}$$

Eine **Aussage** ist ein Ausdruck, der entweder *wahr* oder *falsch* sein kann. Eine Aussage kann nicht gleichzeitig wahr und falsch sein.

Beispiele: Es bezeichne n eine natürliche Zahl.

(i) $3 > 5$ Aussage (falsch)
(ii) $n > 7 \;\Rightarrow\; n > 2$ Aussage (wahr)
(iii) $n > 2 \;\Rightarrow\; n > 7$ Aussage (falsch)
(iv) $3n$ keine Aussage
(v) $\neg(n > 2) \;\Leftrightarrow\; (n = 1 \vee n = 2)$ Aussage (wahr)

(vi) $\exists!\, n : (n > 2) \wedge (n < 4)$ Aussage (wahr)

Sind A, B Aussagen, so gilt
$$(A \Rightarrow B) \iff (\neg A) \vee B.$$
Die Aussage „es gilt entweder A oder B“ lässt sich durch
$$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$$
ausdrücken.

Für eine ausführliche Diskussion logischer Grundbegriffe sei auf die Vorlesung Lineare Algebra 1 bzw. auf [**1**, Kapitel I.1] verwiesen. Einige wichtige Regeln zum Umgang mit Quantoren $\forall$, $\exists$ und zur Negation von Aussagen werden im Laufe der Vorlesung noch ergänzt.

Mengen. Wir setzen ein elementares Verständnis von Mengen als Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte voraus. Mengen werden duch Angabe ihrer **Elemente** definiert.

Beispiele:

$E = \{1, 2, 3, 7, 8\}$

$F = \{1, 2, 3, 6, 7\}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$G = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ gerade}\}$

$U = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ ungerade}\}$

$\emptyset = \{\,\}$ **leere Menge** (Menge, die keine Elemente enthält)

Begriffe und Notationen. Es seien M, N Mengen.

$x \in M$: x ist **Element** der Menge M. (*Bsp.:* $7 \in E$.)

$x \notin M$: x ist *kein* Element der Menge M. (*Bsp.:* $0 \notin \emptyset,\ 5 \notin G$.)

$M = N$: M und N enthalten dieselben Elemente, d.h. es gilt $x \in M \iff x \in N$. (*Bsp.:* $U = \{2n - 1 \,|\, n \in \mathbb{N}\},\ G = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$.)

$M \neq N$: M und N sind nicht identisch, d.h. es existiert ein $x \in M$ mit $x \notin N$ oder es existiert ein $x \in N$ mit $x \notin M$. (*Bsp.:* $E \neq F$.)

$M \subseteq N$: (auch $M \subset N$). M ist **Teilmenge** von N, d.h. ist $x \in M$, so ist auch $x \in N$. (*Bsp.:* $\{2, 3\} \subseteq \{2, 3, 4\},\ \{2, 3\} \subseteq \{2, 3\}$.)

$M \subsetneqq N$: M ist **echte Teilmenge** von N, d.h. $M \subseteq N$ und es existiert ein $x \in N$ mit $x \notin M$. (*Bsp.:* $\{2, 3\} \subsetneqq \{2, 3, 4\},\ \{2, 4\} \subsetneqq G$.)

$M \supseteq N$: M ist **Obermenge** von N, d.h. $N \subseteq M$.

Um mit Mengen zu arbeiten, benötigen wir die folgenden
Operationen von Mengen. Wiederum seien M, N Mengen.

$M \cup N$: **Vereinigung** von M und N, d.h. die Menge aller x mit $x \in M$ oder $x \in N$.
($Bsp.:$ $E \cup F = \{1,2,3,6,7,8\}$, $G \cup U = \mathbb{N}$, $E \cup \emptyset = E$.)

$M \cap N$: **Durchschnitt** von M und N („M geschnitten mit N„), d.h. die Menge aller x mit $x \in M$ und $x \in N$.
(*Bsp.:* $E \cap F = \{1,2,3,7\}$, $E \cap \emptyset = \emptyset$, $G \cap U = \emptyset$, $E \cap G = \{2,8\}$.)

$M \setminus N$: **Differenzmenge** von M und N, d.h. die Menge aller x mit $x \in M$ und $x \notin N$.
(*Bsp.:* $E \setminus F = \{8\}$, $F \setminus E = \{6\}$, $\mathbb{N} \setminus U = G$, $U \setminus \mathbb{N} = \emptyset$.)

$M \times N$: **Produktmenge** von M und N, d.h. die Menge aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in M$ und $y \in N$.
(*Bsp.:* $\{1,2\} \times \{4,6,7\} = \{(1,4),\ (1,6),\ (1,7),\ (2,4),\ (2,6),\ (2,7)\}$.)
Schreibweise: $M \times M = M^2$.

Für Rechenregeln bezüglich der oben aufgeführten Operationen sei wiederum auf die Lineare Algebra 1 bzw. auf die Literatur verwiesen.

Abbildungen. Es seien X, Y Mengen.
Eine **Abbildung** oder **Funktion** f von X nach Y ist eine Vorschrift, die *jedem* Element von X *genau ein* Element von Y zuordnet. Schreibweise:

$$f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x).$$

Dabei heißt

$f(x) \in Y$	**Funktionswert** von f an der Stelle x,
X	**Definitionsbereich** von f,
Y	**Zielmenge** von f.

1.2. Vollständige Induktion

In diesem Abschnitt stellen wir ein erstes wichtiges Beweisprinzip der Analysis vor, das Prinzip der vollständigen Induktion. Es kann häufig angewandt werden, wenn man Aussagen $A(n)$ zeigen möchte, die von $n \in \mathbb{N}$ (bzw. $n \in \mathbb{N}_0$) abhängen. Da es nicht möglich ist, die unendlich vielen Aussagen $A(1), A(2), A(3), \ldots$ separat zu zeigen, machen wir uns die folgende Eigenschaft der natürlichen Zahlen zunutze.

PRINZIP DER VOLLSTÄNDIGEN INDUKTION I. *Es sei $M \subseteq \mathbb{N}$ eine Menge. Es gelte*
(Induktionsanfang, IA): $1 \in M$.
(Induktionsschluss): Ist $n \in M$, so gilt auch $n + 1 \in M$.
Dann ist $M = \mathbb{N}$.

Beweis. Da nach Voraussetzung schon $M \subseteq \mathbb{N}$, genügt es zu zeigen, dass $\mathbb{N} \subseteq M$. Es sei dazu $k \in \mathbb{N}$ fest gewählt, aber beliebig. Nach (IA) ist $1 \in M$. Ist also $k = 1$, so ist $k \in M$ und die Behauptung ist gezeigt. Sei nun $k > 1$. Nach dem Induktionsschritt ist $1 + 1 = 2 \in M$. Ist $k = 2$, so sind wir auch in diesem Fall fertig. Ist $k > 2$, so wiederholen wir obiges Argument $(k-2)$-mal. □

Wir formulieren das Beweisprinzip so um, dass wir es auf Aussagen $A(n)$ anwenden können.

Prinzip der vollständigen Induktion II. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage. Es gelte*
(Induktionsanfang, IA): $A(1)$ ist wahr.
(Induktionsschluss):
(Induktionsvoraussetzung, IV): Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ sei richtig.
(Induktionsschritt, IS): Aus der Richtigkeit von $A(n)$ folgt, dass $A(n+1)$ wahr ist.

Beweis. Dies folgt direkt aus dem Prinzip der vollständigen Induktion I, angewandt auf die Menge

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ ist wahr}\}.$$

□

Beispiel. Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen lässt sich folgendermaßend berechnen: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.1}$$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $A(n)$ die Aussage, dass die Gleichung (1.1) erfüllt ist.
(IA): $A(1)$ ist wahr, da $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.
(IV): Es sei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt, aber beliebig. Es gelte $A(n)$.
(IS): z.z.: Es gilt $A(n+1)$. Es ist nach (IV)

$$1+2+3+\ldots+(n+1) = (1+2+3+\ldots+n)+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

d.h. $A(n+1)$ ist wahr.

Um die oben verwendete Schreibweise $1+2+3+\ldots+n$ zu präzisieren, führen wir folgende Schreibweise ein.

Summenzeichen: Es sei $m \in \mathbb{Z}$. Für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \geq m$ sei außerdem $a_k \in \mathbb{Q}$ gegeben. Wir setzen

$$\sum_{k=m}^{m} a_k := a_m, \tag{1.2}$$

und definieren dann *rekursiv* die Summe $\sum\limits_{k=m}^{l} a_k$ für jedes $l \in \mathbb{Z},\ l \geq m$: Wir nehmen an, dass für ein $n \in \mathbb{N}_0$ der Ausdruck $\sum\limits_{k=m}^{m+n} a_k \in \mathbb{Q}$ schon definiert ist. Wir setzen dann

$$\sum_{k=m}^{m+n+1} a_k := (\sum_{k=m}^{m+n} a_k) + a_{m+n+1}. \tag{1.3}$$

Mittels vollständiger Induktion lässt sich nun zeigen, dass dadurch die Summe $\sum_{k=m}^{l} a_k$ für jedes $l \in Z$ mit $l \geq m$ definiert ist. Dazu wendet man das Prinzip der vollständigen Induktion I auf die Menge

$$M := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid \sum_{k=m}^{m+n} a_k \text{ ist definiert}\}$$

an. Dann gilt nach Definition $M \subseteq \mathbb{N}_0$, und nach (1.2) ist $0 \in M$. Ist $n \in M$, so ist nach (1.3) auch $n + 1 \in M$.

Bemerkung. Wir haben hier das Induktionsprinzip für Teilmengen $M \subseteq \mathbb{N}_0$ statt $M \subseteq \mathbb{N}$ verwendet. Hierbei ist als Induktionsanfang zu zeigen, dass $0 \in M$. Gezeigt wird dann, dass $M = \mathbb{N}_0$ ist.

Entsprechend definieren wir rekursiv das
Produkt: Es sei $m \in \mathbb{Z}$. Für alle $k \in \mathbb{Z},\ k \geq m$, sei $a_k \in \mathbb{Q}$ gegeben. Wir setzen

$$\prod_{k=m}^{m} a_k := a_m,$$

und definieren rekursiv für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\prod_{k=m}^{m+n+1} a_k := (\prod_{k=m}^{m+n} a_k) \cdot a_{m+n+1}.$$

Auch hier zeigt man wieder mittels vollständiger Induktion, dass hiermit das Produkt $\prod_{k=m}^{l} a_k$ für alle $l \in \mathbb{Z}$ mit $l \geq m$ definiert ist.

Wir treffen die folgenden Konventionen:

$$\sum_{k=m}^{m-1} a_k := 0 \qquad \text{(leere Summe)}, \qquad\qquad \prod_{k=m}^{m-1} a_k := 1 \qquad \text{(leeres Produkt)}.$$

Für $a \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$a^n := \prod_{k=1}^{n} a \qquad (\textbf{n-te Potenz} \text{ von } a), \qquad\qquad a^0 := 1.$$

D.h. es ist $a^0 = 1,\ a^1 = a,\ a^2 = a \cdot a,\ a^3 = a \cdot a \cdot a$ usw.

Fakultät: Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n, \qquad\qquad 0! = 1.$$

Bsp.: Es ist $1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6,\ 4! = 24,\ 5! = 120, \ldots$.

Binomialkoeffizienten: Für $n, k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$ setzen wir

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Es gilt

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{1} = n, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

und

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}. \tag{1.4}$$

Satz 1.1 (Binomischer Lehrsatz). *Es seien $x, y \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k. \tag{1.5}$$

Beweis. Beweis durch vollständige Induktion: Für $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichne $A(n)$ die Aussage (1.5). (IA): $A(0)$ ist wahr, da $(x+y)^0 = 1$ und $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^{-k} y^k = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1.$
(IV): Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Es gelte $A(n)$.
(IS): Nach (IV) ist

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&= (x+y)(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k \\
&= \binom{n}{0} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} (\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}) x^{n+1-k} y^k + \binom{n}{n} x^0 y^{n+1}.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir eine Indexverschiebung (siehe Bemerkung unten) in der zweiten Summe verwendet. Verwendet man nun (1.4), so zeigt dies, dass $A(n+1)$ wahr ist. □

Bemerkung. Man überzeugt sich leicht davon, dass man bei Summen die *Indexverschiebung*

$$\sum_{k=0}^{n} a_{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k$$

durchführen kann.

Satz 1.2 (Geometrische Summe). *Es sei $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 1$, und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

KAPITEL 2

Reelle und komplexe Zahlen

2.1. Körper-Axiome und Anordnungs-Axiome

Es sei X eine nichtleere Menge.

Definition 2.1. Eine Teilmenge $R \subseteq X \times X$ heißt *Relation* auf X. Für $(x,y) \in R$ schreiben wir $x \sim_R y$. Eine Relation R auf X heißt *Ordnungsrelation* (oder Ordnung) auf X, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt:

(R) $x \sim_R x$; (Reflexivität)

(T) Aus $x \sim_R y$ und $y \sim_R z$ folgt $x \sim_R z$; (Transitivität)

(AS) Aus $x \sim_R y$ und $y \sim_R x$ folgt $x = y$. (Antisymmetrie)

Ist R eine Ordnung auf X, so heißt das Paar (X, R) *geordnete Menge*. Gilt zusätzlich für alle $x, y \in X$

$$x \sim_R y \quad \text{oder} \quad y \sim_R x,$$

so heißt R *totale Ordnung* auf X.

Beispiel:

(1) $(\mathbb{Z}, \leq)$ und $(\mathbb{Q}, \leq)$ sind total geordnete Mengen.

(2) Sei $\mathcal{M} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}\}$. Dann ist $(\mathcal{M}, \subseteq)$ eine geordnete Menge ($\subseteq$ bezeichnet die übliche Teilmengenrelation). $\mathcal{M}$ ist jedoch nicht total geordnet, da z.B. $\{0,1\} \nsubseteq \{0,2\}$ und $\{0,2\} \nsubseteq \{0,1\}$.

Notation: Ist R eine Ordnung, so schreibt man üblicherweise „$\leq$“(kleiner gleich) anstelle von R oder $\sim_R$. Wir verwenden außerdem die Notationen

$$\begin{aligned} x < y &\quad \text{falls } x \leq y \text{ und } x \neq y, \\ x \geq y &\quad \text{falls } y \leq x, \\ x > y &\quad \text{falls } y < x. \end{aligned}$$

Eine Abbildung $* : X \times X \to X$, $(x,y) \mapsto x * y$ heißt *Verknüpfung* auf X.

Beispiel: Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, &\quad (x,y) \mapsto x + y, \\ \cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, &\quad (x,y) \mapsto x \cdot y. \end{aligned}$$

Definition 2.2 (Körper). Es sei K eine Menge mit Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ sowie Elementen $0, 1$ mit $0 \neq 1$. Dann heißt $(K, 0, 1, +, \cdot)$ *Körper*, falls für alle $x, y, z \in K$ gilt:

(A1) $(x + y) + z = x + (y + z)$, (Assoziativgesetz der Addition)

(A2) $x + 0 = x$, (neutrales Element der Addition)

(A3) $\forall x \in K \ \exists u \in K$ mit $x + u = 0$, (additiv inverses Element)

(A4) $x + y = y + x$, (Kommutativgesetz der Addition)

(M1) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, (Assoziativgesetz der Multiplikation)

(M2) $x \cdot 1 = x$, (neutrales Element der Multiplikation)

(M3) $\forall x \in K \setminus \{0\} \ \exists v \in K$ mit $x \cdot v = 1$, (multiplikativ inverses Element)

(M4) $x \cdot y = y \cdot x$, (Kommutativgesetz der Multiplikation)

(DG) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$. (Distributivgesetz)

Notation: Wir schreiben K für $(K, 0, 1, +, \cdot)$, und xy statt $x \cdot y$. Klammern werden oft weggelassen (unter Berücksichtigung von „$\cdot$ vor $+$“), z.B. schreibt man $x+zy$ für $x+(y\cdot z)$. Wir schreiben außerdem $-x := u$ für das additiv inverse Element von x in (A3), $\frac{1}{x} := x^{-1} := v$ für das multiplikativ inverse Element von $x \neq 0$ in (M3), sowie $x-y$ für $x+(-y)$ und $\frac{x}{y}$ für $x \cdot \frac{1}{y}$ (mit $y \neq 0$).

Bemerkung.
(1) Die neutralen Elemente sind eindeutig bestimmt: Ist auch $0'$ neutrales Element der Addition, so gilt $0' + 0 = 0'$ nach Anwendung von (A3) für 0, und $0' + 0 = 0 + 0' = 0$ nach Anwendung von (A4) und (A3) für $0'$, also $0 = 0'$. Ähnlich zeigt man, dass 1 eindeutig bestimmt ist.
(2) Die additiv und multiplikativ inversen Elemente sind eindeutig bestimmt.
(3) Es gilt $-0 = 0$.
(4) Es gilt $-(-x) = x$ und $-x = (-1)x$ für $x \in K$.

Beispiel.
(1) $(\mathbb{Q}, 0, 1, +, \cdot)$ ist ein Körper.
(2) $\mathbb{Z}$ ist kein Körper: z.B. existiert zu $2 \in \mathbb{Z}$ kein multiplikativ inverses Element in $\mathbb{Z}$, da $2 \cdot v = 1$ in $\mathbb{Z}$ nicht lösbar ist.
(3) Definiert man auf der zweielementigen Menge $\mathbb{F}_2 := \{\underline{0}, \underline{1}\}$ die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ durch die Verknüpfungstafeln

$$\begin{array}{c|cc} + & \underline{0} & \underline{1} \\ \hline \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} \\ \underline{1} & \underline{1} & \underline{0} \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & \underline{0} & \underline{1} \\ \hline \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} \end{array}$$

so kann man zeigen, dass $(\mathbb{F}_2, \underline{0}, \underline{1}, +, \cdot)$ ein Körper ist.

Bemerkung. Aus den Körperaxiomen lassen sich die üblichen Regeln zum Bruchrechnen herleiten, z.B. gilt für $a, c \in K$ und $b, d \in K \setminus \{0\}$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \text{und} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc},\ c \neq 0.$$

Wir wollen im folgenden Körper betrachten, die zusätzlich zur algebraischen Struktur des Körpers auch eine Ordnungsstruktur besitzen. Wir fordern, dass die Ordnungsstruktur zur algebraischen Struktur verträglich ist.

Definition 2.3 (geordneter Körper). Es sei $(K, 0, 1, +, \cdot)$ ein Körper, und $\leq$ sei eine Relation auf K. $(K, \leq)$ heißt *geordneter Körper*, falls für alle $x, y, z \in K$ gilt:

(O1) $\leq$ ist totale Ordnung auf K.

(O2) Aus $x < y$ folgt $x + z < y + z$.

(O3) Aus $x > 0$ und $y > 0$ folgt $x \cdot y > 0$.

Notation: Ist $x > 0$, so heißt x *positiv*, ist $x < 0$, so heißt x *negativ*. Ist $x \geq 0$, so heißt x *nichtnegativ*, und ist $x \leq 0$, so heißt x *nichtpositiv*. Wir setzen

$$K_+ := \{x \in K \,|\, x > 0\}, \qquad K_- := \{x \in K \,|\, x < 0\}.$$

Bemerkung (Trichotomiegesetz). Es sei $(K, \leq)$ ein geordneter Körper, und $x \in K$. Dann gilt genau eine der drei Beziehungen

$$x > 0, \qquad x = 0, \qquad x < 0.$$

Beispiel. (1) $(\mathbb{Q}, \leq)$ ist ein geordneter Körper.

(2) Der Körper $\mathbb{F}_2$ kann nicht angeordnet werden: Angenommen, $\leq$ sei eine Totalordnung auf $\mathbb{F}_2$. Wäre dann $\underline{0} < \underline{1}$, so würde aus (O2) folgen, dass $\underline{0} + \underline{1} < \underline{1} + \underline{1}$, also $\underline{1} < \underline{0}$ im Widerspruch zur Antisymmetrie der Totalordnung. Umgekehrt führt auch die Annahme $\underline{1} < \underline{0}$ zum Widerspruch.

Satz 2.4. *Es sei $(K, \leq)$ ein geordneter Körper. Dann gilt für alle $x, y, a, b \in K$*

(i) $y > x \;\Leftrightarrow\; y - x > 0$.

(ii) Aus $x > y$ und $a > b$ folgt $x + a > y + b$.

(iii) Aus $x > y$ und $a > 0$ folgt $ax > ay$.

(iv) Aus $x > 0$ folgt $-x < 0$.

(v) Aus $x > 0$ und $y < 0$ folgt $xy < 0$.

(vi) Aus $x > y$ und $a < 0$ folgt $ax < ay$.

(vii) Sei $x \neq 0$. Dann ist $x^2 > 0$. Insbesondere ist $1 > 0$.

(viii) Aus $x > 0$ folgt $x^{-1} > 0$.

(ix) Aus $x > y > 0$ folgt $0 < x^{-1} < y^{-1}$ und $\frac{x}{y} > 1$.

Definition 2.5. Es sei $(K, \leq)$ ein geordneter Körper. Der *Betrag* $|\,.\,| : K \to K$ ist definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

für jedes $x \in K$.

Der Betrag wird verwendet, um den Abstand zweier Elemente im geordneten Körper anzugeben. In $\mathbb{Q}$ haben zwei Elemente a, b den Abstand $|a-b|$, z.B. ist der Abstand von -2 zu 17 gegeben durch $|-2-17| = 19$.

Der Betrag genügt den folgenden Eigenschaften

Satz 2.6. *Es sei $(K, \leq)$ ein geordneter Körper. Für alle $x, y, a \in K$ und $r \in K$ mit $r > 0$ gilt*

(i) $|x| = |-x|$, *und* $x \leq |x|$.
(ii) $|x| \geq 0$ *und* ($|x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$).
(iii) $|xy| = |x||y|$.
(iv) $|x-a| < r \;\Leftrightarrow\; a - r < x < a + r$.
(v) $|x+y| \leq |x| + |y|$ *(Dreiecksungleichung).*

Beweis. (v) Fall 1: Sei $x + y \geq 0$. Dann folgt aus (i) und Satz 2.4 (ii), dass $|x+y| = x + y \leq |x| + y \leq |x| + |y|$.
Fall 2: Sei $x + y < 0$. Dann ist nach Satz 2.4 (iv) $-(x+y) > 0$. Wendet man Fall 1 auf $-(x+y) = (-x) + (-y)$ an, so erhält man unter Verwendung von (i)

$$|x+y| = |-(x+y)| = |(-x) + (-y)| \leq |-x| + |-y| = |x| + |y|.$$

□

Korollar 2.7 (umgekehrte Dreiecksungleichung). *Es sei $(K, \leq)$ ein geordneter Körper. Dann gilt für alle $x, y \in K$*

$$|x-y| \geq ||x| - |y||.$$

Beweis. Übung. □

Bemerkung. In einem geordneten Körper setzen wir $2 := 1 + 1$. Dann gilt nach Satz 2.4 $2 = 1 + 1 > 1 > 0$.

Lemma 2.8 (Arithmetisches Mittel). *Sei $(K, \leq)$ ein geordneter Körper. Für $a, b \in K$ mit $a < b$ gilt*

$$a < \frac{1}{2}(a+b) < b.$$

Beweis. Nach Satz 2.4 ist $2 > 0$ und $\frac{1}{2} > 0$. Somit ist wegen 2.4 (iii) $a < \frac{1}{2}(a+b)$ äquivalent zu $2a < a + b$, was wiederum äquivalent zu $a < b$ ist. Letzteres gilt nach Voraussetzung. Die Behauptung $\frac{1}{2}(a+b) < b$ folgt entsprechend. □

2.2. Suprema und Infima

Definition 2.9. Es seien $(K, \leq)$ ein geordneter Körper und A eine nichtleere Teilmenge von K. Dann heißt A
nach oben beschränkt, falls ein $s \in K$ existiert mit

(OS) $$a \leq s \qquad \text{für alle } a \in A,$$

nach unten beschränkt, falls ein $s \in K$ existiert mit

(US) $$s \leq a \qquad \text{für alle } a \in A,$$

beschränkt, falls A nach oben und nach unten beschränkt ist. Ist A nicht beschränkt, so heißt A *unbeschränkt.*
Jedes Element $s \in K$ mit (OS) (bzw. (US)) heißt *obere* (bzw. *untere*) *Schranke* für A.
Ein Element $m \in K$ heißt *Maximum* (bzw. *Minimum*) von A, falls m obere (bzw. untere) Schranke von A ist mit $m \in A$.
Notation: $m = \max(A)$ (bzw. $m = \min(A)$).

BEISPIEL. (1) $A = \{1, -\frac{3}{4}, 5, 9\} \subseteq \mathbb{Q}$ ist eine beschränkte Menge mit $\min(A) = -\frac{3}{4}$ und $\max(A) = 9$. Z.B. ist -73 eine untere Schranke für A.
(2) $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1 < x \leq \frac{9}{2}\}$. Dann ist $\max(B) = \frac{9}{2}$, und 1 ist untere Schranke für B. Jedoch besitzt B kein Minimum (noch zu beweisen).
(3) $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid 7x - 5 < 1\}$ ist unbeschränkt.

BEMERKUNG. Eine Menge $A \subseteq K$, $A \neq \emptyset$, besitzt höchstens ein Minimum und höchstens ein Maximum.

BEWEIS. Angenommen, es existieren zwei Maxima $m_1, m_2 \in A$. Dann gilt $a \leq m_1$ für alle $a \in A$, also insbesondere $m_2 \leq m_1$. Umgekehrt gilt aber auch $a \leq m_2$ für alle $a \in A$ und somit $m_1 \leq m_2$. Aus $m_1 \leq m_2$ und $m_2 \leq m_1$ folgt wegen der Antisymmetrie der Ordnung $m_1 = m_2$. Entsprechend lässt sich die Aussage für das Minimum zeigen. □

Notation: Für $x, y, z \in K$ schreiben wir kurz $x \leq y \leq z$, falls $x \leq y$ und $y \leq z$ gilt.

DEFINITION 2.10 (Intervalle). Es sei $(K, \leq)$ ein geordneter Körper. Ein *Intervall* ist eine Teilmenge J von K mit der Eigenschaft: Sind $x, y \in J$ mit $x < y$, so gilt auch $z \in J$ für alle $z \in K$ mit $x < z < y$.
Für $a, b \in K$ mit $a < b$ definieren wir die beschränkten Intervalle

$$\begin{aligned} [a,b] &:= \{x \in K \mid a \leq x \leq b\}, \\ [a,a] &:= \{a\}, \\ (a,b) &:= \{x \in K \mid a < x < b\}, \\ [a,b) &:= \{x \in K \mid a \leq x < b\}, \\ (a,b] &:= \{x \in K \mid a < x \leq b\}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

und die unbeschränkten Intervalle

$$\begin{aligned} (-\infty,b] &:= \{x \in K \mid x \leq b\}, \\ (-\infty,b) &:= \{x \in K \mid x < b\}, \\ [a,\infty) &:= \{x \in K \mid x \geq a\}, \\ (a,\infty) &:= \{x \in K \mid x > a\}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Die Intervalle $[a,b]$, $[a,a]$, $(-\infty,b]$, $[a,\infty)$ heißen *abgeschlossen*, die Intervalle (a,b), $(-\infty,b)$, (a,∞) heißen *offen.*

BEMERKUNG. (i) Die Intervalle in (2.1) sind alle beschränkt, da jeweils a eine untere Schranke und b (bzw. a in $[a,a]$) eine obere Schranke für das Intervall ist.

(ii) Die Intervalle in (2.2) sind unbeschränkt.
Beweis für $A := [a, \infty)$ (die anderen Fälle lassen sich entsprechend beweisen): Wir nehmen an, dass eine obere Schranke für A existiert, d.h. es existiere ein $s \in K$ mit $x \leq s$ für alle $x \in A$. Da nach Satz 2.4 und (O2) $0 < 1$ und $s < s+1$ folgt, gilt für $x \in A$

$$a \leq x \leq s < s+1,$$

also insbesondere $s+1 \in A$. Da s obere Schranke für A ist, folgt nun $s+1 \leq s$, im Widerspruch zu $s < s+1$. Somit kann keine obere Schranke für A existieren, d.h. A ist unbeschränkt.

(iii) Es gilt $\min([a,b]) = a$ und $\max([a,b]) = b$.

(iv) Das Intervall (a,b) besitzt weder ein Minimum noch ein Maximum.
Beweis: Wir nehmen an, $B := (a,b)$ besäße ein Minimum, d.h. es existiere ein $m \in B$ mit $m \leq x$ für alle $x \in B$. Wegen $m \in B$ gilt $a < m < b$. Nach Lemma 2.8 folgt für das arithmetische Mittel $c = \frac{1}{2}(a+m)$

$$a < \frac{1}{2}(a+m) < m.$$

D.h. es ist $a < c < m < b$, und somit $c \in B$. Da m Minimum von B ist, muss aber $m \leq c$ gelten, im Widerspruch zu $c < m$. Also ist die Annahme falsch. Entsprechend lässt sich auch zeigen, dass (a,b) kein Maximum besitzt.

Definition 2.11 (Supremum und Infimum). Es sei $(K, \leq)$ ein geordneter Körper und A eine nichtleere Teilmenge von K.
Es sei A nach oben beschränkt. Existiert eine kleinste obere Schranke für A, so heißt dieses Element *Supremum* von A.
Es sei A nach unten beschränkt. Existiert eine größte untere Schranke für A, so heißt dieses Element *Infimum* von A.

Notation: Wir schreiben $\sup(A)$ bzw. $\inf(A)$, falls das Supremum bzw. Infimum von A existiert.

Bemerkung. Falls das Supremum bzw. Infimum von A existiert, so ist

$$\sup(A) = \min(\{s \in K \mid s \text{ obere Schranke für } A\}),$$
$$\inf(A) = \max(\{s \in K \mid s \text{ untere Schranke für } A\}).$$

Bemerkung. (i) Ist A nach oben (bzw. unten) beschränkt, so muss $\sup(A)$ (bzw. $\inf(A)$) nicht existieren. (Beispiel siehe später).

(ii) Existiert $\sup(A)$ (bzw. $\inf(A)$), so gilt im Allgemeinen $\sup(A) \notin A$ (bzw. $\inf(A) \notin A$).
Beispiel: Für $a, b \in K$ mit $a < b$ gilt $\inf((a,b)) = a$ und $\sup((a,b)) = b$, aber $a \notin (a,b)$ und $b \notin (a,b)$.
Beweis zu $\inf((a,b)) = a$: Direkt klar ist, dass a untere Schranke für (a,b) ist. Angenommen, es existiert eine untere Schranke s für (a,b) mit $s > a$ (und $s < b$). Dann gilt aber $a < \frac{1}{2}(a+s) < s$, also muss $c := \frac{1}{2}(a+s) \in (a,b)$ gelten mit $c < s$. Widerspruch zu s untere Schranke.

(iii) Existiert $\sup(A)$und gilt $\sup(A) \in A$, so ist $\sup(A) = \max(A)$.
Existiert $\inf(A)$ und gilt $\inf(A) \in A$, so ist $\inf(A) = \min(A)$.

(iv) Existiert $\max(A)$, so existiert auch $\sup(A)$, und es ist $\sup(A) = \max(A)$.
Existiert $\min(A)$, so existiert auch $\inf(A)$, und es ist $\inf(A) = \min(A)$.

2.3. Die reellen Zahlen

Wir betrachten zunächst eine nichtleere, nach oben beschränkte Menge, welche kein Supremum besitzt.

Beispiel. a) Die Gleichung $x^2 = 2$ ist in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar, d.h. es existiert kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.

Beweis. Angenommen, es existiere ein solches $x \in \mathbb{Q}$. Ohne Einschränkung sei $x > 0$ (sonst wähle $-x$, welches dann ebenfalls die Gleichung löst). Wir schreiben $x = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, wobei p, q als teilerfremd gewählt sind, d.h. der Bruch ist gekürzt. Dann gilt $x^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$ bzw.

$$p^2 = 2q^2.$$

Somit muss p^2 gerade sein, und damit auch p. Also können wir $p = 2r$ für ein $r \in \mathbb{N}$ schreiben. Hieraus folgt $(2r)^2 = 2q^2$ bzw. $2r^2 = q^2$. D.h. auch q ist gerade, im Widerspruch zu der Annahme, dass p und q teilerfremd sind. $\square$

b) Wir setzen

$$A := \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x > 0 \text{ und } x^2 \leq 2\}.$$

Dann ist A nach oben beschränkt, aber A besitzt kein Supremum in $\mathbb{Q}$.

Beweis. A ist nach oben beschränkt, da z.B. 2 obere Schranke für A ist: Ist $a \in A$, so ist $a^2 \leq 2 < 4$, woraus $a < 2$ folgt. (Wäre $a \geq 2$, so wäre nach Satz 2.4 $a^2 \geq 4$.)
A besitzt kein Supremum: Angenommen, es existiere ein $s \in \mathbb{Q}$ mit $s = \sup(A)$. Dann gilt $a \leq s$ für alle $a \in A$, folglich $a^2 \leq s^2$ und $a^2 \leq 2$ für alle $a \in A$.
Behauptung 1: Es muss $s^2 = 2$ gelten.
Beweis der Behauptung 1: Wir wollen einen indirekten Beweis führen. Dazu suchen wir einen Punkt c so, dass c^2 zwischen s^2 und 2 liegt. Wir setzen

$$c := \frac{2s+2}{s+2}.$$

Dann ist

$$c = s + \frac{2-s^2}{s+2}, \tag{2.3}$$

und

$$c^2 - 2 = \frac{2(s^2-2)}{(s+2)^2}. \tag{2.4}$$

Fall 1: Angenommen, es ist $s^2 < 2$. Dann ist nach (2.3) und (2.3) $c > s$ und $c^2 < 2$. Somit ist $c \in A$ und $c > s$ im Widerspruch zu s obere Schranke für A.
Fall 2: Angenommen, es ist $s^2 > 2$. Aus (2.3) und (2.4) folgen nun $c < s$ und $c^2 > 2$. Dann ist also $a^2 \leq 2 < c^2$ für alle $a \in A$, und wir schließen daraus, dass c obere

Schranke für A ist. Dies steht im Widerspruch zu $c < s$, da s nach Definition die kleinste obere Schranke für A ist.
Somit muss $s^2 = 2$ gelten. Aus Beispiel a) wissen wir aber, dass ein $s \in \mathbb{Q}$ mit $s^2 = 1$ nicht existiert, d.h. A besitzt kein Supremum in $\mathbb{Q}$. $\square$

Wir wollen nun den geordneten Körper $\mathbb{Q}$ so erweitern, dass jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge immer ein Supremum besitzt.

Definition 2.12. Es sei $(K, \leq)$ ein geordneter Körper. K heißt *ordnungsvollständig*, falls gilt:

(V) Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmengen von K besitzt ein Supremum.

Bemerkung. Äquivalent zu (V) ist die Aussage: Jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von K besitzt ein Infimum.

Beispiel. $\mathbb{Q}$ ist nicht ordnungsvollständig (siehe Beispiel oben).

Definition und Satz 2.13 (Reelle Zahlen). *Wir bezeichnen mit dem* Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ *einen ordnungsvollständigen Erweiterungskörper von* $\mathbb{Q}$*. Dieser ist eindeutig*[1] *bestimmt und induziert auf* $\mathbb{Q}$ *die ursprüngliche Ordnung.*

Beweis. Siehe [**1**, Theorem I.10.4]. $\square$

Dies bedeutet, dass $\mathbb{R}$ so definiert ist, dass $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $(\mathbb{Q}, 0, 1, +, \cdot)$ ein Teilkörper von $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot)$ ist, und $(\mathbb{R}, \leq)$ die Axiome (A1-4), (M1-4), (DG), (O1-3) und (V) erfüllt.

Bemerkung. Es gilt $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

Satz 2.14. *Es sei* $A \subseteq \mathbb{R}$ *nichtleer und* $x \in \mathbb{R}$*.*

(i) Sei A *nach oben beschränkt. Dann gilt*

$$x < \sup(A) \quad \Leftrightarrow \quad \exists a \in A \text{ mit } x < a$$

(ii) Sei A *nach unten beschränkt. Dann gilt*

$$x > \inf(A) \quad \Leftrightarrow \quad \exists a \in A \text{ mit } x > a.$$

Beweis. (i) „$\Rightarrow$“: Sei $x < \sup(A)$. Angenommen, es ist $x \geq a$ für alle $a \in A$. Dann wäre x obere Schranke für A mit $x < \sup(A)$. Widerspruch zur Definition des Supremums.
„$\Leftarrow$“: Se $a \in A$ mit $x < a$. Nach Definition der oberen Schranke gilt $a \leq \sup(A)$, also auch $x < a \leq \sup(A)$.
(ii) analog zu (i). $\square$

Satz 2.15 (Satz von Archimedes). $\mathbb{N}$ *ist in* $\mathbb{R}$ *nicht nach oben beschränkt, d.h. für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *existiert ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n > x$*.*

Beweis. Ist $x < 1$, so wähle $n = 1$. Sei nun $x \geq 1$. Wir betrachten $A := \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \leq x\}$. Dann ist $A \neq \emptyset$, da $1 \in A$. Außerdem ist x obere Schranke für A. Nach Satz 2.13 existiert $s := \sup(A) \in \mathbb{R}$. Wir wenden nun Satz 2.14 an auf $s - \frac{1}{2} < s$. Dies liefert die Existenz von einem $a \in A$ mit $s - \frac{1}{2} < a$. Setzt man nun $n := a + 1 \in \mathbb{N}$, so folgt $n = a + 1 > s + \frac{1}{2} > s$. Also ist $n \notin A$, damit gilt nach Definition von A, dass $n > x$ ist. $\square$

[1] bis auf Isomorphie

Wir verwenden den Satz von Archimedes, um zu zeigen, dass rationale Zahlen „dicht“ in den reellen Zahlen liegen, d.h. dass sich eine reelle Zahl beliebig gut durch eine rationale Zahl approximieren lässt.

SATZ 2.16. *Zu $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ existiert ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$.*

BEWEIS. Nach Voraussetzung ist $b - a > 0$. Aus Satz 2.15 erhalten wir zu $x = \frac{1}{b-a}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{b-a}$, also $nb > na + 1$. Nach Satz 2.15 existiert außerdem ein $m_1 \in \mathbb{N}$ mit $m_1 > na$ und ein $m_2 \in \mathbb{N}$ mit $m_2 > -na$. D.h. es gilt $-m_2 < na < m_1$. Folglich existiert ein $m \in \mathbb{Z}$ mit

$$m - 1 \leq na < m.$$

Wir setzen $r := \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $a < \frac{m}{n} = r$, und $nb > na + 1 \geq m$, also $b > \frac{m}{n}$. □

Wir notieren noch zwei direkte Folgerungen aus dem Satz von Archimedes.

KOROLLAR 2.17. *(i) Es sei $a \in \mathbb{R}$. Gilt $0 \leq a \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so muss $a = 0$ sein.*
(ii) Zu jedem $a \in \mathbb{R}_+$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n} < a$.

BEWEIS. (i) Wäre $0 < a \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so wäre $n \leq \frac{1}{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $\mathbb{N}$ wäre nach oben beschränkt im Widerspruch zu Satz 2.15.
(ii) folgt direkt aus Satz 2.15. □

2.4. Potenzen

Wir wollen Quadratwurzeln, n-te Wurzeln und Potenzen mit rationalem Exponenten definieren. Will man z.B. für gegebenes $a \in \mathbb{R}_+$ die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ als Lösung der Gleichung $x^2 = a$ definieren, so muss sichergestellt sein, dass die Lösung immer existiert, und dass $\sqrt{a}$ dadurch eindeutig definiert ist. Wir beginnen zunächst mit ganzzahligen Potenzen reeller Zahlen:

n**-te Potenz** von a: Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$a^0 := 1, \qquad a^1 = a, \qquad a^n := \prod_{k=1}^{n} a, \qquad \text{und}$$
$$a^{-n} := (a^n)^{-1} \quad \text{falls } a \neq 0.$$

LEMMA 2.18. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$a^n b^n = (ab)^n, \qquad a^n a^m = a^{n+m}, \qquad (a^n)^m = a^{nm}, \qquad \textit{und}$$
$$(a^{-n})^{-1} = a^n \qquad \textit{falls } a \neq 0.$$

BEWEIS. Übung (mit vollständiger Induktion). □

Im folgenden zeigen wir, dass für gegebenes $a \in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $x^n = a$ eindeutig lösbar ist, falls wir nur Lösungen $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ zulassen.

SATZ 2.19. *Zu jedem $a \in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}$ existiert genau ein $x \in \mathbb{R}_+$ mit $x^n = a$.*

Zum Beweis des Satzes werden wir die folgende binomische Formel benötigen: Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$y^n - x^n = (y - x) \sum_{j=0}^{n-1} y^j x^{n-j-1}. \tag{2.5}$$

Außerdem werden wir wiederholt folgende Beobachtung verwenden:

Bemerkung. Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b > a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, so folgt $b^n > a^n > 0$.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung mittels vollständiger Induktion: Für $n = 1$ ist die Aussage klar. Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gezeigt ist. Dann folgt aus Satz 2.4, dass $b^{n+1} = b \cdot b^n > a \cdot b^n > a \cdot a^n = a^{n+1}$ ist. □

Beweis von Satz 2.19. *Eindeutigkeit:* Es seien $x, y \in \mathbb{R}_+$ mit ohne Einschränkung $0 < x < y$ und $n \geq 2$. Dann ist $y - x > 0$ und nach (2.5) auch $y^n - x^n > 0$, also insbesondere $y^n \neq x^n$. Somit kann höchstens ein $x \in \mathbb{R}_+$ mit $x^n = a$ existieren.
Existenz: Es seien ohne Einschränkung $n \geq 2$ und $a \neq 1$ gewählt. Wir setzen

$$A := \{x \in \mathbb{R}_+ \,|\, x^n \leq a\}.$$

Wir wollen zeigen, dass $\sup(A)$ existiert und die Gleichung $x^n = a$ löst. Wir unterscheiden die Fälle $a > 1$ und $a < 1$.
Fall I: Es sei $a > 1$. Dann ist $1 \in A$, also $A \neq \emptyset$. Wählen wir ein $x > a$, so folgt wegen $a > 1$ auch $x^n > a^n > a > 0$, d.h. in diesem Fall ist $x \notin A$. Umgekehrt bedeutet dies, dass $x \leq a$ gilt für alle $a \in A$, also ist A nach oben beschränkt. Aus der Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ folgt nun die Existenz von $s := \sup(A)$ in $\mathbb{R}$. Insbesondere ist $s \geq 1$.
Behauptung: $s^n = a$.
Wir zeigen die Behauptung durch einen indirekten Beweis.
Fall 1: Wir nehmen an, dass $s^n < a$ ist, also $a - s^n > 0$. Wir suchen ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ so, dass $s^n < (s + \varepsilon)^n < a$ gilt. Mit Hilfe der binomischen Formel schreiben wir

$$(s + \varepsilon)^n = s^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} s^k \varepsilon^{n-k}.$$

Um die Ungleichung $(s + \varepsilon)^n < a$ einzusehen, gehen wir zunächst davon aus, dass $\varepsilon \leq 1$ ist. Dann gilt $\varepsilon^{n-k} \leq \varepsilon$ für alle $k \in \{0, \ldots, n - 1\}$. Setzt man $b := \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} s^k$, so folgt

$$(s + \varepsilon)^n \leq s^n + \varepsilon \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} s^k \right) = s^n + \varepsilon b.$$

Nach Korollar 2.17 existiert ein $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$ mit $0 < \varepsilon_1 < \frac{a - s^n}{b}$ (da nach Voraussetzung $a - s^n > 0$). Setzt man $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, 1)$, so folgt $(s + \varepsilon)^n \leq s^n + \varepsilon b < a$. Also ist $s + \varepsilon \in A$, im Widerspruch zu $s < s + \varepsilon$ und s obere Schranke für A.
Fall 2: Wir nehmen an, dass $s^n > a$ ist. Dann ist $s^n - a > 0$. Wir suchen nun ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$

mit $\varepsilon > 0$ und $a < (s-\varepsilon)^n < s^n$. Nehmen wir wieder an, dass $\varepsilon \leq 1$ ist, so gilt

$$\begin{aligned}(s-\varepsilon)^n &= s^n + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} s^k \varepsilon^{n-k} \\ &\geq s^n - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} s^k \varepsilon^{n-k} \\ &\geq s^n - \varepsilon b,\end{aligned}$$

mit b wie in Fall 1. Nach Korollar 2.17 existiert wieder ein $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$ mit $0 < \varepsilon_1 < \frac{s^n-a}{b}$ (da hier $s^n - a > 0$ ist). Dann erfüllt $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, 1)$ die Ungleichung $(s-\varepsilon)^n \geq s^n - \varepsilon b > a$. Dies bedeutet, dass $s - \varepsilon \notin A$, außerdem schließen wir daraus, dass $s-\varepsilon$ obere Schranke für A ist mit $s - \varepsilon < s$. Widerspruch zur Definition des Supremums.
Aus den Fällen 1 und 2 folgt, dass $s^n = a$ gelten muss.
Fall II: Es sei nun $0 < a < 1$. Wir wenden Fall I auf $b = \frac{1}{a} > 1$ an und erhalten ein $y \in \mathbb{R}_+$ mit $y^n = b$. Wählt man $x = \frac{1}{y}$, so gilt $x^n = a$. $\square$

Der obige Satz ermöglicht es nun, die n-te Wurzel einer positiven reellen Zahl zu definieren.

DEFINITION 2.20. Es sei $a \in \mathbb{R}_+$.

(i) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren die *n-te Wurzel* von a als das nach Satz 2.19 eindeutig bestimmte $x \in \mathbb{R}_+$ mit $x^n = a$.
Notation: $\sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}} := x$, und $\sqrt{a} := \sqrt[2]{a}$.

(ii) Es sei $p = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, mit $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Wir definieren die *p-te Potenz* von a durch $a^p := (\sqrt[n]{a})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m$.
Für $p > 0$ setzen wir $0^p := 0$.

BEMERKUNG. Um die p-te Potenz in (ii) eindeutig zu definieren, setzt man zunächst voraus, dass $p = \frac{m}{n}$ die teilerfremde Darstellung von p ist. In Lemma 2.21 wird gezeigt, dass auf diese Forderung verzichtet werden kann.

BEMERKUNG. Elemente aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ werden *irrational* genannt. Z.B. wurde im vorherigen Abschnitt bewiesen, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

LEMMA 2.21 (Potenzgesetze). *Es seien $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $p, q \in \mathbb{Q}$. Dann gilt*

$$a^p b^p = (ab)^p, \qquad a^p a^q = a^{p+q}, \qquad (a^p)^q = a^{pq}.$$

BEWEIS. Siehe Übung. $\square$

BEMERKUNG. In den Übungen werden die folgenden Ungleichungen gezeigt:

(i) Sind $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$ und $n \in \mathbb{N}$, so gilt $0 < x^{\frac{1}{n}} < y^{\frac{1}{n}}$.
(ii) Für $a \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < 1$ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ gilt $a^{\frac{1}{m}} < a^{\frac{1}{n}}$.
(iii) Für $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ gilt $a^{\frac{1}{m}} > a^{\frac{1}{n}}$.

2.5. Komplexe Zahlen

Ist $(K, \leq)$ ein geordneter Körper, so gilt $x^2 \geq 0$ für alle $x \in K$. Somit lässt sich z.B. die Gleichung $x^2 = -1$ in K nicht lösen. Wir wollen einen (nicht geordneten) Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$ finden, in dem diese Gleichung lösbar ist. In diesem Körper muss es mindestens ein Element i geben, das nicht in $\mathbb{R}$ liegt und für welches $i^2 = -1$ gilt. Zur Konstruktion dieses Körpers verwenden wir Zahlenpaare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (ähnliches wird gemacht, wenn man z.B. $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{Z}$ konstruiert und rationale Zahlen $r = \frac{m}{n}$ durch Zahlenpaare $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ definiert).

Addition und Multiplikation: Für $(x, y),\ (u, v) \in \mathbb{R}^2$ definieren wir

$$\begin{aligned} (x,y) + (u,v) &:= (x+u, y+v), \\ (x,y) \cdot (u,v) &:= (xu - yv, xv + yu). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Versehen mit dieser Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ ist $(\mathbb{R}^2, (0,0), (1,0), +, \cdot)$ ein Körper. (Beweis in der Linearen Algebra/Übung).

Zu beachten ist, dass dann insbesondere $(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$ gilt. Dies legt folgende Konstruktion nahe. Wir schreiben

$$\begin{aligned} 1 &\qquad \text{für } (1,0), \\ i &\qquad \text{für } (0,1), \end{aligned}$$

und

$$z = x + iy \qquad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Mit dieser Notation gilt z.B. $i^2 = -1$.

Wir definieren den **Körper der komplexen Zahlen** als $\mathbb{C} := \{z = x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$, versehen mit der Addition und Multiplikation in (2.6). Den Körper der reellen Zahlen identifizieren wir mit der Teilmenge

$$\{z = x + i \cdot 0 \,|\, x \in \mathbb{R}\},$$

und fassen in diesem Sinne $\mathbb{R}$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$ auf.

Bemerkung. Wegen $i^2 = -1$ kann der Körper $\mathbb{C}$ nicht angeordnet werden.

Inverse Elemente: Das additiv inverse Element zu $z = x + iy$, mit $x, y \in \mathbb{R}$, ist gegeben durch $-z = -x - iy$. Das multiplikativ inverse Element zu $z \neq 0$ ist gegeben durch

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Definition 2.22. Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ heißt $x =: \operatorname{Re} z$ *Realteil* von z, und $y =: \operatorname{Im} z$ *Imaginärteil* von z. Ist $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\operatorname{Re} z = 0$, so heißt z *rein imaginär*. i heißt *imaginäre Einheit*. Die Zahl $\bar{z} := x - iy$ heißt zu $z = x + iy$ *konjugiert komplexe Zahl*. Die Zahl $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ heißt der *Betrag* von z.

Satz 2.23. *Für $z, w \in \mathbb{C}$ mit $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, gilt* *(i)* $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, *und* $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$;

(ii) $z \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; z = \bar{z}$;

(iii) $\bar{\bar{z}} = z$;

(iv) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, *und* $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$;

(v) $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$;

(vi) $|zw| = |z||w|$;

(vii) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$, *und* $|z| = |\bar{z}|$;

(viii) $|z| = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 0$;

(ix) $|z + w| \leq |z| + |w|$; *(Dreiecksungleichung)*

(x) $|z - w| \geq ||z| - |w||$; *(umgekehrte Dreiecksungleichung)*

(xi) $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, *für* $z \neq 0$.

Beweis. Es seien $z = x + iy$ und $w = u + iv$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$.
(i) Es gilt $z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2\operatorname{Re} z$, und $z - \bar{z} = x + iy - (x - iy) = 2i \operatorname{Im} z$.
(ii) Es gilt nach (i) die Äquivalenz

$$z - \bar{z} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2i \operatorname{Im} z = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Im} z = 0 \;\Leftrightarrow\; z \in \mathbb{R}.$$

(iii) Es ist $\bar{\bar{z}} = \overline{x - iy} = x + iy$.
(iv) Wir haben $\bar{z} + \bar{w} = x - iy + u - iv = (x + u) - i(y + v) = \overline{z + w}$, sowie wegen $i^2 = -1$ und (2.6)

$$\bar{z}\bar{w} = (x - iy)(u - iv) = xu - iyu - ixv + i^2 yv = xu - yv - i(xv + yu) = \overline{zw}.$$

(v) Wieder wegen $i^2 = -1$ ist nach Definition des Betrags

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + ixy - ixy - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

(vi) Nach (v), (iv) gilt

$$|zw|^2 = (zw)(\overline{zw}) = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2.$$

Zieht man links und rechts die Wurzel, so folgt die Behauptung.
(vii) Nach (i) ist $|\operatorname{Re} z| = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, wobei im letzten Schritt die letzte Bemerkung aus Abschnitt 2.4 verwendet wird (Monotonie der Wurzel). Analog zeigt man die zweite Behauptung. Ferner gilt $|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |z|$.
(viii) Es ist $|z| = 0 \;\Leftrightarrow\; |z|^2 = x^2 + y^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x = 0 \text{ und } y = 0) \;\Leftrightarrow\; z = 0$.
(ix) Hier gilt

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &\overset{(v)}{=} (z + w)(\overline{z + w}) \overset{(iv)}{=} (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} \\ &\overset{(v),(iii),(iv)}{=} |z|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + |w|^2 \overset{(i)}{=} |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\overset{(vii)}{\leq} |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \overset{(vi),(vii)}{|} z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Wiederum verwenden wir die Monotonie der Wurzel, um hieraus $|z + w| \leq |z| + |w|$ abzuleiten.

(x) Nach (ix) ist $|z| = |z-w+w| \leq |z-w| + |w|$, also $|z-w| \geq |z| - |w|$. Durch Vertauschen der Rollen von z und w folgt zusätzlich $|z-w| \geq |w| - |z|$ und somit die Behauptung.

(xi) Ist $z \neq 0$, so ist $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$. $\square$

Wir führen zuletzt noch folgende Notation für Kreisscheiben und Kreislinien in $\mathbb{C}$ ein: Für $z \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ setzen wir

$$B(z,r) := \{w \in \mathbb{C} \mid |z-w| < r\} \qquad \text{(offene Kreisscheibe in } \mathbb{C}\text{);}$$

$$\bar{B}(z,r) := \{w \in \mathbb{C} \mid |z-w| \leq r\} \qquad \text{(abgeschlossene Kreisscheibe in } \mathbb{C}\text{);}$$

$$S(z,r) := \{w \in \mathbb{C} \mid |z-w| = r\} \qquad \text{(Kreislinie in } \mathbb{C}\text{);}$$

jeweils mit Mittelpunkt z und Radius r.

KAPITEL 3

Konvergenz von Folgen

3.1. Definition von Folgen

DEFINITION 3.1. Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bzw. $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ heißt (reelle bzw. komplexe) *Folge*. Für $n \in \mathbb{N}$ heißt $a_n := \varphi(n)$ *n-tes Folgenglied* der Folge φ. Wir schreiben anstelle von φ auch

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (a_n)_n, \quad (a_n) \quad \text{oder} \quad (a_1, a_2, a_3, \ldots).$$

Wir betrachten zu Beginn einige einfache Beispiele.

BEISPIEL. a) Für $a \in \mathbb{C}$ definiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a)_{n\in\mathbb{N}} = (a, a, a, a, \ldots)$ eine konstante Folge.

b) Die Folge der natürlichen Zahlen ist gegeben durch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$.

c) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$ wird alternierende Folge genannt. Sie nimmt genau zwei Werte an.

d) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := ((i)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (i, -1, -i, 1, i, -1, \ldots)$ nimmt vier verschiedene Werte an.

e) Betrachtet man die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots)$, so ist intuitiv klar, dass die Folge „gegen 0 strebt“. Wie dies mathematisch präzise zu formulieren ist, wird in der nächsten Definition deutlich gemacht.

DEFINITION 3.2. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $a \in \mathbb{C}$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent* mit *Grenzwert* (oder Limes) a, falls für jedes gegebene $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so existiert, dass

$$|a_n - a| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq N_\varepsilon \tag{3.1}$$

gilt.
Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert a, so schreiben wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{oder} \qquad a_n \to a \quad (n \to \infty).$$

Sprechweise: „$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a für n gegen ∞.“
Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent, so heißt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergent*. Sprechweise: „$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.“

BEMERKUNG. Formal ausgedrückt bedeutet die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N_\varepsilon : \; |a_n - a| \leq \varepsilon.$$

Divergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so bedeutet dies formal, dass

$$\forall a \in \mathbb{C} \; \exists \varepsilon > 0 \; \forall N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \exists n \geq N_\varepsilon : \; |a_n - a| > \varepsilon.$$

Wir gehen zurück zu den obigen Beispielen und zeigen die Konvergenz bzw. Divergenz in zwei Fällen.

BEISPIEL. e) *Behauptung:* Die Folge $(a_n)_n = (\frac{1}{n})_n$ konvergiert gegen 0.
Vorüberlegung: Wir müssen für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so finden, dass die Bedingung (3.1) erfüllt ist, d.h. dass $|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \varepsilon$ ist für alle $n \geq N_\varepsilon$. Dies finden wir nach dem Satz von Archimedes.
Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach dem Satz von Archimedes existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$. Mit dieser Wahl folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N_\varepsilon$, dass

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} \leq \varepsilon,$$

womit die Konvergenz gezeigt ist.

c) *Behauptung:* $((-1)^n)_n$ divergiert.
Vorüberlegung: Nehmen wir an, dass die Folge einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ besitzt. Ist $a \geq 0$, so haben aber die ungeraden Folgenglieder immer Abstand mindestens 1, kann also nicht beliebig klein gewählt werden für hinreichend großes n. *Beweis:* Es sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Wir wählen $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Ist $a \geq 0$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, n ungerade, dass

$$|a - a_n| = |a - (-1)| = a + 1 \geq 0 + 1 > \varepsilon.$$

Folglich kann kein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existieren mit $|a_n - a| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$.
Ist andernfalls $a < 0$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, n ungerade, dass $|a - a_n| = |a - 1| = 1 - a \geq 1 > \varepsilon$ ist. Somit ist gezeigt, dass $(a_n)_n$ divergiert.

Wir zeigen, dass Grenzwerte konvergenter Folgen immer eindeutig bestimmt sind:

SATZ 3.3. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Sind $a, b \in \mathbb{C}$ Grenzwerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so gilt $a = b$.*

BEWEIS. Wir nehmen an, dass $a \neq b$ ist, also $\varepsilon := \frac{|b-a|}{2} > 0$. Da a Grenzwert von $(a_n)_n$ ist, existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$. Wir erhalten hieraus mit der umgekehrten Dreiecksungleichung, dass für alle $n \geq N_\varepsilon$

$$|b - a_n| = |b - a + a - a_n| \geq ||b - a| - |a_n - a|| \geq |b - a| - |a_n - a| \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$$

ist, im Widerspruch zu b Grenzwert von $(a_n)_n$. □

Die in Beispiel c) betrachtete alternierende Folge ist divergent, jedoch „geht sie nicht gegen Unendlich“. Wir drücken dies mit dem Begriff der Beschränktheit aus:

DEFINITION 3.4. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ (bzw. $A \subseteq \mathbb{R}$) heißt *beschränkt* in $\mathbb{C}$ (bzw. in $\mathbb{R}$), falls ein $M > 0$ existiert mit

$$|x - y| \leq M$$

für alle $x, y \in A$. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *beschränkt*, falls die Bildmenge $\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathbb{C}$ (bzw. in $\mathbb{R}$) beschränkt ist.

Beispiel. (i) Ein beschränktes Intervall ist beschränkt: z.B. gilt für das Intervall $[a,b]$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ und $a < b$, dass $|x-y| \leq |b-a| =: M$ ist für alle $x,y \in [a,b]$. Entsprechendes gilt für die Intervalle (a,b), $(a,b]$ und $[a,b)$.

(ii) Für $z \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ ist $B(z,r)$ in $\mathbb{C}$ beschränkt: Wählt man z.B. $M = 2r$, so gilt für alle $x,y \in B(z,r)$, dass $|x-y| \leq |x-z| + |z-y| < 2r$.

(iii) Die Folge $(a_n)_n = ((-1)^n)_n$ ist beschränkt, da $\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$.

(iv) Die Folge $(a_n)_n = (n)_n$ ist nicht beschränkt. Es ist $\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$, und $\mathbb{N}$ ist nicht beschränkt in $\mathbb{R}$ (vgl. Satz 2.15).

Bemerkung. Eine Menge A ist genau dann beschränkt, wenn ein $M > 0$ existiert mit $|x| \leq M$ für alle $x \in A$.
Beweis: Übung.

Satz 3.5. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis. Es sein $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{C}$. Dann existiert zu $\varepsilon = 1$ ein $N = N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \leq 1$ für alle $n \geq N$, und somit

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|$$

für alle $n \geq N$. Setzen wir nun

$$M := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |a|\},$$

so gilt $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung. In der Konvergenzbedingung (3.1) genügt es, wenn man eine Abschätzung gegen ein Vielfaches von ε findet, solange dieses Vielfaches nicht von ε oder n abhängt:

(i) Es sei $(a_n)_n$ eine Folge, und $a \in \mathbb{C}$. Außerdem sei ein $c > 0$ gegeben. Existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| \leq c\varepsilon \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq N_\varepsilon,$$

so ist $(a_n)_n$ konvergent mit Grenzwert a.
Beweis: Es sei $\tilde{\varepsilon} > 0$ gegeben. Setzt man $\varepsilon := \frac{\tilde{\varepsilon}}{c} > 0$ und wendet hierauf obige Annahme an, so existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| \leq c\varepsilon = \tilde{\varepsilon} \qquad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon.$$

Dies zeigt aber gerade die Konvergenz von $(a_n)_n$ aus Definition 3.2 (mit $\tilde{\varepsilon}$ anstelle von ε).

(ii) Teil (i) zeigt auch, dass die Bedingung $|a_n - a| \leq \varepsilon$ in (3.2) durch die Bedingung $|a_n - a| < \varepsilon$ ersetzt werden kann.

3.2. Rechenregeln für Folgen

Sind zwei Folgen konvergent, so ist der Grenzwert der Summe der Folgen gleich der Summe der Grenzwerte. Außerdem konvergiert ein skalares Vielfaches einer konvergenten Folge gegen das Vielfache des Grenzwerts.

Satz 3.6. *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$) konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$). Dann gilt:*

(i) Die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit
$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b.$$
(ii) Die Folge $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit
$$\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda a.$$

Beweis. (i) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren $N(\varepsilon, a), N(\varepsilon, b) \in \mathbb{N}$ mit
$$|a_n - a| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon, a),$$
$$|b_n - b| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon, b).$$
Setzt man $N_\varepsilon := \max\{N(\varepsilon, a), N(\varepsilon, b)\}$, so gilt unter Verwendung der Dreiecksungleichung, dass für alle $n \geq N_\varepsilon$
$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$
(ii) Ist $\lambda = 0$, so ist $(\lambda a_n)_n = (0)_n$ mit $\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = 0 = \lambda a$.
Sei $\lambda \neq 0$. Dann gilt für alle $n \geq N(\varepsilon, a)$, dass
$$|\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda(a_n - a)| = |\lambda||a_n - a| \leq |\lambda|\varepsilon$$
ist. Nach der letzten Bemerkung in Abschnitt 3.1 folgt die Konvergenz von $(\lambda a_n)_n$. □

Definition 3.7. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Nullfolge*, falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist mit Grenzwert 0.

Beispiel. (a) Die Folge $(a_n)_n = (\frac{1}{n^2})_n$ ist eine Nullfolge. (Beweis unten).

(b) Konvergiert eine Folge $(a_n)_n$ gegen ein $a \in \mathbb{C}$, so ist $(a_n - a)_n$ eine Nullfolge.
Beweis: Direkt aus der Definition; oder aus Satz 3.6 (i): Da $(a_n)_n$ konvergent ist, gilt
$$\lim_{n\to\infty}(a_n - a) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty}(-a) = a - a = 0.$$

(c) Ist $(b_n)_n$ eine reelle Nullfolge, und $(a_n)_n$ eine Folge (in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) mit
$$|a_n| \leq b_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$
so ist $(a_n)_n$ eine Nullfolge.
Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Voraussetzung existiert ein $N(\varepsilon, b) \in \mathbb{N}$ mit $|b_n| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon, b)$. Dann folgt auch
$$|a_n| \leq b_n \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon, b).$$

Wir verwenden (c), um (a) zu beweisen: Nach Beispiel e) in Abschnitt 3.1 ist $(\frac{1}{n})_n$ eine Nullfolge. Da $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt nach (c) die Behauptung.

Satz 3.8. *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen.*

(i) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so ist $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

(ii) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, so ist

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = ab.$$

Beweis. (i) Übungsblatt.
(ii) Nach Beispiel (b) oben sind $(a_n - a)_n$, $(b_n - b)_n$ Nullfolgen, außerdem ist nach Satz 3.5 $(b_n)_n$ beschränkt. Nach Teil (i) und Satz 3.6 (ii) sind $((a_n - a)b_n)_n$ und $(a(b_n - b))_n$ Nullfolgen. Wir schließen mit Satz 3.6 (i), dass

$$a_nb_n - ab = (a_n - a)b_n + a(b_n - b) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

□

Konvergiert eine Folge gegen einen Grenzwert $\neq 0$, so konvergiert die inverse Folge gegen das Inverse des Grenzwerts:

Satz 3.9. *Ist $(a_n)_n$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq N$, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}.$$

Beweis. Da $a \neq 0$ ist und $(a_n)_n$ gegen a konvergiert, existiert zu $\tilde{\varepsilon} := \frac{|a|}{2} > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| \leq \tilde{\varepsilon} = \frac{|a|}{2} \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

Also gilt für $n \geq N$ nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |a_n| &= |a_n - a + a| = |a - (a - a_n)| \geq ||a| - |a - a_n|| \\ &\geq |a| - |a - a_n| \geq |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2} > 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wiederum aus der Konvergenz von $(a_n)_n$ folgt die Existenz eines $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$. Für $n \geq \max(N, N_\varepsilon)$ folgt dann mit (3.2)

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - a_n}{a_na}\right| = \frac{1}{|a_n||a|}|a_n - a| \leq \frac{2}{|a|^2}|a_n - a| \leq \frac{2}{|a|^2}\varepsilon,$$

d.h. $\dfrac{1}{a_n} \to \dfrac{1}{a}$ für $n \to \infty$. □

Wir notieren noch zwei wichtige Vergleichssätze für reelle Zahlenfolgen.

Satz 3.10. *Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei konvergente Folgen in $\mathbb{R}$. Existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ so, dass*

$$a_n \leq b_n \qquad \text{für alle } n \geq N_0$$

gilt, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Bemerkung. Weiß man, dass $a_n < b_n$ ist für alle $n \geq N_0$, so lässt sich daraus nicht schließen, dass dann auch $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$ ist.
Beispiel: Für die Folgen $(a_n)_n = (\frac{1}{n^2})_n$ und $(b_n)_n = (\frac{1}{n})_n$ gilt für $n \geq 2$, dass $a_n < b_n$ ist, aber beide Folgen konvergieren gegen 0.

Beweis von Satz 3.10. Wir bezeichnen mit a bzw. b die Grenzwerte der beiden Folgen. Wir nehmen an, dass $b < a$ ist. Dann wäre $\varepsilon := a - b > 0$, und nach Voraussetzung existiert dann ein $N_a \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ für alle $n \geq N_a$, somit insbesondere $a_n \geq a - \frac{\varepsilon}{4}$. Entsprechend existiert auch ein $N_b \in \mathbb{N}$ so, dass $b_n \leq b + \frac{\varepsilon}{4}$ ist für alle $n \geq N_b$. Für $N := \max(N_a, N_b)$ folgern wir

$$a - \frac{\varepsilon}{4} \leq a_N \overset{\text{Vor.}}{\leq} b_N \leq b + \frac{\varepsilon}{4},$$

also $\varepsilon = a - b \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Widerspruch. □

Satz 3.11 (Sandwichkriterium). *Es seien $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ und $(c_n)_n$ reelle Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n =: a$. Existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass*

$$a_n \leq b_n \leq c_n \qquad \textit{für alle } n \geq N \tag{3.3}$$

gilt, so folgt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach Voraussetzung ein $N(a,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $a_n \geq a - \varepsilon$ für alle $n \geq N(a,\varepsilon)$, und ein $N(c,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $c_n \leq a + \varepsilon$ für alle $n \geq N(c,\varepsilon)$. Folglich gilt für $M := \max\{N, N(a,\varepsilon), N(c,\varepsilon)\}$, dass

$$a - \varepsilon \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq a + \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq M,$$

also $|b_n - a| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq M$. □

Beispiel. Es sei $b > 0$. *Behauptung:* Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sqrt[n]{b})_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1.$$

Aus der Übung ist bekannt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ gilt. Nach dem Satz von Archimedes (Satz 2.15 und Korollar 2.17) existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < b < N$. Folglich ist

$$\frac{1}{n} < b < n \qquad \text{für alle } n \geq N,$$

und aus der Monotonie der Wurzel (Bemerkung nach Lemma 2.21) erhalten wir

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{b} \leq \sqrt[n]{n} \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

Setzen wir also $(a_n)_n := \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)_n$, und $(c_n)_n := (\sqrt[n]{n})_n$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$, und Bedingung (3.3) ist erfüllt. Satz 3.11 liefert also $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1$.

Wir schließen den Abschnitt mit zwei Beobachtungen zur Konvergenz komplexer Folgen:

LEMMA 3.12. *Es sei* $(a_n)_n$ *eine konvergente Folge in* $\mathbb{C}$ *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$*. Dann konvergiert auch* $(|a_n|)_n$*, und es gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$*.*

BEWEIS. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $(a_n)_n$ konvergent ist, existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$. Unter Verwendung der umgekehrten Dreiecksungleichung folgt nun

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon,$$

und somit die behauptete Konvergenz von $(|a_n|)_n$. □

BEMERKUNG. Die Umkehrung der obigen Aussage gilt im Allgemeinen nicht!
Beispiel: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((i)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (i, -1, -i, 1, i, \dots)$ ist divergent, aber die Folge der Beträge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}} = (|i^n|)_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Bei komplexen Zahlenfolgen genügt es, den Real- und den Imaginärteil der Folge separat auf Konvergenz zu untersuchen:

SATZ 3.13. *Es sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{C}$*. Dann sind äquivalent:*

(1) $(a_n)_n$ *ist konvergent.*

(2) $(\operatorname{Re} a_n)_n$ *und* $(\operatorname{Im} a_n)_n$ *sind konvergent.*

In diesem Fall gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\operatorname{Re} a_n) + i \lim_{n\to\infty} (\operatorname{Im} a_n).$$

BEWEIS. (1) $\Rightarrow$ (2): Wir setzen $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Nach Beispiel (b) in diesem Abschnitt und Lemma 3.12 ist $(|a_n - a|)_n$ eine Nullfolge. Mit Satz 2.23 (vii) erhalten wir

$$|\operatorname{Re}(a_n - a)| \leq |a_n - a| \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

also ist nach Beispiel (c) auch $(\operatorname{Re}(a_n - a))_n$ eine Nullfolge., und somit nach Beispiel (b) $\operatorname{Re} a_n \to \operatorname{Re} a$ für $n \to \infty$. Entsprechend folgt die Aussage für $(\operatorname{Im} a_n)_n$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Wir setzen $a_R := \lim\limits_{n\to\infty} (\operatorname{Re} a_n)$ und $a_I := \lim\limits_{n\to\infty} (\operatorname{Im} a_n)$, sowie $a := a_R + ia_I$, also $a_R = \operatorname{Re} a$ und $a_I = \operatorname{Im} a$. Aus der Ungleichung $\sqrt{x^2 + y^2} \leq x + y$ für $x, y > 0$ folgern wir

$$|a_n - a| = \sqrt{|\operatorname{Re} a_n - \operatorname{Re} a|^2 + |\operatorname{Im} a_n - \operatorname{Im} a|^2} \leq |\operatorname{Re} a_n - \operatorname{Re} a| + |\operatorname{Im} a_n - \operatorname{Im} a|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $(\operatorname{Re} a_n - \operatorname{Re} a)_n$ und $(\operatorname{Im} a_n - \operatorname{Im} a)_n$ nach Voraussetzung und Beispiel (b) Nullfolgen sind, folgt mit Beispiel (c), dass $(a_n - a)_n$ eine Nullfolge ist. D.h. $(a_n)_n$ konvergiert. □

3.3. Teilfolgen und Häufungspunkte

Sind X, Y, Z nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen, so ist die *Komposition* von g mit f definiert durch

$$g \circ f : X \to Z, \quad x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Wir nennen eine Abbildung $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *strikt wachsend*, falls

$$\psi(k) < \psi(k+1) \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \tag{3.4}$$

gilt.

Definition 3.14. Es sei $\varphi = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, und $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine strikt wachsende Abbildung. Dann heißt $\varphi \circ \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$) eine *Teilfolge* von φ.

Notation: Setzt man $n_k := \psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, so schreiben wir für eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots)$$

anstelle von $\varphi \circ \psi$. Da ψ strikt wachsend ist, gilt $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$.

Beispiel. a) Die Folge $((-1)^n)_n = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$ besitzt z.B. die beiden konstanten Teilfolgen

$$((-1)^{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (1, 1, 1, \ldots) \quad \text{und} \quad ((-1)^{2k-1})_{k\in\mathbb{N}} = (-1, -1, -1, \ldots),$$

die man durch Wahl der Abbildung $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\psi(k) = 2k$ bzw. $\psi(k) = 2k - 1$ erhält.

b) Jede Folge ist Teilfolge ihrer selbst, da auch $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\psi(k) = k$ zulässig ist.

c) Für die Folge $(a_n)_n = (\frac{1}{n})_n$ erhält man mit der Wahl $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\psi(k) = 2^k$ die Teilfolge

$$(a_{n_k})_k = \left(\frac{1}{2^k}\right)_k = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots)$$

der Inversen der Zweierpotenzen.

Bemerkung. Ist $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strikt wachsend, so gilt $\psi(k) \geq k$.
Dies lässt sich leicht mit vollständiger Induktion zeigen: Da ψ nach $\mathbb{N}$ abbildet, muss $\psi(1) \geq 1$ gelten. Gilt nun $\psi(k) \geq k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so folgt aus (3.4), dass $\psi(k+1) > \psi(k) \geq k$ gilt, also $\psi(k+1) \geq k+1$.

Lemma 3.15. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{C}$. Dann ist auch jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, und*

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

Beweis. Es sei $(a_{n_k})_k$ eine Teilfolge von $(a_n)_n$. Da $(a_n)_n$ konvergent ist, existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$. Nach obiger Bemerkung gilt $n_k \geq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ist also $k \geq N_\varepsilon$, so auch $n_k \geq N_\varepsilon$. Hieraus schließen wir, dass

$$|a_{n_k} - a| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } k \geq N_\varepsilon$$

ist, also $a_{n_k} \to a$ konvergiert für $k \to \infty$. □

Beispiel. Es sei $m \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann sind die Folgen $\left(\frac{1}{m^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ und $\left(\frac{1}{k^m}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent mit

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{m^k} = 0, \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^m} = 0.$$

Dies folgt aus Lemma 3.15 mit der Wahl $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\psi(k) = m^k$ bzw. $\psi(k) = k^m$, und der Folge $(a_n)_n = (\frac{1}{n})_n$.

Definition 3.16. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Dann heißt $a \in \mathbb{C}$ *Häufungspunkt* der Folge $(a_n)_n$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ unendlich[1] viele a_n existieren mit $|a_n - a| \leq \varepsilon$.

Beispiel. (a) Die Folge $((-1)^n)_n$ besitzt zwei Häufungspunkte -1 und 1. (Dass keine weiteren Häufungspunkte existieren, zeigen wir später.)

(b) Die Folge $((i)^n)_n$ besitzt vier Häufungspunkte $i, -1, -i, 1$.

(c) Die Folge $(n)_n$ besitzt keinen Häufungspunkt.
Beweis: Angenommen, es existiere ein Häufungspunkt $a \in \mathbb{C}$ der Folge $(a_n)_n = (n)_n$. Wir wählen $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Existiert kein Folgenglied mit $|a_n - a| \leq \frac{1}{4}$, so sind wir fertig. Ist andernfalls a_n ein Folgenglied mit $|a_n - a| \leq \varepsilon$, so gilt für ein weiteres Folgenglied a_k mit $k \neq n$, dass $|a_k - a| \geq |a_k - a_n| - |a_n - a| \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > \varepsilon$ ist, da für $k \neq n$ immer $|a_k - a_n| \geq 1$ gilt.

Wir wollen einsehen, dass wir zu jedem Häufungspunkt einer Folge auch eine Teilfolge finden können, die gegen den Häufungspunkt konvergiert.

Satz 3.17. *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt genau dann $a \in \mathbb{C}$ als Häufungspunkt, wenn eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.*

Der Beweis des Satzes folgt nach dem Einschub.

Einschub

A) Bijektionen und unendliche Mengen

Es seien X, Y, Z nichtleere Mengen. Für eine Abbildung $f : X \to Y$ bezeichnen wir die Bildmenge der Abbildung mit

$$f(X) := \{y \in Y \,|\, \text{es existiert ein } x \in X \text{ mit } f(x) = y\} = \{f(x) \,|\, x \in X\}.$$

[1]siehe Einschub A) unten

Wir führen die Eigenschaften Injektivität, Surjektivität und Bijektivität einer Abbildung ein (für weitere Details und Beispiele vgl. Lineare Algebra).

DEFINITION. Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann heißt

(i) f *surjektiv*, falls $f(X) = Y$ gilt (d.h. zu jedem $y \in Y$ existiert ein $x \in X$ mit $f(x) = y$);

(ii) f *injektiv*, falls für $u, x \in X$ gilt, dass aus $x \neq u$ immer $f(x) \neq f(u)$ folgt;

(iii) f *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

Ist $f : X \to Y$ bijektiv, so existiert die *Umkehrabbildung* $f^{-1} : Y \to X$, $y \mapsto f^{-1}(y) =: x$, wobei $x \in X$ das eindeutig bestimmte Element mit $f(x) = y$ ist.[2]

BEMERKUNG. Ist $f : X \to Y$ bijektiv, so ist auch $f^{-1} : Y \to X$ bijektiv.

Mit Hilfe bijektiver Abbildungen wollen wir definieren, was eine endliche bzw. eine unendliche Menge ist.

DEFINITION 3.18. Es seien X, Y nichtleere Mengen. X und Y heißen *gleichmächtig*, falls eine Bijektion $f : X \to Y$ existiert.
Existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass X und $\{1, \dots, n\}$ gleichmächtig sind, so heißt X *endlich*. Schreibweise: $\#X = n$.
Ist X nicht endlich, so heißt X *unendlich*. Schreibweise: $\#X = \infty$.

BEISPIEL. (i) Ist M eine endliche Menge mit Mächtigkeit $\#M = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so kann man M darstellen als $M = \{x_1, \dots, x_n\}$.
Denn: Wegen $\#M = n$ existiert eine bijektive Abbildung $f : M \to \{1, \dots, n\}$. Setzt man $x_j := f^{-1}(j)$ für $j \in \{1, \dots, n\}$, so ist also $M = \{x_1, \dots, x_n\}$.

(ii) $\mathbb{N}$ ist unendlich.

(iii) Allgemeiner gilt: Für jedes $m \in \mathbb{Z}$ ist $M = \{k \in \mathbb{Z} \,|\, k \geq m\}$ unendlich.
Beweis: Angenommen, es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\#M = n$. Dann kann nach (i) M dargestellt werden als $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ mit Elementen $x_j \in \mathbb{Z}$. Wir setzen nun $y := |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| + 1$. Dann ist $y \in \mathbb{Z}$ mit $y > x_j \geq m$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$, also $y \in M$ mit $y > x_j$ für jedes $x_j \in M$. Widerspruch.

BEMERKUNG. Ist $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine *strikt wachsende* Abbildung, so ist die Menge $\psi(\mathbb{N}) = \{\psi(k) \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ unendlich.
Beweis: Da ψ strikt wachsend ist, ist $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injektiv und somit $\psi : \mathbb{N} \to \psi(\mathbb{N})$ bijektiv. Also sind $\mathbb{N}$ und $\psi(\mathbb{N})$ gleichmächtig.

B) Wohlordnungsprinzip

SATZ 3.19. *Jede nichtleere Teilmenge von* $\mathbb{N}$ *besitzt ein Minimum.*

BEWEIS. Angenommen, $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$, und A besitzt kein Minimum. Wir setzen $B := \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ untere Schranke von } A\}$. Dann ist $1 \in B$ (da $A \subseteq \mathbb{N}$). Sei $n \in B$. Da $\min(A)$ nicht existiert, muss $n \notin A$ gelten, außerdem $n \leq a$ für alle $a \in A$. Somit gilt auch $n+1 \leq a$ für alle $a \in A$, also $n+1 \in B$. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist

[2] Existenz von x wegen Surjektivität, Eindeutigkeit wegen Injektivität von f.

also $B = \mathbb{N}$. Dies impliziert $A = \emptyset$: Würde ein $m \in A$ existieren, so wäre $m + 1 \notin B = \mathbb{N}$, im Widerspruch zu $A \subseteq \mathbb{N}$. Also muss $A = \emptyset$ gelten im Widerspruch zur Annahme. □

Wir kommen zurück zu Satz 3.17.

Beweis von Satz 3.17. Ist $(a_{n_k})_k$ eine Teilfolge von $(a_n)_n$ mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$, so ist a Häufungspunkt von $(a_{n_k})_k$ und somit auch von $(a_n)_n$. (Hier verwenden wir, dass die Indexmenge $\{n_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ unendlich ist.
Sei umgekehrt a ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$. Wir müssen eine Teilfolge finden, die gegen a konvergiert. Hierzu setzen wir $n_1 := 1$, und definieren dann rekursiv für $k \geq 2$

$$n_k := \min\{m \in \mathbb{N} \mid m > n_{k-1},\ |a_m - a| \leq \frac{1}{k}\}.$$

Für $k \geq 2$ sind jeweils die Mengen $A_k := \{m \in \mathbb{N} \mid m > n_{k-1},\ |a_m - a| \leq \frac{1}{k}\}$ nichtleer, da a Häufungspunkt ist. Nach Satz 3.19 existiert also $\min(A_k)$. Somit ist $\psi(k) = n_k$ wohldefiniert, und nach Definition der n_k ist ψ strikt wachsend.
Zu zeigen ist noch, dass $(a_{n_k})_k$ konvergent ist mit Grenzwert a.
Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach Korollar 2.17 ein $K \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{k} < \varepsilon$ für alle $k \geq K$. Nach Definition der n_k folgt

$$|a_{n_k} - a| \leq \frac{1}{k} < \varepsilon \qquad \text{für alle } k \geq K,$$

also $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$. □

Korollar 3.20. *Es sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{C}$. Dann ist a der einzige Häufungspunkt von $(a_n)_n$.*

Beweis. Nach Satz 3.17 ist a Häufungspunkt von $(a_n)_n$. Es sei $b \in \mathbb{C}$ ein weiterer Häufungspunkt von $(a_n)_n$. Wiederum nach Satz 3.17 existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ mit $a_{n_k} \to b$ für $k \to \infty$. Da $(a_n)_n$ konvergent ist, muss aber nach Lemma 3.15 auch die Teilfolge gegen den Grenzwert a konvergieren, d.h. $a_{n_k} \to a$ für $k \to \infty$. Aus der Eindeutigkeit des Grenzwerts (Satz 3.3) schließen wir, dass $a = b$ gelten muss. □

Die nächste Bemerkung liefert uns ein Kriterium, wann eine Folge nur z.B. m Häufungspunkte besitzt. Durch „Hinschauen“ ist klar, dass z.B. die Folge $((-1)^n)_n$ nur zwei Häufungspunkte besitzt, da wir die Folge in zwei Teilfolgen *zerlegen* können, die jeweils gegen einen der beiden Häufungspunkte konvergieren. Zeigen lässt sich dies folgendermaßen:

Bemerkung. Es sei $(a_n)_n$ eine Folge mit Häufungspunkten $c^1, c^2, \ldots, c^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, es existieren Teilfolgen $(a_{\psi_j(k)})_k$ mit $a_{\psi_j(k)} \to c^j$ für $k \to \infty$, für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$. Liegt jedes Folgenglied in (mindestens) einer dieser Teilfolgen, so besitzt $(a_n)_n$ keine weiteren Häufungspunkte.

Beweis. (wird noch ergänzt). □

3.4. Monotonie von Folgen

Wir betrachten in diesem Abschnitt reelle Folgen.

DEFINITION 3.21. Eine Folgen $(a_n)_n$ heißt *monoton wachsend*, falls

$$a_n \le a_{n+1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt, und *monoton fallend*, falls

$$a_n \ge a_{n+1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt. Notation: $a_n \nearrow$ bzw. $a_n \searrow$.
Die Folge $(a_n)_n$ heißt *strikt monoton wachsend* bzw. *strikt monoton fallend*, falls $a_n < a_{n+1}$ bzw. $a_n > a_{n+1}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

BEISPIEL. (a) Die Folge $(n^2)_n$ ist strikt monoton wachsend. Allgemein gilt: Die Folge $(n^p)_n$ ist strikt monoton wachsend für $p \in \mathbb{Q}$ mit $p > 0$.
(b) Die Folge $((-1)^n \frac{1}{n})_n$ ist nicht monoton.

Um die Konvergenz von Folgen zu zeigen, ist die nächste Aussage oft sehr nützlich: Beschränkte monotone Folgen konvergieren.

SATZ 3.22 (Monotoniekriterium). *(i) Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte reelle Folge $(a_n)_n$ konvergiert, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sup\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}.$$

(ii) Jede monoton fallende, nach unten beschränkte reelle Folge $(a_n)_n$ konvergiert, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = \inf\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}.$$

BEWEIS. (i) Es sei $(a_n)_n$ monoton wachsend. Die Bildmenge der Folge $A := \{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ ist nach Voraussetzung nach oben beschränkt und nichtleer. Also existiert $a := \sup(A)$ in $\mathbb{R}$. Wir zeigen, dass $(a_n)_n$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$:
Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 2.14 (i) existiert ein $a_N \in A$ mit $a - \varepsilon < a_N \le a$. Da $(a_n)_n$ monoton wachsend ist, folgt

$$a - \varepsilon < a_N \le a_n \le a \qquad \text{für alle } n \ge N,$$

also $|a_n - a| \le \varepsilon$ für alle $n \ge N$ und somit die Konvergenz der Folge gegen a.
(ii) Dies lässt sich analog zu Teil (i) zeigen, mit $a := \inf(A)$ und unter Verwendung von Satz 2.14 (ii). □

BEMERKUNG. Aus der Übung ist die sogenannte *Bernoullische Ungleichung* bekannt: Für $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1 + x)^n \ge 1 + nx. \tag{3.5}$$

Beispiel 3.23 (Eulersche Zahl - Teil 1). Die Folge $(a_n)_n := ((1+\frac{1}{n})^n)_n$ konvergiert. Wir setzen

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{(Eulersche Zahl).}$$

Es gilt $2 < e \leq 3$.

Beweis. *Behauptung 1:* $(a_n)_n$ ist monoton wachsend.
Beweis von Beh. 1: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt unter Verwendung der Bernoullischen Ungleichung (3.5)

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}\cdot\frac{n+1}{n}\\ &= \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}\\ &\geq \left(1-(n+1)\cdot\frac{1}{(n+1)^2}\right)\cdot\frac{n+1}{n} = 1,\end{aligned}$$

also $a_{n+1} \geq a_n$.

Behauptung 2: $(a_n)_n$ ist nach oben beschränkt.
Beweis von Beh. 2: Analog zu oben zeigt man, dass die Folge $(b_n)_n = (1-\frac{1}{n})^n)_n$ monoton wachsend ist (Übung). Damit folgt: Die (inverse) Folge $(c_n)_n := (b_{n+1}^{-1})_n = \left((1+\frac{1}{n})^{n+1}\right)_n$ ist monoton fallend. Nun gilt aber

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = c_n \leq c_1 = 4$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit die Behauptung. Aus Satz 3.22 folgt nun, dass $(a_n)_n$konvergiert.

Behauptung 3: $2 \leq e < 3$.
Beweis von Beh. 2: Verwendet man die binomische Formel, so lässt sich a_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ darstellen als

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}. \tag{3.6}$$

Für jedes $k \in \{1,\ldots,n\}$ gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k)!}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}\\ &\leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}},\end{aligned}$$

da $2^{k-1} \leq k!$. Setzen wir dies in (3.6) ein, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n) \leq 1 + 2 = 3, \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

wobei in der zweiten Zeile die geometrische Summenformel (Satz 1.2) verwendet wurde. □

Beispiel 3.23 (Eulersche Zahl - Teil 2). Es gilt

$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Beweis. Wir setzen $s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Die Folge $(s_n)_n$ ist monoton wachsend (da $s_n \leq s_n + \frac{1}{(n+1)!} = s_{n+1}$ ist). Aus Teil 1 wissen wir, dass $s_n \leq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, d.h. $(s_n)_n$ ist beschränkt. Satz 3.22 liefert folglich die Konvergenz von $(s_n)_n$. Wir setzen $\lim_{n\to\infty} s_n =: e'$ und zeigen, dass $e' = e$ gilt.
Nach (3.7) ist $a_n \leq s_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also muss $e \leq e'$ gelten nach dem Vergleichssatz 3.10. Es bleibt also noch zu zeigen, dass $e' \leq e$ ist. Sei $m \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Für $n \geq m$ schätzen wir a_n nach unten ab durch

$$
\begin{aligned}
a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&\geq \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} 1 \cdot (1 - \frac{1}{n}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{k-1}{n}) =: a_{m,n}.
\end{aligned}
$$

Nun gilt $a_{m,n} \nearrow s_m$ für $n \to \infty$, und außerdem $a_{m,n} \leq a_n$ für alle $n \geq m$. Der Vergleichssatz 3.10 liefert also $s_m \leq e$. Da $m \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt war, gilt

$$s_m \leq e \qquad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Die nochmalige Anwendung von Satz 3.10 liefert nun $e' \leq e$. □

3.5. Limes superior und Limes inferior

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. Dies ist der sogenannte *Satz von Bolzano-Weierstraß*, einem der wichtigsten Resultate in dieser Vorlesung. Wir beginnen mit einer

Vorüberlegung: Es sei $(a_n)_n$ eine beschränkte reelle Folge. Wir definieren hieraus zwei neue Folgen $(b_n)_n$ und $(c_n)_n$ durch

$$\begin{aligned} b_n &:= \sup_{k\geq n} a_k = \sup\{a_k \mid k \geq n\}, \\ c_n &:= \inf_{k\geq n} a_k = \inf\{a_k \mid k \geq n\}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Da die Folge $(a_n)_n$ beschränkt ist, existieren sowohl $\sup\limits_{k\geq n} a_k$ und $\inf\limits_{k\geq n} a_k$, und wir haben die Abschätzung

$$\inf_{k\geq 1} a_k \leq \inf_{k\geq n} a_k \leq \inf_{k\geq n+1} a_k \leq \sup_{k\geq n+1} a_k \leq \sup_{k\geq n} a_k \leq \sup_{k\geq 1} a_k.$$

Dies zeigt zum einen, dass die Folgen $(b_n)_n$ und $(c_n)_n$ beschränkt sind. Zum anderen zeigt es, dass die Folge $(b_n)_n$ monoton fallend und die Folge $(c_n)_n$ monoton wachsend ist. Nach Satz 3.22 sind $(b_n)_n$ und $(c_n)_n$ konvergent. Dies erlaubt die folgende Definition.

Definition 3.24. Es sei $(a_n)_n$ eine beschränkte reelle Folge. Dann heißt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \lim_{n\to\infty} \big(\sup_{k\geq n} a_k\big)$$

der *Limes superior*, und

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \lim_{n\to\infty} \big(\inf_{k\geq n} a_k\big)$$

der *Limes inferior* der Folge $(a_n)_n$.

Bemerkung. Nach Satz 3.22 und der Vorüberlegung gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \big(\sup_{k\geq n} a_k\big), \qquad \text{und}$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \big(\inf_{k\geq n} a_k\big).$$

Beispiel. a) Für die alternierende Folge $(a_n)_n := (-1)^n$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1, \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = -1.$$

b) Betrachtet man die Folge $(a_n)_n := ((-1)^n(1+\frac{1}{n}))_n = (-2, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, \ldots)$, so ist

$$b_n := \sup_{k\geq n} a_k = \begin{cases} 1+\frac{1}{n}, & n \text{ gerade}, \\ 1+\frac{1}{n+1}, & n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

und

$$c_n := \inf_{k\geq n} a_k = \begin{cases} -(1+\frac{1}{n+1}), & n \text{ gerade}, \\ -(1+\frac{1}{n}), & n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

woraus wir sehen, dass

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1, \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = -1.$$

c) Die Folge $(a_n)_n = (n)_n$ ist nach unten beschränkt, aber $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert nicht. Es ist nämlich $c_n := \inf\limits_{k\geq n} a_k = \inf\limits_{k\geq n} k = n$, also ist $(c_n)_n$ divergent.

Bemerkung. Die Folgen (b_n) und (c_n) aus (3.8) sind im Allgemeinen keine Teilfolgen von $(a_n)_n$. ZB. ist in Beispiel b) die Folge $(b_n)_n = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \ldots)$ offensichtlich keine Teilfolge von $(a_n)_n$.

Bemerkung. Es sei $(a_n)_n$ eine beschränkte reelle Folge. Wir setzen $a := \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b := \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass

$$a - \varepsilon \leq a_n \leq b + \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon.$$

Beweis: Übungsblatt.
D.h. es gibt nur endlich viele Folgenglieder die kleiner als $a - \varepsilon$ oder größer als $b + \varepsilon$ sind. Wie man in Beispiel b) oben sieht, kann auf das $\varepsilon > 0$ nicht verzichtet werden.

Satz 3.25 (Bolzano-Weierstraß I). *Jede beschränkte reelle Folge $(a_n)_n$ besitzt einen kleinsten Häufungspunkt $a_* \in \mathbb{R}$ und einen größten Häufungspunkt $a^* \in \mathbb{R}$. Es gilt*

$$a_* = \liminf_{n\to\infty} a_n, \quad \textit{und} \quad a^* = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Beweis. Da $(a_n)_n$ beschränkt ist, existiert $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n =: a^*$. Wir zeigen, dass a^* größter Häufungspunkt von $(a_n)_n$ ist. Dazu zeigen wir zunächst, dass kein größerer Häufungspunkt als a^* existieren kann.
Sei $b \in \mathbb{R}$ mit $b > a^* = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$. Nach Satz 2.14 (ii) existiert ein b_n mit $a^* \leq b_n < b$. Da $b_n = \sup\limits_{k\geq n} a_k$ ist, folgt hieraus, dass

$$a_k \leq b_n < b \qquad \text{für alle } k \geq n,$$

somit ist $b - a_k \geq b - b_n > 0$ für alle $k \geq n$, d.h. b kann kein Häufungspunkt von $(a_n)_n$ sein.
Es bleibt zu zeigen, dass a^* ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$ ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $a^* = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ ist, gilt

$$a^* - \varepsilon < a^* \leq b_n = \sup_{k\geq n} a_k \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert somit nach Satz 2.14 (i) ein $k \geq n$ mit $a^* - \varepsilon < a_k$. Nach der Bemerkung vor Satz 3.25 wissen wir außerdem, dass nur endlich viele Folgenglieder größer $a^* + \varepsilon$ sind. Also muss das Intervall $(a^* - \varepsilon, a^* + \varepsilon)$ unendlich viele Folgenglieder a_k enthalten, d.h. a^* ist Häufungspunkt von $(a_n)_n$.
Analog zeigt man, dass a_* kleinster Häufungspunkt von $(a_n)_n$ ist. $\square$

Satz 3.26 (Bolzano-Weierstraß II). *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei $(a_n)_n$ beschränkte Folge.
(i) Ist $(a_n)_n$ reell, so folgt die Behauptung aus Satz 3.25 und Satz 3.17.
(ii) Sei nun $(a_n)_n$ komplex. Wir identifizieren $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, und betrachten anstelle der Folge $(a_n)_n = (x_n + iy_n)_n$ die beide reellen Folgen $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ des Real- und Imaginärteils der Folge. Da $|x_n| = |\operatorname{Re} a_n| \leq |a_n|$, und $|y_n| = |\operatorname{Im} a_n| \leq |a_n|$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, sind auch $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ beschränkte Folgen. D.h. nach Teil (i) existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ von $(x_n)_n$, die gegen ein $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, also

$$x_{n_k} \to x, \qquad k \to \infty.$$

Da $(y_n)_n$ beschränkt ist, ist auch die Teilfolge $(y_{n_k})_k$ beschränkt. Wir wenden Teil (i) auf die Folge $(y_{n_k})_k$ an und erhalten die Existenz einer Teilfolge $(y_{n_{k_j}})_j$ von $(y_{n_k})_k$, die gegen ein $y \in \mathbb{R}$ konvergiert, also

$$y_{n_{k_j}} \to y, \qquad j \to \infty.$$

Wegen Lemma 3.15 gilt aber auch $x_{n_{k_j}} \to x$ für $j \to \infty$. Somit folgt aus Satz 3.13, dass die Teilfolge $(a_{n_{k_j}})_j$ von $(a_n)_n$ konvergiert mit

$$a_{n_{k_j}} \to a = x + iy, \qquad j \to \infty,$$

und somit die Behauptung. □

Beispiel. Wir betrachten die Folge

$$(a_n)_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{7}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{9}{5}, \dots\right)$$

mit $a_n = \frac{j}{k+1}$ für $n = k^2 + j$, für $j \in \{1, 2, \dots, 2k+1\}$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Hier ist $a_* = 0$, $a^* = 2$. Jedes $r \in \mathbb{Q}$ mit $r \in (0,2)$ kommt unendlich oft vor. Jedes $a \in \mathbb{R}$ mit $a \in [0,2]$ ist Häufungspunkt der Folge.

Korollar 3.27. *Es sei $(a_n)_n$ eine beschränkte Folge.*

(i) Es sind äquivalent:

(1) $(a_n)_n$ ist konvergent.
(2) $(a_n)_n$ besitzt genau einen Häufungspunkt $a \in \mathbb{C}$.

In diesem Fall ist $\lim\limits_{n\to\infty} = a$.

(ii) Es sei $(a_n)_n$ reell. Dann sind (1) und (2) äquivalent zu

(3) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

In diesem Fall ist $a = \lim\limits_{n\to\infty} = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Beweis. (i) (1) $\Rightarrow$ (2) folgt aus Korollar 3.20.
(2) $\Rightarrow$ (1): Angenommen, $(a_n)_n$ konvergiert nicht gegen a. Dann existiert (nach Definition der Konvergenz) ein $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $N \in \mathbb{N}$ ein Index $n_N \geq N$ existiert mit

$$|a_{n_N} - a| > \varepsilon.$$

Im Allgemeinen sind jedoch die Indizes n_N nicht strikt wachsend. Deswegen setzen wir $N_1 := 1$ und definieren rekursiv

$$N_{k+1} := n_{N_k} + 1 \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt $n_{N_{k+1}} \geq N_{k+1} = n_{N_k} + 1$, also ist $(n_{N_k})_k$ strikt wachsend. Wir setzen abkürzend $n_k := n_{N_k}$. Für die Teilfolge $(a_{n_k})_k$ von $(a_n)_n$ gilt nun nach Konstruktion

$$|a_{n_k} - a| > \varepsilon \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Da $(a_{n_k})_k$ beschränkt ist, existiert nach Satz 3.26 eine Teilfolge $(a_{n_{k_j}})_j$, die gegen ein $b \in \mathbb{R}$ konvergiert, d.h. $a_{n_{k_j}} \to b$ für $j \to \infty$. Nach Satz 3.17 ist b Häufungspunkt von $(a_n)_n$. Nach Voraussetzung ist aber a einziger Häufungspunkt, also muss $a = b$ gelten. Widerspruch zu (3.9).
(ii) folgt direkt aus Satz 3.25. $\square$

Beispiel. Wir betrachten die Folge $(a_n)_n$ gegeben durch

$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{ ungerade}, \\ 1, & n \text{ gerade}. \end{cases}$$

$(a_n)_n$ besitzt genau einen Häufungspunkt, ist aber divergent. Korollar 3.20 ist nicht anwendbar, da $(a_n)_n$ nicht beschränkt ist.

Vollständigkeit und Cauchyfolgen

Definition 3.28. Eine Folge $(a_n)_n$ heißt *Cauchyfolge*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|a_n - a_m| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq N. \tag{3.10}$$

Satz 3.29 (Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$). *Es sei $(a_n)_n$ eine reelle bzw. komplexe Folge. Dann ist $(a_n)_n$ genau dann konvergent, wenn $(a_n)_n$ eine Cauchyfolge ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Es sei $(a_n)_n$ konvergent mit Grenzwert $a \in \mathbb{C}$. Dann existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N_\varepsilon$. Somit gilt auch

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für alle $m, n \geq N_\varepsilon$, also ist $(a_n)_n$ Cauchyfolge.
„$\Leftarrow$“ Es sei $(a_n)_n$ eine Cauchyfolge. Dann ist $(a_n)_n$ beschränkt, da nach (3.10) zu $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|a_n - a_N| \leq 1 \qquad \text{für alle } n \geq N,$$

und somit $|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| \leq 1 + |a_N|$ für alle $n \geq N$. Folglich ist

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 3.26 besitzt also $(a_n)_n$ eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_k$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach (3.10) ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|a_n - a_m| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } n, m \geq N.$$

Außerdem existiert wegen der Konvergenz der Teilfolge ein $K \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{n_k} - a| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } k \geq K.$$

Setzt man $M := \max\{N, K\}$, so gilt

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_M}| + |a_{n_M} - a| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

für alle $n \geq M$, also konvergiert $(a_n)_n$ gegen a. $\square$

Bemerkung. (Vgl. Übung). Betrachtet man die rekursiv definierte Folge $(a_n)_n$

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n}),$$

mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$, so ist $(a_n)_n$ Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$, aber $(a_n)_n$ konvergiert nicht in $\mathbb{Q}$. Wir sagen: „$\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig. “

KAPITEL 4

Reihen

Wir wollen einen Spezialfall von Folgen, sogenannte Reihen noch genauer untersuchen. Aufgrund der besonderen Struktur der Reihen stehen uns hier einige weitere Kriterien zur Untersuchung der Konvergenz zur Verfügung. Wir werden Reihen später verwenden, um elementare Funktionen wie z.B. die Exponentialfunktion oder trigonometrische Funktionen zu definieren.

4.1. Definition von Reihen

DEFINITION 4.1. Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ setzen wir

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

s_n heißt *n-te Partialsumme*, und die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt *Reihe*.
Notation: Anstelle von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ schreiben wir auch $\sum a_k$, $\sum\limits_k a_k$ oder $\sum\limits_{k\geq 0} a_k$.
a_k heißt *k-ter Summand* der Reihe $\sum\limits_k a_k$. Die Reihe $\sum\limits_k a_k$ heißt *konvergent*, falls die Folge $(s_n)_n$ ihrer Partialsummen konvergiert. In diesem Fall heißt der Grenzwert von $(s_n)_n$ der *Wert der Reihe* (oder der Grenzwert der Reihe).
Notation:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Die Reihe $\sum\limits_k a_k$ heißt *divergent*, falls die Folge $(s_n)_n$ der Partialsummen divergiert.

BEMERKUNG. Eine Reihe ist die Folge ihrer Partialsummen.

BEISPIEL. (a) Wir betrachten die Folge der Summanden $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} = (\frac{1}{k!})_{k\in\mathbb{N}_0}$ und für $n \in \mathbb{N}_0$ die zugehörigen Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

In Beispiel 3.23 haben wir gesehen, dass $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e$ gilt. D.h. die Reihe $\sum_k \frac{1}{k!}$ konvergiert mit Reihenwert

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=e.$$

(b) Die Reihe $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}$ konvergiert.

Beweis: Wir setzen $s_n := \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ für $n\in\mathbb{N}_0$ und zeigen, dass die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Dazu wenden wir das Monotoniekriterium an (Satz 3.22). Da $a_k=\frac{1}{k^2}\geq 0$ ist, gilt

$$s_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2}=s_n+\frac{1}{(n+1)^2}>s_n,$$

also ist $(s_n)_n$ monoton wachsend. Außerdem ist $(s_n)_n$ nach oben beschränkt, da

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leq 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\cdot(k-1)},$$

und letzteres eine Teleskopsumme ist, da

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\cdot(k-1)}&=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\&=1-\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Somit ist $s_n\leq 1+(1-\frac{1}{n})<2$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Nach Satz 3.22 folgt die Konvergenz von $(s_n)_n$, d.h. $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}$ konvergiert.

Zusatz: (Hier ohne Beweis.) Der Reihenwert ist

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Satz 4.2. *Ist die Reihe $\sum_{k\geq 0}a_k$ konvergent, so ist die Folge der Summanden $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge.*

Beweis. Es sei $\sum\limits_{k\geq 0} a_k$ konvergent. Dann ist nach Definition $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent, also nach Satz 3.29 eine Cauchyfolge. Zu $\varepsilon > 0$ existiert somit ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|s_n - s_{n-1}| \leq \varepsilon$ ist für alle $n \geq N$, woraus

$$|a_n| = |\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k| = |s_n - s_{n-1}| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N$$

folgt. D.h. $(a_n)_n$ ist eine Nullfolge. □

Beispiel. (c) (Harmonische Reihe) Die harmonische Reihe $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ ist divergent.

Idee: Wir schreiben

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq\frac{1}{2}} + \dots$$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir

$$|s_{2n} - s_n| = |\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

also ist $(s_n)_n$ keine Cauchyfolge und somit nach Satz 3.29 nicht konvergent.

Bemerkung. Das Beispiel der harmonischen Reihe zeigt, dass die für die Konvergenz notwendige Bedingung, dass $(a_k)_k$ eine Nullfolge ist, nicht hinreichend ist.

Beispiel. (d) (Geometrische Reihe) Es sei $q \in \mathbb{C}$. Ist $|q| < 1$, so konvergiert die geometrische Reihe $\sum\limits_{k\geq 0} q^k$ mit Reihenwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \qquad |q| < 1. \tag{4.1}$$

Ist $|q| \geq 1$, so ist $\sum\limits_{k\geq 0} q^k$ divergent.

Beweis: Ist $|q| \geq 1$, so ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} = (q^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ keine Nullfolge, da $|a_k| = |q^k| = |q|^k \geq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Also divergiert $\sum\limits_{k\geq 0} q^k$ nach Satz 4.2.

Es sei nun $|q| < 1$. Nach Satz 1.2 ist

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Da $|q| < 1$ ist, gilt aber $q^{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$ (vgl. Übungsblatt 5). Somit gilt $s_n \to \frac{1}{1-q}$ für $n \to \infty$.

Aus den Rechenregeln für Folgen erhalten wir direkt

Satz 4.3. *Es seien* $\sum_{k\geq 0} a_k$ *und* $\sum_{k\geq 0} b_k$ *konvergente Reihen.*

(i) Die Reihe $\sum_{k\geq 0}(a_k+b_k)$ *konvergiert mit Reihenwert*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k+\sum_{k=0}^{\infty}b_k.$$

(ii) Es sei $\lambda\in\mathbb{C}$*. Die Reihe* $\sum_{k\geq 0}(\lambda a_k)$ *konvergiert mit Reihenwert*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k)=\lambda\big(\sum_{k=0}^{\infty}a_k\big).$$

Beweis. Setze $s_n:=\sum_{k=0}^{n}a_k$ und $t_n:=\sum_{k=0}^{n}b_k$ für $n\in\mathbb{N}_0$. Nach Voraussetzung sind $(s_n)_n$ und $(t_n)_n$ konvergent, also existieren $s,t\in\mathbb{R}$ mit $s_n\to s$ und $t_n\to t$ für $n\to\infty$. Aus Satz 3.6 erhalten wir, dass $(s_n+t_n)_n$ und $(\lambda s_n)_n$ konvergent sind mit

$$\lim_{n\to\infty}(s_n+t_n)=s+t=\sum_{k=0}^{\infty}a_k+\sum_{k=0}^{\infty}b_k,$$

und

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda s_n)=\lambda s=\lambda\sum_{k=0}^{\infty}a_k.$$

□

4.2. Konvergenzkriterien

Wir übertragen zwei Konvergenzkriterien für Folgen auf Reihen. Aus dem Monotoniekriterium erhalten wir für Reihen mit positiven Summanden folgende Aussage.

Satz 4.4. *Es sei* $\sum_{k\geq 0}a_k$ *eine Reihe mit* $a_k\geq 0$ *für alle* $k\in\mathbb{N}_0$*. Dann ist* $\sum_{k\geq 0}a_k$ *genau dann konvergent, wenn* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *beschränkt ist. In diesem Fall gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\sup_{n\in\mathbb{N}_0}s_n.$$

Beweis. Da $a_k\geq 0$ ist für alle $k\in\mathbb{N}_0$, gilt

$$s_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}a_k+a_{n+1}\geq\sum_{k=0}^{n}a_k=s_n,$$

also ist $(s_n)_n$ monoton wachsend und beschränkt (nach Voraussetzung). Satz 3.22 liefert nun die Behauptung, mit $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} s_n$. Ist $(s_n)_n$ unbeschränkt, so kann nach Satz 3.5 $(s_n)_n$ nicht konvergieren. □

Aus dem Cauchykriterium für Folgen (Satz 3.29) erhalten wir

Satz 4.5 (Cauchykriterium). *Es sei* $\sum\limits_{k\geq 0} a_k$ *eine Reihe. Es sind äquivalent:*

(1) $\sum\limits_{k\geq 0} a_k$ *ist konvergent.*
(2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *mit*

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\Big| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } m > n \geq N_\varepsilon.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 3.29 angewandt auf $(s_n)_n$, da für $m > n$ gilt

$$|s_m - s_n| = \Big|\sum_{k=0}^{m} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k\Big| = \Big|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\Big|.$$

□

Wir betrachten einen weiteren Spezialfall von Reihen, sogenannte *alternierende Reihen*, d.h. Reihen mit Summanden mit wechselndem Vorzeichen. Diese lassen sich in der Form $\sum\limits_{k\geq 0}(-1)^k a_k$ mit $a_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, darstellen.

Beispiel. (e) Die Reihe $\sum\limits_{k\geq 1}(-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ ist divergent, da für $n \in \mathbb{N}$

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1 = 0,$$

und

$$s_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1 + 1 = 1$$

gilt, also $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent ist.

Satz 4.6 (Leibniz-Kriterium). *Es sei* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ *eine monoton fallende Nullfolge mit* $a_k \geq 0$ *für alle* $k \in \mathbb{N}_0$*. Dann konvergiert die alternierende Reihe* $\sum\limits_{k\geq 0}(-1)^k a_k$*.*

Beweis. Wir betrachten die Folgen der Partialsummen $(s_{2n})_n$ und $(s_{2n+1})_n$ separat. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$s_{2n+2} - s_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0,$$

da $(a_k)_k$ als monoton fallend vorausgesetzt ist. Analog sieht man ein, dass

$$s_{2n+3} - s_{2n+1} = -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geq 0$$

ist. D.h. $(s_{2n})_n$ ist monoton fallend und $(s_{2n+1})_n$ monoton wachsend. Außerdem gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \leq s_{2n}$, somit ist wegen der Monotonie der Folgen

$$s_{2n+1} \leq s_{2n} \leq s_0, \quad \text{und} \quad s_1 \leq s_{2n+1} \leq s_{2n}.$$

Die Folgen $(s_{2n})_n$ und $(s_{2n+1})_n$ sind also nach unten bzw. oben beschränkt. Nach Satz 3.22 existieren somit $s, t \in \mathbb{R}$ mit $s_{2n} \to s$ für $n \to \infty$, und $s_{2n+1} \to t$ für $n \to \infty$. Nun ist aber

$$s - t = \lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n} - s_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0,$$

da $(a_k)_k$ als Nullfolge vorausgesetzt war. Wir zeigen noch, dass $(s_n)_n$ konvergiert mit $s_n \to s$ für $n \to \infty$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $(s_{2n})_n$ und $(s_{2n+1})_n$ gegen s konvergieren, existieren $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\begin{aligned} |s_{2n} - s| &\leq \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N_1, \\ |s_{2n+1} - s| &\leq \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N_2, \end{aligned}$$

also $|s_n - s| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq \max(N_1, N_2)$. □

Beispiel. (f) (Alternierende harmonische Reihe) Die Reihe $\sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, da $(\frac{1}{k})_k$ monoton fallend ist mit $\frac{1}{k} \to 0$ für $k \to \infty$.
Zusatz: (Beweis später.) Der Reihenwert ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \log 2 \simeq 0,69314\ldots.$$

4.3. Absolute Konvergenz

Definition 4.7. Eine Reihe $\sum_k a_k$ heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe $\sum_k |a_k|$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Beispiel. Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent (vgl. Beispiel (c)).
Die geometrische Reihe $\sum_{k\geq 0} q^k$ ist für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ absolut konvergent, ansonsten divergent.

LEMMA 4.8. *Jede absolut konvergente Reihe konvergiert.*

BEWEIS. Es sei $\sum_k a_k$ eine absolut konvergente Reihe. Dann konvergiert $\sum_k |a_k|$, und nach Satz 4.5 (Cauchykriterium) existiert zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } m > n \geq N_\varepsilon.$$

Hieraus folgt aber mit der Dreiecksungleichung

$$|\sum_{k=n+1}^{m} a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } m > n \geq N_\varepsilon, \tag{4.2}$$

also nach der umgekehrten Implikation in Satz 4.5 die Konvergenz von $\sum_k a_k$. □

BEMERKUNG. Ist die Reihe $\sum_k a_k$ absolut konvergent, so gilt für den Reihenwert

$$\Big|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|. \tag{4.3}$$

BEWEIS. . □

Zur Untersuchung der absoluten Konvergenz gibt es einige sehr nützliche Kriterien, die wir uns im Folgenden anschauen wollen. Besprochen werden hier das Majorantenkriterium und das Minorantenkriterium (letzteres zum Beweis der Divergenz), sowie das Wurzel- und das Quotientenkriterium.

SATZ 4.9 (Majorantenkriterium). *Es sei $\sum_k a_k$ eine Reihe in $\mathbb{C}$, und $\sum_k c_k$ eine Reihe in $\mathbb{R}$. Ist $\sum_k c_k$ konvergent und existiert ein $K \in \mathbb{N}$ mit*

$$0 \leq |a_k| \leq c_k \qquad \textit{für alle } k \geq K,$$

so ist $\sum_k a_k$ absolut konvergent.

BEMERKUNG. Die Reihe $\sum_k c_k$ heißt *Majorante* für $\sum_k a_k$.

Beweis. Nach Voraussetzung konvergiert $\sum_k c_k$. Nach Satz 4.5 ist dies äquivalent zu folgender Aussage: Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\sum_{k=n+1}^{m} c_k \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } m > n \geq N.$$

Für $M = \max(N, K)$ folgt nach Voraussetzung

$$\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{m} c_k \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } m > n \geq M.$$

Dies ist wiederum nach Satz 4.5 äquivalent zur Konvergenz von $\sum_k |a_k|$, also der absoluten Konvergenz von $\sum_k a_k$. □

Das Gegenstück zum Majorantenkriterium ist das folgende Minorantenkriterium:

Satz 4.10 (Minorantenkriterium für Divergenz). *Es seien $\sum_k a_k$ und $\sum_k c_k$ Reihen in $\mathbb{R}$. Ist $\sum_k c_k$ divergent und existiert ein $K \in \mathbb{N}$ mit*

$$0 \leq c_k \leq a_k \qquad \textit{für alle } k \geq K,$$

so ist auch $\sum_k a_k$ divergent.

Beweis. Es sei ohne Einschränkung $K = 0$. Wir setzen $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$, und $t_n := \sum_{k=0}^{n} c_k$. Da $\sum_k c_k$ divergiert und $c_k \geq 0$ ist, ist $(t_n)_n$ nach Satz 4.4 unbeschränkt. Außerdem ist nach Voraussetzung

$$0 \leq t_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \leq \sum_{k=0}^{n} a_k = s_n,$$

somit ist auch $(s_n)_n$ unbeschränkt. Wiederum nach Satz 4.4 folgt die Divergenz von $\sum_k a_k$. □

Beispiel. (g) (i) Es sei $p \in \mathbb{Q}$ mit $p \geq 2$. Die Reihe $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^p}$ konvergiert.

Beweis: Für $p \geq 2$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $k^p \geq k^2$, also ist $0 \leq \frac{1}{k^p} \leq \frac{1}{k^2}$. Da $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ konvergiert nach Beispiel (b), folgt die Behauptung nach dem Majorantenkriterium.

(g) (ii) Sei $p \in \mathbb{Q}$ mit $0 < p \leq 1$. Die Reihe $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^p}$ divergiert.

Beweis: Dies folgt aus dem Minorantenkriterium, da die Reihe $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ divergiert, und $0 \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k^p}$ ist für $k \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1]$.

(g) (iii) Sei $p \in \mathbb{Q}$ mit $1 < p < 2$. Die Reihe $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^p}$ konvergiert.

Beweis: Übung.

Satz 4.11 (Wurzelkriterium). *Es sei* $\displaystyle\sum_k a_k$ *eine Reihe in* $\mathbb{C}$. *Setze*

$$q := \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Dann gilt

(i) $\displaystyle\sum_k a_k$ *konvergiert absolut, falls* $q < 1$*;*

(ii) $\displaystyle\sum_k a_k$ *divergiert, falls* $q > 1$.

Ist $q = 1$, *so kann* $\displaystyle\sum_k a_k$ *konvergent oder divergent sein.*

Beweis. (i) Da $q < 1$ ist, existiert ein $t \in \mathbb{R}$ mit $q < t < 1$. Nach Satz 3.25 ist q größter Häufungspunkt der Folge $(\sqrt[k]{|a_k|})_k$, somit existiert ein $K \in \mathbb{N}$ so, dass $\sqrt[k]{|a_k|} \leq t$ ist für alle $k \geq K$ (vgl. Bemerkung vor Satz 3.25). Also ist $|a_k| \leq t^k$ für alle $k \geq K$. Da $0 < t < 1$, konvergiert die geometrische Reihe $\displaystyle\sum_{k\geq 0} t^k$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert somit die Reihe $\displaystyle\sum_k a_k$ absolut.

(ii) Sei nun $q > 1$. Da q größter Häufungspunkt von $(\sqrt[k]{|a_k|})_k$ ist, existieren unendlich viele Indizes $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq \sqrt[k]{|a_k|}$, also $1 \leq |a_k|$. D.h. $(a_k)_k$ kann keine Nullfolge sein. Nach Satz 4.2 ist $\displaystyle\sum_k a_k$ divergent.

(iii) Zum Beweis der letzten Aussage genügt ein Beispiel: Für die alternierende harmonische Reihe $\displaystyle\sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ gilt $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \to 1$ für $k \to \infty$, also ist $q = 1$. Die Reihe $\displaystyle\sum_k a_k$ ist konvergent, die Reihe $\displaystyle\sum_k |a_k|$ ist divergent. □

Bemerkung. Es genügt *nicht* zu zeigen, dass $\sqrt[k]{|a_k|} < 1$ ist für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beispiel: Die harmonische Reihe ist divergent, jedoch gilt $\sqrt[k]{\frac{1}{k}} < 1$ für alle $k \geq 2$.

Satz 4.12 (Quotientenkriterium). *Es sei* $\sum_{k\geq 0} a_k$ *eine Reihe in* $\mathbb{C}$ *mit* $a_k \neq 0$ *für alle* $k \in \mathbb{N}_0$. *Dann gilt*

(i) $\sum_{k\geq 0} a_k$ *konvergiert absolut, falls ein* $q \in (0,1)$ *und ein* $K \in \mathbb{N}_0$ *existiert mit*

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q \qquad \text{für alle } k \geq K.$$

(ii) $\sum_{k\geq 0} a_k$ *divergiert, falls ein* $K \in \mathbb{N}$ *existiert mit*

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1 \qquad \text{für alle } k \geq K.$$

Beweis. (i) Nach Voraussetzung ist $|a_{k+1}| \leq q|a_k|$ für alle $k \geq K$. Induktiv erhalten wir

$$|a_k| \leq q^{k-K}|a_K| = \frac{|a_K|}{q^K} q^k \qquad \text{für alle } k \geq K.$$

Wir setzen $c := \frac{|a_K|}{q^K}$. Dann ist $c\sum_{k\geq 0} q^k$ Majorante für $\sum_{k\geq 0} a_k$. Da $q < 1$ ist, konvergiert die geometrische Reihe $c\sum_{k\geq 0} q^k$. Die Behauptung folgt aus Satz 4.9.

(ii) Aus der Bedingung folgt $|a_k| \geq |a_K| > 0$ für alle $k \geq K$, also ist $(a_k)_k$ keine Nullfolge und somit $\sum_{k\geq 0} a_k$ divergent nach Satz 4.2. $\square$

Beispiel. (h) Die Reihe $\sum_{k\geq 1} k^2 2^{-k}$ konvergiert absolut.

Beweis: Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)^2}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k^2} = (1+\frac{1}{k})^2 \cdot \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}, \qquad k \to \infty,$$

also existiert ein $K \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq \frac{3}{4} =: q < 1 \qquad \text{für alle } k \geq K.$$

Die Behauptung folgt aus Satz 4.12.

4.4. Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$

Als Anwendung der bisher entwickelten Theorie zu Reihen wollen wir zeigen, dass die Menge der reellen Zahlen *überabzählbar* sind, d.h. dass keine Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ existiert. Dazu verwenden wir die Dezimaldarstellung reeller Zahlen, die wir uns zunächst herleiten.

DEFINITION UND LEMMA 4.13. *Für $x \in \mathbb{R}$ setzen wir*

$$[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} \,:\, k \leq x\}$$

als die größte ganze Zahl kleiner gleich x. Die Abbildung $[\,.\,] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto [x]$, ist wohldefiniert und wird als Gaußklammer *bezeichnet.*

BEWEIS. Die Wohldefiniertheit von $[\,.\,]$ folgt aus dem Wohlordnungsprinzip Satz 3.19. □

Dezimaldarstellung reeller Zahlen

Vorüberlegung: 1) Ist $m \in \mathbb{N}$, so existiert eine eindeutige Darstellung

$$m = \sum_{j=0}^{l} y_j \cdot 10^j$$

für ein $l \in \mathbb{N}_0$ und $y_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $0 \leq j \leq l$, mit $y_l \neq 0$.

2) Für $x_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $k \in \mathbb{N}$, und $n \in \mathbb{N}$ gilt unter Verwendung von (4.1)

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot 10^{-k} \leq 9 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} = 9(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1) = 1.$$

Nach dem Majorantenkriterium konvergiert somit $\sum\limits_{k \geq 1} x_k 10^{-k}$ mit Grenzwert $x \in [0, 1]$.

3) Die Dezimaldarstellung wird im Allgemeinen nicht eindeutig sein, da z.B.

$$3,99999\ldots := 3 + \sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = 3 + \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k} = 3 + \frac{9}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 4.$$

Konstruktion: Es sei $x \in \mathbb{R}$. Ohne Einschränkung sei $x \geq 0$. Dann existiert ein $r \in [0, 1)$ mit $x = [x] + r$. Es genügt also, $x \in [0, 1)$ zu betrachten. Wir definieren rekursiv

$$\begin{aligned} x_1 &:= [10 \cdot x], \\ x_k &:= [10^k \cdot (x - \sum_{j=1}^{k-1} x_j \cdot 10^{-j})], \quad k \geq 2, \end{aligned}$$

und definieren

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot 10^{-k} =: 0, x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \ldots \tag{4.4}$$

als die *Dezimaldarstellung* von x.

SATZ 4.14. *Jedes $x \in \mathbb{R}$ besitzt eine Dezimaldarstellung. Diese ist eindeutig, wenn Entwicklungen ausgeschlossen sind, bei denen $x_k = 9$ ist für alle bis auf endlich viele $k \in \mathbb{N}$.*

BEWEIS. Siehe [**1**, Theorem II.7.11]. □

Abzählbarkeit

Zur Erinnerung: Wir bezeichnen zwei nichtleere Mengen X, Y als *gleichmächtig*, falls eine Bijektion $f : X \to Y$ existiert (vgl. Definition 3.18).

Definition 4.15. Es sei X eine nichtleere Menge. X heißt *abzählbar*, falls X endlich ist oder X und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind. Andernfalls heißt X *überabzählbar*. Sind X und $\mathbb{N}$ gleichmächtig, so heißt X *abzählbar unendlich*.

Beispiel. 1) $2\mathbb{N} = \{2n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ ist abzählbar.

2) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar: Die Abzählung $(0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots)$ lässt sich mit Hilfe der Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \qquad n \mapsto \begin{cases} -\frac{n-1}{2}, & n \text{ ungerade,} \\ \frac{n}{2}, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

realisieren. Aus der Definition lässt sich ablesen, dass f injektiv ist. Um zu zeigen, dass f surjektiv ist, wählen wir $m \in \mathbb{Z}$. Ist $m > 0$, so ist $m = f(2m)$, und im Fall $m \leq 0$ ist $m = f(-(2m-1))$. D.h. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ist bijektiv.

3) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar: Wir beschränken uns zunächst auf $\mathbb{Q}_+$ und verwenden ein Diagonalverfahren nach Cantor (Skizze siehe Vorlesung). Hiermit erhält man als Abzählung von $\mathbb{Q}_+$

$$(f(1), f(1), f(3), \ldots) = (0, 1, \frac{1}{2}, 2, 3, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \ldots).$$

Durch Einfügen negativer Zaheln erhalten wir eine Abzählung von $\mathbb{Q}$

$$\begin{aligned}&(f(1), f(2), f(3), \ldots) \\ &= (0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, -2, 3, -3, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots).\end{aligned}$$

4) $(0, 1)$ und $\mathbb{R}$ sind überabzählbar: Zunächst ist klar, dass $(0, 1)$ unendlich ist, da z.B. $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\} \subseteq (0, 1)$ ist. Wir nehmen an, dass $(0, 1)$ abzählbar unendlich ist. Dann existiert eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to (0, 1)$. Wir setzen $x_n := f(n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 4.14 besitzt x_n eine eindeutige Dezimaldarstellung

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k} = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \ldots.$$

mit $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ für $k \in \mathbb{N}$. Wir wollen nun eine weitere Zahl $y \in (0, 1)$ finden, die nicht in $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ enthalten ist. Bezeichnet a_n die n-te Ziffer von x_n, so setzen wir

$$b_n := \begin{cases} 2, & a_n < 2, \\ 1, & a_n \geq 2, \end{cases}$$

sowie $y := 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots \in (0, 1)$. Dann ist nach Konstruktion $y \neq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da y und x_n sich mindestens in der n-ten Ziffer unterscheiden. Widerspruch zur Annahme,

dass $f : \mathbb{N} \to (0,1)$ eine Bijektion ist.
Für die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ genügt es einzusehen, dass die Abbildung

$$g : \mathbb{R} \to (0,1), \quad g(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{1+2|x|},$$

eine Bijektion ist.

4.5. Umordnung von Reihen

Wir wollen der Frage nachgehen, ob man bei Reihen die Anordnung der Summanden beliebig vertauschen kann.

Definition 4.16. Es sei $\sum\limits_{k\geq 0} a_k$ eine Reihe in $\mathbb{C}$ und $\sigma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine bijektive Abbildung. Wir setzen $b_k := a_{\sigma(k)}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Die Reihe $\sum\limits_{k\geq 0} b_k$ heißt *Umordnung* von $\sum_{k\geq 0} a_k$.

Beispiel. Wir betrachten die alternierende harmonische Reihe $\sum\limits_{k\geq 1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$. Wir haben gesehen, dass diese konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. Aus dem Beweis des Leibniz-Kriteriums Satz 4.6 lässt sich leicht ablesen, dass für den Reihenwert $s := \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ die Abschätzung $s_2 < s < s_3$ gelten muss, also $\frac{1}{2} < s < \frac{5}{6}$. Wir betrachten nun anstelle von

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

die Umordnung

$$(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}) + \dots.$$

Formal lässt sich diese Umordnung so darstellen: Wir definieren $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$\sigma(k) = \begin{cases} k + \frac{k-1}{3}, & 3|(k-1), \\ k + \frac{k+1}{3}, & 3|(k-2), \\ k - \frac{k}{3}, & 3|k. \end{cases}$$

Die Reihe $\sum\limits_{k\geq 1} a_{\sigma(k)}$ ist eine Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe mit

$$\sigma(3k-2) = 4k-3, \quad \sigma(3k-1) = 4k-1, \quad \sigma(3k) = 2k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Wir setzen $t_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}$. Dann ist

$$t_{3n} = \sum_{k=1}^{3n}\left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}\right) > (1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}) + \sum_{k=2}^{3n}\left(\frac{1}{4k} + \frac{1}{4k} - \frac{1}{2k}\right) = \frac{5}{6}.$$

Wegen $0 < \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} < \frac{1}{4}\frac{1}{k(k-1)}$ für alle $k \geq 2$ ist $(t_{3n})_n$ konvergent nach dem Majorantenkriterium, da $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k(k-1)}$ konvergiert (vergleiche Beispiel (b)). Außerdem ist

$$\lim_{n\to\infty} |t_{3n+1} - t_{3n}| = \lim_{n\to\infty} |t_{3n+2} - t_{3n}| = 0. \tag{4.5}$$

Somit ist $(t_n)_n$ eine Cauchyfolge (Übung; um dies einzusehen, zerlegt man für $m, n \in \mathbb{N}$ z.B.

$$|t_{3n+1} - t_{3m+2}| \leq |t_{3n+1} - t_{3n}| + |t_{3n} - t_{3m}| + |t_{3m} - t_{3m+2}|$$

und verwendet im ersten und dritten Teil (4.5) und im zweiten Teil die Konvergenz von $(t_{3n})_n$). Nach Satz 3.29 konvergiert $(t_n)_n$, d.h. die Umordnung $\displaystyle\sum_{k\geq 1} a_{\sigma(k)}$ konvergiert mit Reihenwert $t > \frac{5}{6} > s$.

Bemerkung. Es existiert auch eine Umordnung von $\displaystyle\sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1}\frac{1}{k}$, die divergiert.

Bemerkung. Existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\sigma(k) = k$ gilt für alle $k \geq N$, so besitzt die Umordnung $\sum_{k\geq 0} a_{\sigma(k)}$ dasselbe Konvergenzverhalten wie $\displaystyle\sum_{k\geq 0} a_k$.
Im Allgemeinen ist dies falsch, wie obiges Beispiel zeigt!

Wir wollen zeigen, dass absolut konvergente Reihen umgeordnet werden können, ohne dass sich das Konvergenzverhalten oder der Reihenwert ändert.

Satz 4.17. *Es sei* $\displaystyle\sum_{k\geq 0} a_k$ *eine absolut konvergente Reihe, und* $\displaystyle\sum_{k\geq 0} b_k$ *eine Umordnung derselben. Dann ist auch* $\displaystyle\sum_{k\geq 0} b_k$ *absolut konvergent, und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Beweis. Wir bezeichnen mit s_n und t_n die n-ten Partialsummen, d.h. $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ und $t_n := \sum_{k=0}^{n} b_k$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach Satz 4.5 ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=N+1}^{m} |a_k| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } m > N. \tag{4.6}$$

Es bezeichne $\sigma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ die zur Umordnung gehörende Abbildung mit $b_k = a_{\sigma(k)}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Setzt man $M := \max\{\sigma^{-1}(0), \sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(N)\}$, dann gilt $\{0, \ldots, N\} \subseteq \{\sigma(0), \ldots, \sigma(M)\}$. Aus (4.6) folgt nach Wahl von M, dass

$$\sum_{k=M+1}^{l} |a_{\sigma(k)}| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } l > M.$$

Hieraus folgt nach Satz 4.5 die absolute Konvergenz der Reihe. Für den Reihenwert gilt nun für alle $l > M$ wiederum nach Wahl von M und (4.6)

$$|t_l - s_l| = |\sum_{k=0}^{l} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{l} a_k| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon.$$

D.h. $(t_l - s_l)_l$ ist eine Nullfolge. Da $(t_l)_l$ und $(s_l)_l$ konvergieren, erhalten wir $\lim\limits_{l\to\infty} t_l = \lim\limits_{l\to\infty} s_l$. $\square$

Bemerkung. (Riemannscher Umordnungssatz) Ist $\sum_{k\geq 0} a_k$ konvergent, aber nicht absolut konvergent, so existiert zu jedem $s \in \mathbb{R}$ eine Umordnung mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} = s$. Außerdem existiert eine Umordnung, die divergiert. (Ohne Beweis).

Das Cauchy-Produkt

Wir wollen eine Umordnung von Reihen betrachten, die die Produktbildung von Reihen in einigen Situationen vereinfacht: Sind zwei Reihen $\sum_{k\geq 0} a_k$ und $\sum_{l\geq 0} b_l$ konvergent, so lässt sich das Produkt der Reihenwerte nach Satz 3.6 berechnen als

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big) \cdot \Big(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\Big) &= \Big(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k\Big)\Big(\lim_{n\to\infty} \sum_{l=0}^{n} b_l\Big) = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\Big)\Big(\sum_{l=0}^{n} b_l\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} (a_0 + \ldots + a_n) \cdot (b_0 + \ldots + b_n),\end{aligned}$$

d.h. man multipliziert zunächst jeweils die ersten n Summanden miteinander und betrachtet dann den Grenzwert für $n \to \infty$.

Das Produkt lässt sich auch folgendermaßen als sogenanntes *Cauchyprodukt* bzw. *Faltungsprodukt* berechnen, bei dem über Diagonalen aufsummiert wird:

Satz 4.18 (Cauchyprodukt). *Es seien $\sum_{k\geq 0} a_k$ und $\sum_{l\geq 0} b_l$ zwei absolut konvergente Reihen in $\mathbb{C}$. Dann konvergiert das Cauchyprodukt*

$$\sum_{n\geq 0} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

von $\sum_{k\geq 0} a_k$ und $\sum_{l\geq 0} b_l$ absolut. Für den Reihenwert gilt

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big) \cdot \Big(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Beweis. Für $N \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $A_N := \sum_{k=0}^{N} a_k$ und $B_N := \sum_{l=0}^{N} b_l$. Nach Voraussetzung existieren $A, B \in \mathbb{C}$ mit $A_n \to A$ und $B_N \to B$ für $N \to \infty$. Außerdem seien $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ die Koeffizienten des Cauchyprodukts, und $S_N := \sum_{n=0}^{N} c_n$ die zugehörigen Partialsummen.

Wir zeigen, dass $S_N \to AB$ konvergiert für $N \to \infty$, sowie die absolute Konvergenz von $\sum_{n\geq 0} c_n$. Dazu schreiben wir für $N \in \mathbb{N}$

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} c_n = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{N} a_k \sum_{n=k}^{N} b_{n-k} = \sum_{k=0}^{N} a_k \sum_{l=0}^{N-k} b_l = \sum_{k=0}^{N} a_k B_{N-k}.$$

Dann ist

$$AB - S_N = (A - A_N)B + A_N B - S_N = (A - A_N)B + \sum_{k=0}^{N} a_k (B - B_{N-k}).$$

Da nach Voraussetzung $A_N \to A$ für $N \to \infty$, folgt $\lim_{N\to\infty}(A - A_N)B = 0$. Für den zweiten Teil zerlegen wir die Summe in zwei Teile. Dazu sei $L := \left[\frac{N}{2}\right]$. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $\sum_{k\geq 0} a_k$ absolut konvergent ist, existiert ein $C_1 > 0$ mit

$$\sum_{k=0}^{l} |a_k| \leq C_1 \qquad \text{für alle } l \in \mathbb{N}_0,$$

und es existiert ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=l}^{m} |a_k| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } m > l \geq N_1.$$

Da $B_N \to B$ für $N \to \infty$, existiert des Weiteren ein $C_2 > 0$ mit $|B - B_l| \leq C_2$ für alle $l \in \mathbb{N}_0$, und es existiert ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|B - B_l| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } l \geq N_2.$$

Für $N > 2\max(N_1, N_2)$ folgt

$$|\sum_{k=0}^{L} a_k (B - B_{N-k})| \leq \sum_{k=0}^{L} |a_k||B - B_{N-k}| \leq \max_{\frac{N-1}{2}\leq l\leq N} |B - B_l| \cdot \Big(\sum_{k=0}^{L} |a_k|\Big) \leq C_1\varepsilon,$$

und

$$|\sum_{k=L+1}^{N} a_k (B - B_{N-k})| \leq \max_{0\leq l\leq \frac{N+1}{2}} |B - B_l| \cdot \Big(\sum_{k=L+1}^{N} |a_k|\Big) \leq C_2\varepsilon.$$

Somit ist $S_N \to AB$ für $N \to \infty$ gezeigt. Schließlich folgt die absolute Konvergenz von $\sum_{n\geq 0} c_n$ aus der Abschätzung

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n| \leq \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}| \leq \Big(\sum_{k=0}^{N} |a_k|\Big) \cdot \Big(\sum_{l=0}^{N} |b_l|\Big) \leq \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\Big) \cdot \Big(\sum_{l=0}^{\infty} |b_l|\Big).$$

$\square$

4.6. Die Exponentialreihe

LEMMA 4.19. *Für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe* $\sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{k!}$ *absolut.*

BEWEIS. Es sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $a_k := \frac{z^k}{k!}$, dann ist

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{|z|}{k+1} \leq \frac{1}{2}$$

für $k \geq 2|z|$. Nach dem Quotientenkriterium (Satz 4.12) konvergiert die Reihe absolut. □

Dies erlaubt die folgende Definition.

DEFINITION 4.20. Die Abbildung

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

heißt *Exponentialfunktion*, und die Reihe $\sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{k!}$ heißt *Exponentialreihe* von $z \in \mathbb{C}$.

BEMERKUNG. Für $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp(x) \in \mathbb{R}$. Die auf $\mathbb{R}$ eingeschränkte Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ wird ebenfalls mit exp bezeichnet.

Als Anwendung von Cauchyprodukten erhalten wir die *Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.*

LEMMA 4.21. *Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(w) \cdot \exp(z) = \exp(w+z).$$

BEWEIS. Nach Lemma 4.19 konvergieren die Reihen $\sum_{k\geq 0} \frac{w^k}{k!}$ und $\sum_{l\geq 0} \frac{z^l}{l!}$ absolut. Nach Satz 4.18 erhalten wir

$$\exp(w) \cdot \exp(z) = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}\Big) \cdot \big(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{l!}\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{w^k}{k!} \frac{z^{n-k}}{(n-k)!}\Big).$$

Aus der binomischen Formel folgt aber

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{w^k}{k!} \frac{z^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} w^k z^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^k z^{n-k} = \frac{1}{n!}(w+z)^n.$$

Einsetzen liefert die Behauptung. □

BEMERKUNG. Für $r \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\exp(r) = e^r,$$

wobei e die Eulersche Zahl aus Beispiel 3.23 ist.

Beweis. (i) In Beispiel 3.23 wurde gezeigt, dass $\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$ ist. Aus Lemma 4.21 folgt

$$\exp(2) = \exp(1+1) = \exp(1) \cdot \exp(1) = e^2.$$

Induktiv erhält man

$$\exp(k) = e^k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

(ii) Durch Einsetzen erhält man $\exp(0) = 1 = e^0$. Hieraus folgt für $k \in \mathbb{N}$

$$1 = \exp(0) = \exp(k-k) = \exp(k) \cdot \exp(-k),$$

also $\exp(-k) = (\exp(k))^{-1} = e^{-k}$. Somit ist $\exp(k) = e^k$ für $k \in \mathbb{Z}$ gezeigt.
(iii) Es sei nun $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+$ mit $p, q \in \mathbb{N}$. Zunächst ist

$$e = \exp(1) = \exp(q \cdot \frac{1}{q}) = \exp(\underbrace{\frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q}}_{q\text{-mal}}) = (\exp(\frac{1}{q}))^q,$$

also $\exp(\frac{1}{q}) = e^{\frac{1}{q}}$. Hieraus folgt

$$\exp(\frac{p}{q}) = \exp(\underbrace{\frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q}}_{p\text{-mal}}) = (\exp(\frac{1}{q}))^p = (e^{\frac{1}{q}})^p,$$

also $\exp(\frac{p}{q}) = e^{\frac{p}{q}}$. Schließlich ist $\exp(-\frac{p}{q}) \exp(\frac{p}{q}) = \exp(0) = 1$, also

$$\exp(-\frac{p}{q}) = (\exp(\frac{p}{q}))^{-1} = (e^{\frac{p}{q}})^{-1} = e^{-\frac{p}{q}}.$$

□

4.7. Uneigentliche Konvergenz

Wir wollen auch ausdrücken können, dass eine Folge „gegen unendlich geht“. In dieser Situation ist die betrachtete Folge divergent, besitzt jedoch ∞ als sogenannten uneigentlichen Grenzwert.

Wir führen die Symbole $-\infty$ und $+\infty = \infty$ ein, für die

$$-\infty < x < \infty \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

gelten soll. $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ wird als *erweiterte Zahlengerade* bezeichnet.

Achtung: $-\infty, \infty$ sind *keine* reellen Zahlen. Ausdrück wie z.B. $\infty - \infty$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ sind nicht definiert.

Ist $M \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nicht nach oben (bzw. nicht nach unten) beschränkt, so setzen wir $\sup M := \infty$ bzw. $\inf M := -\infty$.

Definition 4.22. Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir sagen $a_n \to \infty$ für $n \to \infty$ (bzw. $a_n \to -\infty$ für $n \to \infty$), falls für alle $K > 0$ ein $N_K \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$a_n \geq K \quad (\text{bzw. } a_n \leq -K) \qquad \text{für alle } n \geq N_K.$$

In diesem Fall spricht man von *uneigentlicher Konvergenz*. Anstelle von $a_n \to \pm\infty$ für $n \to \infty$ schreiben wir auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$.

Beispiel. Die Folge $(n^2 - n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent, aber es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - n) = \infty$:
Sei $K > 0$ gegeben. Wir wählen $N_K := \max([K] + 1, 2)$, dann ist

$$n^2 - n = n(n-1) \geq n \geq K \qquad \text{für alle } n \geq N_K,$$

d.h. $(n^2 - n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich gegen ∞.

Sehr nützlich ist oft der folgende Satz, der Nullfolgen und uneigentlich konvergierende Folgen in Beziehung setzt. Vergleiche auch Satz 3.9, bei dem Nullfolgen ausgeschlossen waren.

Satz 4.23. *Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

(i) $\dfrac{1}{a_n} \to 0$ *für $n \to \infty$, falls $a_n \to \infty$ oder $a_n \to -\infty$ für $n \to \infty$.*

(ii) $\dfrac{1}{a_n} \to \infty$ *für $n \to \infty$, falls $a_n \to 0$ für $n \to \infty$ und ein $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n > 0$ für alle $n \geq N_0$.*

(iii) $\dfrac{1}{a_n} \to -\infty$ *für $n \to \infty$, falls $a_n \to 0$ für $n \to \infty$ und ein $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n < 0$ für alle $n \geq N_0$.*

Beweis. (i) Sei $\varepsilon > 0$. Es gelte $a_n \to \infty$. Dann existiert zu $K := \frac{1}{\varepsilon}$ ein $N_K \in \mathbb{N}$ mit $a_n \geq K$ für alle $n \geq N_K$, und somit

$$0 < \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{K} = \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N_K.$$

D.h. es gilt $\frac{1}{a_n} \to 0$ für $n \to \infty$. Analog zeigt man die Aussage im Fall $a_n \to -\infty$.
(ii) Sei $K > 0$. Zu $\varepsilon := \frac{1}{K} > 0$ existiert nach Voraussetzung ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$. Für $M := \max(N_\varepsilon, N_0)$ folgt $a_n > 0$ und

$$\frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{\varepsilon} = K \qquad \text{für alle } n \geq M.$$

(iii) analog zu (ii). □

Beispiel. Sei $(a_n)_n = ((-1)^n \frac{1}{n^2})_n$. Dann gilt $a_n \to 0$ für $n \to \infty$, aber $a_n \not\to \infty$ und $a_n \not\to -\infty$ für $n \to \infty$.

Wir wollen entsprechend auch $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$ bzw. $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$ definieren.

Definition 4.24. Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Ist $(a_n)_n$ nicht nach oben bzw. nicht nach unten beschränkt, so setzen wir

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \infty \quad \text{bzw.} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n := -\infty.$$

Bemerkung. (i) Die Definition ist konsistent mit der Definition des Limes superior bzw. Limes inferior für beschränkte Folgen (vergleiche Definition 3.24): Ist $b_n := \sup\limits_{k\geq n} a_k$, so ist die Folge $(a_n)_n$ genau dann nicht nach oben beschränkt, wenn $b_n = \infty$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Entsprechendes gilt für den Limes inferior.

(ii) Ist $(a_n)_n$ nicht nach oben beschränkt, so existiert eine Teilfolge $(a_{n_j})_j$ von $(a_n)_n$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} a_{n_j} = \infty$. (Beweis analog zu Satz 3.17 mit rekursiver Definition der Teilfolge.)

4.8. Potenzreihen

Wir wollen die bisher erarbeitete Theorie zu Reihen verwenden, um spezielle Funktionen auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ zu definieren. Dazu betrachten wir sogenannte Potenzreihen.

Definition 4.25. Es seien $a_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben, und es sei $z \in \mathbb{C}$. Die Reihe

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

heißt *Potenzreihe* mit Koeffizienten a_n.

Beispiel. Die in Abschnitt 4.6 eingeführte Exponentialreihe $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$, ist eine Potenzreihe mit Koeffizienten $a_n = \frac{1}{n!}$.

Um die Konvergenz von Potenzreihen zu untersuchen, führen wir folgende Definition ein.

Definition 4.26 (Konvergenzradius). Es seien a_n, $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Wir setzen

$$\rho := \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{falls } 0 < \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty, \\ 0, & \text{falls } (\sqrt[n]{|a_n|})_n \text{ unbeschränkt}, \\ \infty, & \text{falls } \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases}$$

Es genügt, den Konvergenzradius einer Potenzreihe und nicht die genaue Folge der Koeffizienten zu kennen, um folgende Aussagen zur Konvergenz treffen zu können.

Satz 4.27. *Es sei* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* ρ*, und* $z \in \mathbb{C}$.

(i) Ist $\rho \in (0,\infty)$*, so konvergiert die Reihe absolut für* $|z| < \rho$*, und divergiert für* $|z| > \rho$.
(ii) Ist $\rho = 0$*, so divergiert die Reihe für alle* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
(iii) Ist $\rho = \infty$*, so konvergiert die Reihe absolut für alle* $z \in \mathbb{C}$.

Bemerkung. Da die betrachteten Fälle disjunkt sind, kann auch umgekehrt von dem in (i)-(iii) beschriebenen Konvergenzverhalten auf den Wert von ρ geschlossen werden. Z.B. ist $\rho = \infty$ genau dann, wenn $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert.

Bemerkung. Ist $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \rho$, so kann $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ konvergieren oder divergieen. Vergleiche die Beispiele unten.

Beweis von Satz 4.27. Sei zunächst $\rho \in (0, \infty)$. Dann ist

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|}{\rho}.$$

Nach dem Wurzelkriterium (Satz 4.11) konvergiert $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ absolut für $\frac{|z|}{\rho} < 1$ und divergiert für $\frac{|z|}{\rho} > 1$.
Ist $\rho = 0$, so ist für jedes $z \neq 0$ die Folge $(\sqrt[n]{|a_n z^n|})_n = |z|(\sqrt[n]{|a_n|})_n$ unbeschränkt. Also existiert nach der Bemerkung nach Definition 4.24 eine Teilfolge mit $\sqrt[n_j]{|a_{n_j} z^{n_j}|} > 1$ für alle $j \in \mathbb{N}$, und somit auch $|a_{n_j} z^{n_j}| > 1$ für alle $j \in \mathbb{N}$. D.h. $(a_n z^n)_n$ ist keine Nullfolge, nach Satz 4.2 divergiert die Reihe.
Ist $\rho = \infty$, so existiert $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, woraus nach Satz 4.11 die Konvergenz für alle $z \in \mathbb{C}$ folgt. □

In manchen Fällen lässt sich der Konvergenzradius leichter berechnen.

Satz 4.28. *Es sei* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ *eine Potenzreihe mit* $a_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$, $z \in \mathbb{C}$, *und es existiere* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \in [0, \infty]$. *Dann gilt*

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Beweis. Wir setzen $\alpha := \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| \in [0, \infty]$. Ist $\alpha \in (0, \infty)$, so ist für $z \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \frac{|z|}{\alpha}.$$

Die Behauptung folgt nun aus Satz 4.12 (Quotientenkriterium) und Satz 4.27 mit der anschließenden Bemerkung. Der Fall $\alpha = \infty$ folgt analog mit Satz 4.23.
Ist $\alpha = 0$ und $z \neq 0$, so ist $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_n$ unbeschränkt, somit existiert eine Teilfolge mit

$$\left|\frac{a_{n_j+1} z^{n_j+1}}{a_{n_j} z^{n_j}}\right| = |z| \left|\frac{a_{n_j+1}}{a_{n_j}}\right| > 1 \qquad \text{für alle } j \in \mathbb{N},$$

woraus folgt, dass $(a_{n_j} z^{n_j})_j$ und somit auch $(a_n z^n)_n$ keine Nullfolge ist. Die Behauptung folgt aus Satz 4.2. □

Beispiel. (a) (Exponentialreihe) $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$. Hier ist

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \to \infty, \quad n \to \infty,$$

also nach Satz 4.28 $\rho = \infty$. D.h. die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) (Geometrische Reihe) $\sum_{n\geq 0} z^n$, $z \in \mathbb{C}$. Wegen $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\rho = 1$. Ist $|z| = 1$, so divergiert die Reihe, vergleiche Beispiel (d) in Abschnitt 4.1.

(c) Sei $p \in \mathbb{Q}$. Wir betrachten die Reihe $\sum_{n\geq 1} n^p z^n$, $z \in \mathbb{C}$. Hier ist

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n^p}{(n+1)^p} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \to 1, \qquad n \to \infty,$$

also ist nach Satz 4.28 der Konvergenzradius $\rho = 1$. Wir erhalten aus Satz 4.27 bzw. Satz 4.28 keine Aussagen zur Konvergenz für $|z| = 1$.

(d) (Fall $p = -1$ in (c)) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^n$, $z \in \mathbb{C}$. Nach (c) ist $\rho = 1$. Wie zuvor schon gezeigt wurde, ist die Reihe für $z = 1$ divergent (harmonische Reihe), für $z = -1$ konvergent (alternierende harmonische Reihe).

(e) (Fall $p = -2$ in (c)) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} z^n$, $z \in \mathbb{C}$. Nach (c) ist auch hier $\rho = 1$. Nach dem Majorantenkriterium erhalten wir Konvergenz der Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

Wir notieren noch zwei Rechenregeln zur Addition und Multiplikation von Potenzreihen, die wir für konvergente bzw. absolut konvergente Reihen schon bewiesen hatten.

Satz 4.29. *Es seien $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ und $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ zwei Potenzreihen mit Konvergenzradius ρ_a bzw. ρ_b. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \rho := \min(\rho_a, \rho_b)$ gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n,$$

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big) z^n.$$

Beweis. Folgt aus Satz 4.3 und Satz 4.18. □

Sinus und Cosinus

Analog zur Definition der Exponentialfunktion definieren die Funktionen Sinus und Cosinus durch die Reihenwerte zweier Potenzreihen.

Definition 4.30 (Sinus und Cosinus). Wir definieren die Abbildungen

$$\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

und

$$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Die Abbildungen cos und sin werden *Cosinus* bzw. *Sinus* genannt. Die zugehörenden Potenzreihen

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

heißen *Cosinusreihe* bzw. *Sinusreihe.*

Der Zusammenhang zwischen den Reihenwerten der Exponentialreihe

$$\exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

und der Cosinusreihe

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

bzw. Sinusreihe

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

wird in folgendem Satz deutlich.

Satz 4.31. *Die Abbildungen* sin *und* cos *sind wohldefiniert. Die Sinus- und Cosinusreihe haben Konvergenzradius $\rho = \infty$. Es gilt die Eulersche Formel*

$$\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z), \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{4.7}$$

Beweis. □

Bemerkung. Für $x \in \mathbb{R}$ sind $\cos(x)$ und $\sin(x)$ reell. Die auf $\mathbb{R}$ eingeschränkte Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$, und $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$ werden ebenfalls mit Cosinus bzw. Sinus bezeichnet.

Bemerkung. Wir schreiben im Folgenden auch $e^z := \exp(z)$ für $z \in \mathbb{C}$. Wir werden dies im nächsten Kapitel rechtfertigen.

Lemma 4.32. *(i) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $\cos(-z) = \cos(z)$, $\sin(-z) = -\sin(z)$.*

(ii) *Für $z \in \mathbb{C}$ gelten*

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}),$$
$$\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

(iii) *(Additionstheoreme): Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\cos(z \pm w) = \cos(z)\cos(w) \mp \sin(z)\sin(w),$$
$$\sin(z \pm w) = \sin(z)\cos(w) \pm \cos(z)\sin(w).$$

(iv) *Für $z \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1.$$

Beweis. □

KAPITEL 5

Stetige Funktionen

5.1. Definition und elementare Eigenschaften

DEFINITION 5.1. Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $D \neq \emptyset$, und $z \in \mathbb{C}$. z heißt *Häufungspunkt* der Menge D, falls für jedes $r > 0$ ein Element $w \in B(z,r) \cap D$ existiert mit $w \neq z$. Ist $z \in D$ kein Häufungspunkt von D, so heißt z *isolierter Punkt* von D.

BEMERKUNG. (i) Ein Häufungspunkt einer Menge D muss nicht selbst in D liegen. *Beispiel:* $D = (0,1] \subseteq \mathbb{R}$. 0 ist Häufungspunkt von D (zu gegebenem $r > 0$ ist $B(0,r) \cap D = (0,r)$, mit $0 \neq \frac{r}{2} \in (0,r)$), aber $0 \notin D$.

(ii) $z \in \mathbb{C}$ ist genau dann ein Häufungspunkt von D, wenn eine Folge $(z_n)_n$ in $D \setminus \{z\}$ existiert mit $z_n \to z$ für $n \to \infty$.
Beweis: Ist z ein Häufungspunkt von D, so wählen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $z_n \in B(z, \frac{1}{n}) \cap D$ mit $z_n \neq z$. Dann ist $(z_n)_n$ Folge in $D \setminus \{z\}$, und wegen $|z - z_n| < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt die Konvergenz $z_n \to z$ für $n \to \infty$. Existiert umgekehrt $(z_n)_n \subseteq D \setminus \{z\}$ mit $z_n \to z$, so existiert zu gegebenem $r > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|z - z_n| < r$, also ist $z_n \in B(z,r) \cap D$, und $z_n \neq z$.

(iii) Man muss die Begriffe „Häufungspunkt einer Folge“ und „Häufungspunkt einer Menge“ auseinanderhalten: Ist z Häufungspunkt von D, so ist z auch Häufungspunkt der Folge $(z_n)_n$ aus (ii) (vergleiche Definition 3.16). Ist z isolierter Punkt von D, so ist z kein Häufungspunkt von D, aber z ist Häufungspunkt der konstanten Folge $(z)_n$.

BEISPIEL. (a) $D = (0,1) \cup \{2\}$. Hier ist jedes $x \in [0,1]$ Häufungspunkt von D. 2 ist isolierter Punkt von D, da z.B. für $r = \frac{1}{2}$ der Schnitt $B(2, \frac{1}{2}) \cap D = \{2\}$ kein weiteres Element außer 2 enthält.

(b) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{C}$ und $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$: Jedes $m \in \mathbb{N}$ bzw. $m \in \mathbb{Z}$ ist ein isolierter Punkt.

DEFINITION 5.2 (Grenzwert von Funktionen). Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $D \neq \emptyset$, und $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von D, sowie $w_0 \in \mathbb{C}$. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion.

(i) Wir sagen, f *konvergiert gegen* w_0 *für* $z \to z_0$, falls

$$\text{für } \textit{jede} \text{ Folge } (z_n)_n \subseteq D \setminus \{z_0\} \text{ mit } z_n \to z_0 \text{ gilt}$$
$$f(z_n) \to w_0 \qquad \text{für } n \to \infty. \tag{5.1}$$

Notation: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$.

(ii) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Wir sagen, f *konvergiert gegen* w_0 *für* $z \to z_0-$ *bzw. für* $z \to z_0+$, falls in (5.1) zusätzlich $z_n < z_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bzw. $z_n > z_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. w_0 heißt dann *linksseitiger* bzw. *rechtsseitiger Grenzwert* von f.
Notation: $w_0 = \lim\limits_{z \to z_0-} f(z)$ bzw. $w_0 = \lim\limits_{z \to z_0+} f(z)$.

Bemerkung. Bei dieser Definition spielt der Funktionswert $f(z_0)$ keine Rolle!

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R}_+ \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$. Dann ist 1 Häufungspunkt von $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, und $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$: Sei dazu $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ mit $x_n \to 1$ für $n \to \infty$. Dann gilt nach den Rechenregeln für Folgen

$$f(x_n) = \frac{x_n - 1}{x_n^2 - 1} = \frac{x_n - 1}{(x_n + 1)(x_n - 1)} = \frac{1}{x_n + 1} \to \frac{1}{2}, \qquad n \to \infty.$$

Definition 5.3 (Uneigentlicher Grenzwert). Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$.

(i) Wir nennen ∞ (bzw. $-\infty$) *uneigentlichen Häufungspunkt* von D, falls D nicht nach oben (bzw. nicht nach unten) beschränkt ist.

(ii) Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion, sei $w_0 \in \mathbb{C}$. Wir sagen, f *konvergiert gegen* w_0 *für* $x \to \pm\infty$, falls

$$\text{für } \textit{jede} \text{ Folge } (x_n)_n \subseteq D \text{ mit } x_n \to \pm\infty \text{ gilt}$$
$$f(x_n) \to w_0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Notation: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = w_0$ bzw. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = w_0$.

Alternativ lassen sich Grenzwerte von Funktionen auch mittels Umgebungen um z_0 bzw. w_0 definieren. Dabei wird gefordert, dass zu beliebig vorgegebener Kreisscheibe $\bar{B}(w_0, \varepsilon)$ um den Wert w_0 eine Kreisscheibe $\bar{B}(z_0, \delta)$ um z_0 so gefunden werden kann, dass das Bild von $\bar{B}(z_0, \delta)$ unter f ganz in $\bar{B}(w_0, \varepsilon)$ liegt. D.h. ist $z \in \bar{B}(z_0, \delta)$, so muss $f(z) \in \bar{B}(w_0, \varepsilon)$ gelten.

Lemma 5.4. *Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$, $D \neq \emptyset$, $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von D, $w_0 \in \mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Es gilt $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ genau dann, wenn gilt:*

$$\textit{für alle } \varepsilon > 0 \textit{ existiert ein } \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \textit{ so, dass}$$
$$|f(z) - w_0| \leq \varepsilon \qquad \textit{für alle } z \in D, z \neq z_0, \textit{ mit } |z - z_0| \leq \delta. \tag{5.2}$$

Bemerkung. Formal lässt sich (5.2) folgendermaßen ausdrücken:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall z \in D \setminus \{z_0\} \cap \bar{B}(z_0, \delta) : \qquad |f(z) - w_0| \leq \varepsilon.$$

Beweis. (5.2) $\Rightarrow$ (5.1). Es sei $(z_n)_n \subseteq D \setminus \{z_0\}$ gegeben mit $z_n \to z_0$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung (5.2) existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mit

$$|f(z) - w_0| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } z \in D \setminus \{z_0\} \text{ mit } |z - z_0| \leq \delta.$$

Da $(z_n)_n$ konvergiert, existiert außerdem ein $N = N(\delta) \in \mathbb{N}$ mit

$$|z_n - z_0| \leq \delta \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

Somit folgt

$$|f(z_n) - w_0| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N,$$

d.h. $f(z_n) \to w_0$ für $n \to \infty$. Dies zeigt (5.1).
(5.1) $\Leftarrow$ (5.2). Angenommen, es existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $\delta > 0$ ein $z_\delta \in D \setminus \{z_0\}$ existiert mit

$$|z_\delta - z_0| \leq \delta \quad \text{und} \quad |f(z_\delta) - w_0| > \varepsilon.$$

Dann existiert insbesondere für jedes $k \in \mathbb{N}$ (mit Wahl $\delta = \frac{1}{k}$) ein $z_k \in D \setminus \{z_0\}$ mit

$$|z_k - z_0| \leq \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad |f(z_k) - w_0| > \varepsilon.$$

D.h. die Folge $(z_k)_k \subseteq D \setminus \{z_0\}$ konvergiert mit $z_k \to z_0$, $k \to \infty$, aber $f(z_k) \not\to w_0$, $k \to \infty$, im Widerspruch zu (5.1). $\square$

Bemerkung. Für links- bzw. rechtsseitige Grenzwerte lässt sich im Fall $D \subseteq \mathbb{R}$ entsprechend zeigen, dass genau dann $\lim\limits_{z \to z_0 \pm} f(z) = w_0$, wenn gilt:

$$\text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ so, dass}$$
$$|f(z) - w_0| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } z \in D \text{ mit } z_0 < z \leq z_0 + \delta \text{ (bzw. } z_0 - \delta \leq z < z_0).$$

Für uneigentliche Grenzwerte erhalten wir die folgende Charakterisierung.

Lemma 5.5. *Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$, $w_0 \in \mathbb{C}$, und ∞ (bzw. $-\infty$) sei ein uneigentlicher Häufungspunkt von D. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Es gilt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = w_0$ genau dann, wenn gilt:*

$$\textit{für alle } \varepsilon > 0 \textit{ existiert ein } K = K(\varepsilon) > 0 \textit{ so, dass}$$
$$|f(x) - w_0| \leq \varepsilon \qquad \textit{für alle } x \in D \textit{ mit } x \geq K \textit{ (bzw. } x \leq -K).$$

Beweis. Analog zu Lemma 5.4. $\square$

Wir wenden Lemma 5.4 an, um Grenzwerte zu berechnen.

Beispiel. Wir betrachten die Wurzelfunktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$.

(i) Es gilt $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0$.
Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Setzen wir $\delta = \varepsilon^2 > 0$, so ist

$$|f(x) - 0| = \sqrt{x} \leq \sqrt{\delta} = \varepsilon$$

für alle $0 < x \leq \delta$.

(ii) Sei $x_0 \in (0,\infty)$. Dann ist $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \sqrt{x_0}$.
Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta = \min(\varepsilon\sqrt{x_0}, x_0)$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| \le \delta$, dass $x \ge 0$ ist, sowie

$$|f(x) - \sqrt{x_0}| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = |\frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}| \le \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} \le \frac{\delta}{\sqrt{x_0}} \le \varepsilon.$$

Aus den schon bekannten Rechenregeln für Folgen erhalten wir folgende Rechenregeln für Grenzwerte.

SATZ 5.6. *Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$, $D \neq \emptyset$, z_0 ein Häufungspunkt von D (bzw. ein uneigentlicher Häufungspunkt von $D \subseteq \mathbb{R}$), $v_0, w_0 \in \mathbb{C}$. Seien $f : D \to \mathbb{C}$ und $g : D \to \mathbb{C}$ Funktionen, und es existiere*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = v_0, \qquad \lim_{z\to z_0} g(z) = w_0.$$

Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt

(i)

$$\lim_{z\to z_0} (f(z) + g(z)) = v_0 + w_0,$$
$$\lim_{z\to z_0} (\lambda f(z)) = \lambda v_0,$$
$$\lim_{z\to z_0} (f(z) \cdot g(z)) = v_0 \cdot w_0.$$

(ii) Ist $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) \neq 0$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $g(z) \neq 0$ für alle $z \in D \setminus \{z_0\}$ mit $|z - z_0| \le \delta$ (bzw. es existiert ein $K > 0$ mit $g(z) \neq 0$ für alle $z \ge K$ bzw. $z \le -K$, falls z_0 uneigentlicher Häufungspunkt von D). Dann gilt

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{v_0}{w_0},$$

und insbesondere

$$\lim_{z\to z_0} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{w_0}.$$

(iii) Gilt $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$, und ist $f(z) \le g(z)$ für alle $z \in D$, so folgt $v_0 \le w_0$.

(iv) Gilt $f, g, h : D \to \mathbb{R}$, ist $f(z) \le h(z) \le g(z)$ für alle $z \in D$, und ist $v_0 = w_0$, so existiert $\lim\limits_{z\to z_0} h(z)$, und $\lim\limits_{z\to z_0} h(z) = v_0$.

BEWEIS. (i) folgt aus den Rechenregeln für Folgen (Satz 3.6, Satz 3.8). Wir zeigen exemplarisch die erste Aussage. Sei dazu $(z_n)_n \subseteq D \setminus \{z_0\}$ eine Folge mit $z_n \to z_0$. Nach Voraussetzung gilt $f(z_n) \to v_0$ und $g(z_n) \to w_0$, $n \to \infty$. Also liefert Satz 3.6, dass

$$f(z_n) + g(z_n) \to v_0 + w_0, \quad n \to \infty.$$

Da $(z_n)_n$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung.
(ii) folgt aus Satz 3.9. Wir wählen dazu $\varepsilon := \frac{|w_0|}{2} > 0$, dann existiert nach Lemma 5.4

bzw. Lemma 5.5 ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (bzw. $K = K(\varepsilon) > 0$) mit $|g(z) - w_0| \leq \varepsilon = \frac{|w_0|}{2}$ für $|z - z_0| \leq \delta$ (bzw. für $z \geq K$ bzw. $z \leq -K$). Also ist

$$|g(z)| = |g(z) - w_0 + w_0| \geq |w_0| - \frac{|w_0|}{2} = \frac{|w_0|}{2} > 0.$$

(iii), (iv) folgen entsprechend aus Satz 3.10 bzw. Satz 3.11. □

Bemerkung. Die Aussagen in Satz 5.6 gelten entsprechend auch für links- bzw. rechtsseitige Grenzwerte.

Wir führen nun den Begriff der Stetigkeit einer Funktion ein. Grob gesprochen soll qualitativ untersucht werden, ob kleine Änderungen in den Funktionswerten durch entsprechende Änderungen im Urbild kontrolliert werden können. Dies wird später (vgl. Satz 5.11) noch etwas deutlicher werden.

Definition 5.7 (Stetigkeit einer Funktion). Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$, $D \neq \emptyset$, und $z_0 \in D$. Sei $f : D \to \mathbb{C}$. f heißt *stetig in* z_0, falls

$$\text{für } \textit{jede} \text{ Folge } (z_n)_n \subseteq D \setminus \{z_0\} \text{ mit } z_n \to z_0, n \to \infty, \text{ gilt}$$
$$f(z_n) \to f(z_0), \quad n \to \infty.$$

f heißt stetig (auf D), falls f in jedem Punkt $z_0 \in D$ stetig ist.

Notation:

$$\begin{aligned} C(D) := C(D;\mathbb{C}) &:= \{f : D \to \mathbb{C} \,|\, f \text{ stetig}\}, \\ C(D;\mathbb{R}) &:= \{f : D \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ stetig}\}. \end{aligned}$$

Bemerkung. 1) Ist $z_0 \in D$ ein isolierter Punkt, so existiert keine Folge $(z_n)_n \subseteq D \setminus \{z_0\}$ mit $z_n \to z_0$. D.h. f ist in isolierten Punkten z_0 immer stetig.

2) Ist $z_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D, so ist f genau dann in z_0 stetig, wenn $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existiert und

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Beispiel. (a) Die Wurzelfunktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ist stetig (vergleiche Beispiel oben).

(b) Die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ sind stetig.
Beweis: Sei dazu $x_0 \in \mathbb{R}$, und $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ mit $x_n \to x_0$, $n \to \infty$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x_n) &= x_n \to x_0 = f(x_0), \qquad n \to \infty, \\ g(x_n) &= x_n^2 \to x_0^2 = g(x_0), \qquad n \to \infty. \end{aligned}$$

(c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig.
Beweis: Sei $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, und sei $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $x_n \to x_0$, $n \to \infty$. Da $x_0 \neq 0$, folgt nach Satz 3.9, dass $f(x_n) = \frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x_0}$, $n \to \infty$.

Bemerkung. 3) Ist $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $(z_n)_n \subseteq D$ eine konvergente Folge, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(\lim_{n\to\infty} z_n).$$

D.h. „stetige Funktionen sind mit Grenzwertbildungen verträglich“.

Rechenregeln

Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$, $D \neq \emptyset$, $f, g : D \to \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Wir definieren punktweise

$$\begin{aligned} f + g : D \to \mathbb{C}, &\quad z \mapsto f(z) + g(z), \\ \lambda f : D \to \mathbb{C}, &\quad z \mapsto \lambda f(z), \\ f \cdot g : D \to \mathbb{C}, &\quad z \mapsto f(z) \cdot g(z). \end{aligned}$$

Ist $g(z) \neq 0$ für alle $z \in D$, so setzen wir

$$\frac{f}{g} : D \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{f(z)}{g(z)}.$$

Dann erhalten wir aus Satz 5.6 folgende Rechenregeln für die Stetigkeit.

Satz 5.8. *Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$, $D \neq \emptyset$, $z_0 \in D$, $f, g : D \to \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Es seien f und g stetig in z_0. Dann gilt*

(i) $f + g$, λf und $f \cdot g$ sind stetig in z_0.
(ii) Es sei $g : D \to \mathbb{R}$, und es gelte $g(z_0) > 0$. Dann existiert ein $r > 0$ so, dass $g(z) > 0$ für alle $z \in D$ mit $|z - z_0| < r$.
(iii) Es sei $g(z_0) \neq 0$. Dann ist $\frac{f}{g}$ stetig in z_0.

Beweis. folgt direkt aus Satz 5.6. In (ii) ist zu beachten, dass für isolierte Punkte z_0 nach Definition ein $r > 0$ existiert mit $B(z_0, r) \cap D = \{z_0\}$. □

Auch bei der Kompositionen von Funktionen wird die Stetigkeit erhalten.

Satz 5.9. *Es seien $D, E \subseteq \mathbb{C}$, $D, E \neq \emptyset$, $f : D \to \mathbb{C}$, $g : E \to \mathbb{C}$ zwei Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Sei $z_0 \in D$. f sei stetig in z_0 und g sei stetig in $f(z_0)$. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{C}$ stetig in z_0.*

Beweis. Es sei $(z_n)_n \subseteq D \setminus \{z_0\}$ mit $z_n \to z_0$, $n \to \infty$. Da f in z_0 stetig ist, gilt $f(z_n) \to f(z_0)$, $n \to \infty$. Nun ist $(f(z_n))_n \subseteq E$, mit $f(z_n) \to f(z_0)$, $n \to \infty$. Da g in $f(z_0)$ stetig ist, erhalten wir

$$g(f(z_n)) \to g(f(z_0)), \quad n \to \infty.$$

□

Korollar 5.10. *Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $D \neq \emptyset$, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig in $z_0 \in D$. Dann sind $|f|$, $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ stetig in z_0.*

Beweis. . □

Bemerkung. Die Umkehrung von Satz 5.9 ist im Allgemeinen falsch. D.h. ist $g \circ f$ stetig in z_0, so ist im Allgemeinen weder f noch g stetig in z_0 bzw. $f(z_0)$.

Beispiel. (d) Polynome sind stetig auf $\mathbb{C}$. Als Polynom bezeichnen wir Funktionen der Form $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m$, mit $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$ für ein $m \in \mathbb{N}$.

(e) Sind p, q Polynome auf $\mathbb{C}$, so ist die rationale Funktion $r : Q \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)}$ stetig auf Q, wobei $Q := \{z \in \mathbb{C} \,|\, q(z) \neq 0\}$.

Bemerkung. Nach Satz 5.8 ist $C(D)$ ein Vektorraum (vergleiche Lineare Algebra).

Wie auch bei Grenzwerten kann die Stetigkeit einer Funktion entweder über Folgen definiert werden oder mit Hilfe von Kreisumgebungen (ε-δ-Definition der Stetigkeit).

Satz 5.11. *Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $D \neq \emptyset$, $z_0 \in D$ und $f : D \to \mathbb{C}$. f ist genau dann in z_0 stetig, wenn gilt:*

$$\text{für jedes } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ so, dass}$$
$$|f(z) - f(z_0)| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } z \in D \text{ mit } |z - z_0| \leq \delta.$$

Beweis. Die Aussage folgt aus Lemma 5.4. Ist z_0 ein isolierter Punkt, so existiert ein $\delta > 0$ mit $\bar{B}(z_0, \delta) \cap D = \{z_0\}$. □

Bemerkung. Formal lautet die Bedingung des Satzes:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall z \in D \cap \bar{B}(z_0, \delta) : \qquad |f(z) - f(z_0)| \leq \varepsilon.$$

Wir verwenden Satz 5.11, um die Stetigkeit von durch Potenzreihen gegebenen Funktionen im Inneren des Konvergenzbereichs zu zeigen.

Satz 5.12. *Es sei $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist die Funktion*

$$f : B(0, \rho) \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

stetig. Ist $\rho = \infty$, so ist f stetig auf $\mathbb{C}$.

Beweis. Es sei $z_0 \in B(0, \rho)$ und $\varepsilon > 0$. Wir wählen $r > 0$ mit $0 \leq |z_0| < r < \rho$. Nach Satz 4.27 konvergiert die Reihe $\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n$. Also existiert ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^n \leq \varepsilon. \tag{5.3}$$

Wir bezeichnen die durch die N-te Partialsumme der Reihe gegebene Funktion mit p, d.h. $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$. Nach Beispiel (d) ist das Polynom p stetig auf $\mathbb{C}$, d.h. es existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mit

$$|p(z) - p(z_0)| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq \delta. \tag{5.4}$$

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \le r$. Wir zerlegen f und schätzen ab

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= |\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n| \\ &\le |\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N} a_n z_0^n| + |\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n| + |\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z_0^n| \\ &\le |p(z) - p(z_0)| + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^n, \end{aligned} \tag{5.5}$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass $|z| \le r$ und $|z_0| \le r$ gilt. Nach Wahl von r existiert ein δ_0 mit $0 < \delta_0 < r - |z_0|$. Wir setzen $\delta_1 = \min(\delta, \delta_0)$. Dann impliziert die Bedingung $|z - z_0| \le \delta_1$ auch $|z| < r$. Somit erhalten wir aus (5.3), (5.4) und (5.5) für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| \le \delta_1$, dass

$$|f(z) - f(z_0)| \le \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon.$$

□

Beispiel. (f) Die Funktionen $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind stetig.
Beweis: Dies folgt direkt aus Satz 5.12, da die zugehörenden Potenzreihen jeweils Konvergenzradius $\rho = \infty$ haben.

Definition 5.13 (Gleichmäßige Stetigkeit). Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $D \neq \emptyset$, und $f : D \to \mathbb{C}$. f heißt *gleichmäßig stetig* auf D, falls gilt:

$$\text{für jedes } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ so, dass}$$
$$|f(z) - f(w)| \le \varepsilon \qquad \text{für alle } z, w \in D \text{ mit } |z - w| \le \delta.$$

Bemerkung. Ist f gleichmäßig auf D, so ist f stetig auf D. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, da bei der Definition der Stetigkeit δ von z_0 abhängen kann.

5.2. Hauptsätze für stetige Funktionen

Definition 5.14. Es sei $A \subseteq \mathbb{C}$ eine Menge. A heißt *abgeschlossen*, falls für jede konvergente Folge $(z_n)_n \subseteq A$ mit $z_n \to z$ für $n \to \infty$ auch $z \in A$ gilt.

Beispiel. (i) $\mathbb{C}, \emptyset$ sind abgeschlossen. $\mathbb{R}$ ist abgeschlossen.
(ii) Abgeschlossene Intervalle $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ sind abgeschlossen: Ist $(x_n)_n \subseteq [a, b]$ mit $x_n \to x$, $n \to \infty$, so ist $a \le x_n \le b$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 3.10 folgt, dass auch $a \le x \le b$ gilt, d.h. $x \in [a, b]$. Entsprechend kann man auch zeigen, dass abgeschlossene Kreisscheiben $\bar{B}(z_0, r)$ in $\mathbb{C}$ abgeschlossen sind.
(iii) Das Intervall $(0, 1]$ ist nicht abgeschlossen, da z.B. die Folge $(\frac{1}{n})_n \subseteq (0, 1]$ ist, aber $\frac{1}{n} \to 0$, $n \to \infty$ gilt.

Satz 5.15. *Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $D \neq \emptyset$, abgeschlossen und beschränkt. Ist die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ stetig auf D, so ist sie gleichmäßig stetig auf D.*

Bemerkung. 1) Der Satz besagt: Jede auf einer abgeschlossenen und beschränkten Menge stetige Funktion ist dort gleichmäßig stetig.
2) Beispiel (c) zeigt, dass die Voraussetzung, dass D abgeschlossen ist, notwendig ist.
3) Die Voraussetzung, dass D beschränkt ist, ist ebenfalls notwendig: Betrachte dazu z.B. die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Wir wählen $\varepsilon = 1$. Es sei $\delta > 0$ beliebig. Dann gilt für $x = \frac{1}{\delta}$ und $y = \delta + \frac{1}{\delta}$, dass $|x - y| \leq \delta$ ist, aber

$$|f(x) - f(y)| = |(y - x)(y + x)| = \delta(\delta + \frac{2}{\delta}) = \delta^2 + 2 > 1.$$

Beweis. Angenommen, f sei stetig, aber nicht gleichmäßig stetig auf D. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $\delta > 0$ die Aussage

$$|z - w| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - f(w)| \leq \varepsilon$$

falsch ist. D.h. es existieren $z_\delta, w_\delta \in D$ mit

$$|z_\delta - w_\delta| \leq \delta, \quad \text{aber} \quad |f(z_\delta) - f(w_\delta)| > \varepsilon.$$

Wir wählen $\delta = \frac{1}{k}$ für $k \in \mathbb{N}$. Hieraus erhalten wir Folgen $(z_k)_k$, $(w_k)_k \subseteq D$ mit

$$|z_k - w_k| \leq \frac{1}{k}, \tag{5.6}$$

und

$$|f(z_k) - f(w_k)| > \varepsilon. \tag{5.7}$$

Nun ist $(z_k)_k$ beschränkt, da D beschränkt ist. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 3.26) existiert eine Teilfolge $(z_{k_j})_j$, die konvergiert, also $z_{k_j} \to z_0 \in \mathbb{C}$, $j \to \infty$. Da D abgeschlossen ist, folgt $z_0 \in D$. Wegen (5.6) folgt außerdem, dass $w_{k_j} \to z_0$, $j \to \infty$. Da f stetig ist auf D, folgt hieraus $f(w_{k_j}) \to f(z_0)$, $j \to \infty$, sowie $f(z_{k_j}) \to f(z_0)$, $j \to \infty$. Widerspruch zu (5.7). □

Wir betrachten im Folgenden reellwertige Funktionen. Wir zeigen eine erste Aussage zu Extremwerten stetiger Funktionen.

Satz 5.16. *Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $D \neq \emptyset$, abgeschlossen und beschränkt, und $f : D \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann nimmt f auf D ihr Maximum und Minimum an, d.h. es existieren $z_*, z^* \in D$ mit*

$$f(z_*) = \min_{z \in D} f(z) = \min\{f(z) \,|\, z \in D\},$$
$$f(z^*) = \max_{z \in D} f(z) = \max\{f(z) \,|\, z \in D\}.$$

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $s := \sup f(D) < \infty$ ist. Wir setzen $\alpha_n := s - \frac{1}{n} < s$, $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 2.14 existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $z_n \in D$ mit

$$\alpha_n < f(z_n) \leq s.$$

Wegen $\alpha_n \to s$, $n \to \infty$, folgt auch $f(z_n) \to s$, $n \to \infty$ (Satz 3.11). Andererseits ist $(z_n)_n$ beschränkt, da D beschränkt ist. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 3.26) existiert eine konvergente Teilfolge $(z_{n_j})_j$ mit $z_{n_j} \to z_0 \in \mathbb{C}$, $j \to \infty$. Da D abgeschlossen ist, gilt $z_0 \in D$. Da f auf D stetig ist, folgt nun $f(z_{n_j}) \to f(z_0)$, $j \to \infty$, außerdem wurde

zuvor $f(z_{n_j}) \to s$, $j \to \infty$ gezeigt. Somit muss $s = f(z_0)$ gelten. Setze $z^* = z_0$.
Noch zu zeigen: $\sup f(D) < \infty$. Angenommen, $\sup f(D) = \infty$. Wir setzen dann $\alpha_n := n$, $n \in \mathbb{N}$. Da $f(D)$ als unbeschränkt angenommen wurde, existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $z_n \in D$ mit $f(z_n) > n$. Andererseits existiert (analog zu oben) eine Teilfolge $(z_{n_j})_j$ mit $z_{n_j} \to z_1 \in D$, $j \to \infty$. Da f stetig ist, folgt $f(z_{n_j}) \to f(z_1)$, $j \to \infty$. Insbesondere ist die konvergente Folge $(f(z_{n_j}))_j$ beschränkt. Widerspruch zu $f(z_n) > n$.
Die Aussage für das Minimum lässt sich analog zeigen. □

Bemerkung. 1) Satz 5.16 impliziert insbesondere, dass f auf D beschränkt ist, mit $|f(z)| \leq \max\{|f(z_*)|, |f(z^*)|\}$, $z \in D$.

2) Die Voraussetzungen, dass D abgeschlossen und beschränkt ist, sind notwendig:
(i) Die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, ist unbeschränkt und $\max_{x\in[0,\infty)} f(x)$ existiert nicht. Hier ist $D = [0, \infty)$ unbeschränkt.
(ii) Die Funktion $g : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, ist beschränkt mit $\inf_{x\in(0,1]} g(x) = 0$, jedoch nimmt g das Minimum nicht an. Hier ist $D = (0, 1]$ nicht abgeschlossen.

Wir betrachten nun auf einem (abgeschlossenen und beschränkten) Intervall definierte, reellwertige stetige Funktionen. Hier lässt sich zeigen, dass die Funktion auch jeden Wert zwischen dem Minimum und dem Maximum annimmt. Insbesondere kann der Satz verwendet werden, um die Existenz von Nullstellen einer stetigen Funktion zu zeigen.

Satz 5.17 (Zwischenwertsatz). *Es sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und $f : I \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $\max_I f$ und $\min_I f$ an, d.h.*

$$f([a, b]) = [\min_I f, \max_I f].$$

Wir beweisen zunächst einen Spezialfall.

Satz 5.18 (Nullstellensatz). *Es sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und $f : I \to \mathbb{R}$ sei stetig. Es gelte $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ (bzw. $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$). Dann besitzt f mindestens eine Nullstelle in I, d.h. es existiert ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) = 0$.*

Beweis. Wir setzen $N := \{x \in I \mid f(x) \leq 0\}$ und $c := \inf N$. Nach Voraussetzung ist $N \neq \emptyset$ und nach unten beschränkt, also existiert $\inf N$.
Behauptung: $f(c) = 0$. Angenommen, $f(c) < 0$. Dann existiert nach Satz 5.8 ein $r > 0$ mit

$$f(x) < 0, \qquad c - r < x \leq c.$$

Widerspruch zu $c = \inf N$ als untere Schranke von N.
Angenommen, $f(c) > 0$. Dann existiert wiederum nach Satz 5.8 ein $\tilde{r} > 0$ mit

$$f(x) > 0, \qquad c \leq x < c + \tilde{r}.$$

Widerspruch zu $c = \inf N$ als größte untere Schranke von N. D.h. es muss $f(c) = 0$ gelten. □

Beweis von Satz 5.17. Da $I = [a, b]$ abgeschlossen und beschränkt ist, existieren nach Satz 5.16 $\max_I f = f(x^*)$ und $\min_I f = f(x_*)$. Ist $f(x_*) = f(x^*)$, so ist $f([a, b]) = \{f(x_*)\}$. Es gelte also $f(x_*) < f(x^*)$. Sei $y_0 \in (f(x_*), f(x^*))$. Ohne Einschränkung sei $x_* < x^*$. Wir setzen $g : [x_*, x^*] \to \mathbb{R}$, $g(x) = y_0 - f(x)$. Dann ist $g(x_*) = y_0 - f(x_*) > 0$ und $g(x^*) = y_0 - f(x^*) < 0$. Nach Satz 5.18 existiert also ein $x_0 \in [x_*, x^*] \subseteq [a, b]$ mit $0 = g(x_0) = y_0 - f(x_0)$, d.h. $y_0 = f(x_0)$. □

Korollar 5.19. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und $f : I \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist $f(I)$ ein Intervall.*

Beweis. □

Beispiel. Wir betrachten die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x)$. Nach Definition der Exponentialfunktion ist $f(0) = 1$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots \geq 1 + x \geq 1, \qquad x \geq 0,$$

und somit $f(x) \geq 1 + x \to \infty$ für $x \to \infty$. Nach Korollar 5.19 folgt $f([0, \infty)) = [1, \infty)$.

Wir wollen nun noch eine Aussage zur Stetigkeit der Umkehrfunktion zeigen. Dazu betrachten wir strikt monotone Funktionen.

Definition 5.20 ((Strikt) monotone Funktionen). Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$, und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt *(strikt) monoton wachsend*, falls

$$f(x) \leq f(y) \quad (\text{bzw. } f(x) < f(y)) \qquad \text{für alle } x, y \in D \text{ mit } x < y,$$

und f heißt *(strikt) monoton fallend*, falls

$$f(x) \geq f(y) \quad (\text{bzw. } f(x) > f(y)) \qquad \text{für alle } x, y \in D \text{ mit } x < y.$$

Ist f (strikt) monoton wachsend oder fallend, so heißt f *(strikt) monoton.*

Erinnerung: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$, $f : D \to \mathbb{R}$. Existiert eine Funktion $g : f(D) \to \mathbb{R}$ mit $g(f(x)) = x$, $x \in D$, und $f(g(y)) = y$, $y \in f(D)$, so heißt g *Umkehrfunktion* von f. Notation: $g =: f^{-1}$.

Bemerkung. Ist $f : D \to \mathbb{R}$ strikt monoton, so ist f injektiv. Somit existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$. Ist f strikt monoton wachsend (fallend), so ist auch f^{-1} strikt monoton wachsend (fallend).
Beweis: Es sei f strikt monoton wachsend. Seien $y_1, y_2 \in f(D)$, $y_1 < y_2$. Dann existieren $x_1, x_2 \in D$ mit $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Wegen $y_1 < y_2$ muss $x_1 \neq x_2$ sein Angenommen, $x_1 > x_2$. Dann folgt nach Voraussetzung an f, dass $y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$ sein muss. Widerspruch.

Satz 5.21. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ sei strikt monoton wachsend (bzw. fallend). Dann ist $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ stetig und strikt monoton wachsend (bzw. fallend).*

Beweis. Die Existenz und strikte Monotonie von f^{-1} folgt aus obiger Bemerkung. Es bleibt zu zeigen, dass f^{-1} stetig ist. Ohne Einschränkung sei f strikt monoton wachsend. Setze $J := f(I)$. Sei $y_0 \in J$. Dann existiert ein $x_0 \in I$ mit $y_0 = f(x_0)$. Nach Voraussetzung ist I ein Intervall. Sei zunächst x_0 kein Randpunkt von I. Dann existiert ein $r > 0$ mit $[x_0 - r, x_0 + r] \subseteq I$. Sei $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon \leq r$ beliebig. Dann gilt insbesondere, dass $x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \in I$, und $x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon$. Da f strikt monoton wachsend ist, folgt hieraus

$$f(x_0 - \varepsilon) < y_0 < f(x_0 + \varepsilon).$$

Somit existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mit $[y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subseteq (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$. Sei nun $y \in J$ mit $|y - y_0| \leq \delta$. Dann ist $f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon)$. Da auch f^{-1} strikt monoton wachsend ist, erhalten wir

$$x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon,$$

also $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |f^{-1}(y) - x_0| \leq \varepsilon$. D.h. f^{-1} ist stetig in y_0.
Ist andererseits x_0 ein Randpunkt von I, so betrachten wir nur links- bzw. rechtsseitige Umgebungen von x_0 bzw. y_0 und schließen analog auf die Stetigkeit. □

Beispiel. (a) Sei $Z := [-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}] \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, und $f : Z \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \in [-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}], \\ x - \frac{1}{2}, & x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}], \end{cases}$$

sowie $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(y) := \begin{cases} y - \frac{1}{2}, & y \in [-1, 0] \\ y + \frac{1}{2}, & y \in (0, 1]. \end{cases}$$

f ist stetig auf Z und strikt monoton wachsend, außerdem ist $g = f^{-1}$, da $f(g(y)) = y$, $y \in [-1, 1]$, und $g(f(x)) = x$, $x \in Z$. g ist ebenfalls strikt monoton wachsend, aber g ist unstetig in 0. Dies steht nicht im Widerspruch zu Satz 5.21, da Z kein Intervall ist.

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$. Die Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ ist stetig und strikt monoton wachsend mit $g([0, \infty)) = [0, \infty)$.
Beweis: Betrachte dazu $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^k$. f ist stetig, da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^k$ als Polynom stetig ist, und strikt monoton wachsend. g ist die Umkehrfunktion von f und somit nach Satz 5.21 stetig.

Definition 5.22. Es seien $D \subseteq E \subseteq \mathbb{C}$, $D \neq \emptyset$, und $f : D \to \mathbb{C}$. Eine Funktion $\tilde{f} : E \to \mathbb{C}$ heißt *Fortsetzung* von f auf E, falls $f(z) = \tilde{f}(z)$ gilt für alle $z \in D$. Entsprechend heißt dann f *Einschränkung* von $\tilde{f}$ auf D. Notation: $f = \tilde{f}|_D$. Sind zusätzlich $f, \tilde{f}$ stetig, so heißt $\tilde{f}$ *stetige Fortsetzung* von f.

Beispiel. (a) Betrachte $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$. f ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und besitzt eine stetige Fortsetzung $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1}, & x \neq -1, \\ -2, & x = -1, \end{cases}$$

d.h. $\tilde{f}(x) = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) Betrachte $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$. g ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, besitzt aber keine stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R}$, da $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ nicht existiert.

(c) Im Gegensatz zum Beispiel (b) ist die Funktion $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ beschränkt, besitzt jedoch auch keine stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R}$.

In Beispiel (b),(c) können g bzw. h jedoch unstetig auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden, z. B. in (c) durch $\tilde{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tilde{h}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

Bemerkung. Ist $D \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ ein Häufungspunkt von D, $E := D \cup \{z_0\}$, $f : D \to \mathbb{C}$ gleichmäßig stetig, dann existiert eine gleichmäßig stetige Fortsetzung $\tilde{f} : E \to \mathbb{C}$ von f. (Ohne Beweis).

5.3. Gleichmäßige Konvergenz

Wir betrachten in diesem Abschnitt *Funktionenfolgen*, d.h. Folgen, deren Folgenglieder nicht Elemente aus $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, sondern Funktionen sind. Zu unterscheiden sind dabei zwei verschiedene Konvergenzbegriffe, den Begriff der *punktweisen Konvergenz*, welcher für festes z das Verhalten der skalarwertigen Folge $(f_n(z))_n$ untersucht, und den Begriff der *gleichmäßigen Konvergenz*, welcher das Verhalten von $(f_n(z))_n$ gleichzeitig für alle z aus dem Definitionsbereich untersucht.

Definition 5.23 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz). Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$, $D \neq \emptyset$, und $f, f_n : D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) Die Funktionenfolge $(f_n)_n$ heißt *punktweise konvergent* auf D gegen f, falls für jedes $z \in D$

$$f_n(z) \to f(z), \quad n \to \infty,$$

d.h. falls für jedes $z \in D$ und alle $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon, z) \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon, z).$$

(ii) Die Funktionenfolge $(f_n)_n$ heißt *gleichmäßig konvergent* auf D gegen f, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon) \text{ und alle } z \in D. \tag{5.8}$$

Notation: $f_n \to f$ (pktw.), $n \to \infty$, bzw. $f_n \to f$ (glm.), $n \to \infty$.

Formal ausgedrückt lautet die Bedingung der punktweisen Konvergenz

$$\forall z \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon, z) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : \qquad |f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon,$$

und die Bedingung der gleichmäßigen Konvergenz

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall z \in D : \qquad |f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon.$$

Beispiel. (a) Wir betrachten $D = [0, 1]$, $f_n : D \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

d.h. $(f_n)_n$ konvergiert punktweise gegen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$. Die Funktionen f_n sind stetig auf $[0, 1]$, der punktweise Grenzwert f jedoch nicht. Die Funktionenfolge $(f_n)_n$ konvergiert nicht gleichmäßig gegen f: Um dies zu zeigen, wählen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ den Punkt $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \in (0, 1)$. Dann ist

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2},$$

sodass (5.8) nicht erfüllt werden kann.

(b) Wir betrachten $D = [0, 1]$, $f_n : D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx, & x \in [0, \frac{1}{2n}), \\ 2 - 2nx, & x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}), \\ 0, & x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Dann gilt für jedes $x \in [0, 1]$, dass $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ ist, da für festes $x > 0$ nach Definition $f_n(x) = 0$ ist für $nx \geq 1$ bzw. $n \geq \frac{1}{x}$. Die Grenzfunktion $f = 0$ ist stetig auf $[0, 1]$. Jedoch konvergiert $(f_n)_n$ nicht gleichmäßig gegen f. Setze dazu $x_n := \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $|f_n(x_n) - f(x_n)| = 1$.

Bemerkung. 1) Konvergiert $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen f, so konvergiert $(f_n)_n$ auch punktweise gegen f. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

2) $(f_n)_n$ konvergiert genau dann gleichmäßig auf D gegen f, wenn

$$\|f_n - f\|_\infty := \|f_n - f\|_{\infty,D} := \sup_{z\in D} |f_n(z) - f(z)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Wie in Beispiel (a) gesehen, ist die Grenzfunktion einer punktweise konvergierenden Funktionenfolge mit stetigen Folgengliedern im Allgemeinen nicht stetig. Ist die Konvergenz gleichmäßig, so ist die Grenzfunktion stetig.

Satz 5.24. *Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$, $D \neq \emptyset$, $f_n, f : D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Die Funktionenfolge $(f_n)_n$ konvergiere gleichmäßig gegen f. Sind f_n, $n \in \mathbb{N}$, stetig, so ist auch f stetig.*

Beweis. Sei $z_0 \in D$. Zu zeigen: f ist stetig in z_0. Sei $\varepsilon > 0$. Da $f_n \to f$ gleichmäßig, existiert ein $N = N(\varepsilon) > 0$ so, dass

$$|f_n(z) - f(z)| \le \varepsilon \qquad \text{für alle } n \ge N \text{ und alle } z \in D. \tag{5.9}$$

Dan nach Voraussetzung f_N stetig ist in z_0, existiert außerdem ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mit

$$|f_N(z) - f_N(z_0)| \le \varepsilon \qquad \text{für alle } z \in D \text{ mit } |z - z_0| \le \delta. \tag{5.10}$$

Für $z \in D$, $|z - z_0| \le \delta$, folgt aus (5.9) und (5.10), dass

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\le |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| \\ &\le \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon, \end{aligned}$$

d.h. f ist stetig in z_0. $\square$

Bemerkung. In der Situation von Satz 5.24 lassen sich Grenzwerte vertauschen: Sind $(f_n)_n$ stetig, $f_n \to f$ gleichmäßig, dann ist für $z_0 \in D$

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{z\to z_0} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = f(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \lim_{n\to\infty} f_n(z),$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{z\to z_0} f_n(z) = \lim_{z\to z_0} \lim_{n\to\infty} f_n(z).$$

Ist $f_n \to f$ punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergent, so ist dies im Allgemeinen falsch. Vergleiche Beispiel (a): Hier ist $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to 1-} f_n(x) = 1$, aber $\lim\limits_{x\to 1-} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Wir wenden das Konzept der gleichmäßigen Konvergenz auf sogenannte Funktionenreihen an. Dies kann unter anderem dazu verwendet werden, die Stetigkeit der durch den Reihenwert definierten Funktion zu zeigen.

Definition 5.25. Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$, $D \neq \emptyset$, und $f_k : D \to \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}_0$ die n-te Partialsumme

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} f_k.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $s_n : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Die Funktionenfolge $(s_n)_n$ heißt *Funktionenreihe* und wird mit $\sum\limits_{k\ge 0} f_k$ bezeichnet. Die Funktionenreihe $\sum\limits_{k\ge 0} f_k$ heißt

- *konvergent*, falls für jedes $z \in D$ die Folge $(s_n(z))_n$ konvergiert,
- *absolut konvergent*, falls für jedes $z \in D$ die Folge $(s_n(z))_n$ absolut konvergiert,
- *gleichmäßig konvergent*, falls die Folge $(s_n)_n$ gleichmäßig auf D konvergiert.

Bemerkung. Es gilt

1) $\sum\limits_{k} f_k$ absolut konvergent $\Rightarrow \sum\limits_{k} f_k$ konvergent;
2) $\sum\limits_{k} f_k$ absolut konvergent $\substack{\not\Rightarrow \\ \not\Leftarrow} \sum\limits_{k} f_k$ gleichmäßig konvergent.

Beweis: Zu 2) $\not\Rightarrow$: Sei $D = B(0,1)$, und $f_k : D \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\sum_{k\geq 0} f_k(z) = \sum_{k\geq 0} z^k$, $z \in D$, die geometrische Reihe. Diese konvergiert absolut mit Reihenwert

$$s(z) := \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \qquad z \in B(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}.$$

Ist s_n die n-te Partialsumme, so gilt

$$|s(z) - s_n(z)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} z^k = \frac{z^{n+1}}{1-z}.$$

Wählt man $x_n = 2^{-\frac{1}{n+1}} \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$, so ist $|s(x_n) - s_n(x_n)| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-2^{-\frac{1}{n+1}}} \geq \frac{1}{4}$, d.h. $(s_n)_n$ konvergiert nicht gleichmäßig gegen s.
Zu 2) $\not\Leftarrow$: Setzt man $f_k(x) := \frac{(-1)^k}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, so konvergiert $\displaystyle\sum_{k\geq 1} f_k$ gleichmäßig, aber nicht absolut.

Ergänzend zu den bisher bekannten Konvergenzkriterien für Reihen, die zum Beweis der Konvergenz bzw. absoluten Konvergenz anwendbar sind, zeigen wir nun ein Konvergenzkriterium für Funktionenreihen, welches auch die gleichmäßige Konvergenz liefert.

Satz 5.26 (Weierstraßsches Majorantenkriterium). *Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$, $D \neq \emptyset$, und $f_k : D \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Existiert eine in $\mathbb{R}$ konvergente Reihe $\sum_{k\geq 0} a_k$ mit $\|f_k\|_{\infty,D} \leq a_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, so ist die Funktionenreihe $\sum_{k\geq 0} f_k$ absolut und gleichmäßig konvergent.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt für alle $z \in D$, $k \in \mathbb{N}_0$, dass $|f_k(z)| \leq a_k$ ist. Somit konvergiert $\sum_k f_k(z)$ absolut nach dem Majorantenkriterium (Satz 4.9). Für $n \in \mathbb{N}_0$, $z \in D$ gilt weiter

$$|s_n(z) - s(z)| = |\sum_{k=0}^{n} f_k(z) - \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k,$$

wobei wir im vorletzten Schritt (4.3) aufgrund der absoluten Konvergenz der Reihe anwenden können.
Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $\sum_k a_k$ konvergiert, existert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N,$$

und somit

$$|s_n(z) - s(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N, z \in D,$$

womit die gleichmäßige Konvergenz gezeigt ist. □

BEISPIEL. Die Funktionenreihe $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{\cos(kx)}{k^2}$ konvergiert absolut und gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.

Beweis: Für $y\in\mathbb{R}$ ist $|\cos(y)|\leq 1$, somit gilt für alle $x\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}$,

$$\left|\frac{\cos(kx)}{k^2}\right|\leq\frac{1}{k^2}=:a_k.$$

Da $\sum_{k\geq 1}a_k=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}$ konvergiert, folgt die Behauptung aus Satz 5.26.

Wir wenden das Weierstraßsche Majorantenkriterium auf Potenzreihen an. Wir erhalten die gleichmäßige Konvergenz von Potenzreihen auf jedem abgeschlossenen Kreis strikt innerhalb des offenen Konvergenzkreises.

KOROLLAR 5.27. *Es sei $\sum_{n\geq 0}a_nz^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho>0$. Sei $r\in(0,\rho)$. Dann konvergiert $\sum_{n\geq 0}a_nz^n$ absolut und gleichmäßig auf $\bar{B}(0,r)$.*

BEWEIS. Setze $D:=\bar{B}(0,r)$, und $f_n(z):=a_nz^n$ für $z\in D$ und $n\in\mathbb{N}_0$. Dann gilt für jedes $n\in\mathbb{N}_0$

$$\|f_n\|_{\infty,D}=\sup_{z\in\bar{B}(0,r)}|a_nz^n|\leq|a_n|r^n.$$

Da jede Potenzreihe im Innern des Konvergenzkreises konvergiert (Satz 4.27), konvergiert $\sum_{n\geq 0}|a_n|r^n$, d.h. die Voraussetzung von Satz 5.26 ist erfüllt. □

BEMERKUNG. Im Allgemeinen ist die Konvergenz auf $B(0,\rho)$ nicht gleichmäßig. Z.B. konvergiert $\sum_{n\geq 0}z^n$ gleichmäßig auf $\bar{B}(0,r)$ für jedes $r\in(0,1)$, aber konvergiert nicht gleichmäßig auf $B(0,1)$ gegen $\frac{1}{1-z}$, vergleiche die Bemerkung nach Definition 5.25.

5.4. Die Exponentialfunktion, der Logarithmus und die Definition von π

Wir zeigen in diesem Abschnitt einige Eigenschaften der reellen Exponentialfunktion und definieren dann deren Umkehrfunktion, den Logarithmus. Wir erinnern an die Definition der Exponentialreihe auf $\mathbb{C}$ als Potenzreihe

$$\exp(z):=e^z:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3!}+\dots,\quad z\in\mathbb{C}.$$

Wir bezeihnen die Einschränkung auf $\mathbb{R}$ auch mit $\exp_{\mathbb{R}}:=\exp|_{\mathbb{R}}$.

SATZ 5.28. *Es gilt*

(i) $0<e^x<1$ *für* $x<0$, *und* $1<e^x<\infty$ *fir* $x>0$.

(ii) $\exp_{\mathbb{R}}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *ist strikt monoton wachsend.*

(iii) Sei $\alpha\in\mathbb{Q}$. Dann ist

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=\infty,$$

d.h. die Exponentialfunktion wächst schneller als jede Potenz.

(iv)

$$\lim_{x\to-\infty}e^x=0.$$

(v) $\exp_{\mathbb{R}} = (0, \infty)$.

Beweis. (i) Für $x > 0$ ist $\exp(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 1$. Hieraus erhalten wir für $x < 0$

$$e^x = e^{-(-x)} = \frac{1}{e^{-x}} \in (0, 1).$$

(ii) Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > y$ ist $y - x < 0$, also nach (i) und Lemma 4.21

$$e^x - e^y = e^x(1 - e^{-x}e^y) = e^x(1 - e^{y-x}) > 0.$$

(iii) Ohne Einschränkung sei $\alpha > 0$. Setze $n := [\alpha] + 1 > \alpha$. Für $x > 0$ gilt

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

und somit wegen der Monotonie der Potenzen

$$\frac{e^x}{x^\alpha} > \frac{e^x}{x^n} > \frac{x^{n+1}}{x^n} \frac{1}{(n+1)!} = \frac{x}{(n+1)!} \to \infty, \quad x \to \infty.$$

(iv) Aus (iii) mit $\alpha = 0$ folgt $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$, also ist

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{e^y} = 0.$$

(v) $\exp_{\mathbb{R}} = (0, \infty)$ folgt aus (i), (iii) und dem Zwischenwertsatz (Satz 5.17). □

Nach Satz 5.28 ist $\exp_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und strikt monoton wachsend mit $\exp_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. Nach Satz 5.21 existiert also die Umkehrfunktion $\exp_{\mathbb{R}}^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Sie ist stetig und strikt monoton wachsend.

Definition 5.29 (Der natürliche Logarithmus). Wir definieren

$$\log := (\exp_{\mathbb{R}})^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

als die stetige und strikt monoton wachsende Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$. log heißt *(natürlicher) Logarithmus.*

Bemerkung. 1) Es gilt $\log 1 = 0$ (da $e^0 = 1$) und $\log e = 1$ (da $e^1 = e$).
2) Für $x, y \in (0, \infty)$ gilt

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y),$$
$$\log(\frac{x}{y}) = \log(x) - \log(y).$$

Wir verwenden den Logarithmus nun, um *allgemeine Potenzen* zu definieren. Bisher haben wir lediglich rationale Potenzen definiert, d.h. wir haben für $a > 0$ und $r \in \mathbb{Q}$ den Ausdruck a^r definiert. Wir machen zunächst folgende Beobachtung.

Bemerkung. Für $a > 0$, $r \in \mathbb{Q}$ gilt $a^r = e^{r \log a}$.
Beweis: .

Wir verwenden die rechte Seite dieser Identität zur Definition allgemeiner Potenzen.

Definition 5.30 (Allgemeine Potenzen). Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$a^x := e^{x \cdot \log a}.$$

Es gelten auch hier die für rationale Potenzen schon bekannten Potenzgesetze.

Satz 5.31. *Für $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

(i) $a^x a^y = a^{y+y}$, *und* $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

(ii) $a^x b^x = (ab)^x$, *und* $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$.

(iii) $\log(a^x) = x \log a$, *und* $(a^x)^y = a^{xy}$.

(iv) Sei $\alpha > 0$. *Dann gilt*

$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha \log x = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0.$$

Beweis. □

Im Folgenden soll nun die Zahl π definiert werden. Dazu zeigen wir zunächst mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass der Cosinus im Intervall $(0, 3)$ mindestens eine Nullstelle besitzt, und verwenden diese Nullstelle dann zur Definition von π.

Wir erinnern zunächst an die Definition von Sinus und Cosinus als Potenzreihen auf $\mathbb{C}$:

$$\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$
$$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Außerdem wurde bereits gezeigt, dass $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$ ist für $z \in \mathbb{C}$. Wir schränken im Weiteren Sinus und Cosinus auf $\mathbb{R}$ ein, d.h. wir betrachten $\cos|_{\mathbb{R}}$ und $\sin|_{\mathbb{R}}$.

Vorüberlegung: Für $k \geq 2$ und $0 < x < 3$ ist

$$\frac{x^k}{k!} > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Hieraus folgt, dass die reellen Funktionen sin, cos durch alternierende Reihen mit betragsmäßig monoton fallenden Reihengliedern definiert sind. Aus dem Leibnizkriterium (vergleiche Beweis von Satz 4.6) erhalten wir für $0 < x < 3$

$$C_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} = C_4(x),$$
$$S_3(x) = x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} = S_5(x).$$

Hieraus lesen wir $\cos(2) < 1 - 2 + \frac{16}{24} = -\frac{1}{3} < 0$ ab. Weiter ist $\cos(0) = 1$, und $\cos : [0, 2] \to \mathbb{R}$ ist stetig. Nach dem Nullstellensatz (Satz 5.18) existiert also ein $x_0 \in [0, 2]$ mit $\cos(x_0) = 0$. Dies erlaubt die folgenden Definition.

Definition 5.32 (Definition von π). Wir setzen

$$\pi := 2\min\{x > 0 \,:\, \cos(x) = 0\}.$$

Bemerkung. 1) Die erste positive Nullstelle von C_2 bzw. C_4 ist $\alpha = \sqrt{2}$ bzw. $\beta = \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}$, hieraus folgt die grobe Abschätzung $1,4 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < 1,6$ (geeignete Abschätzungen für Wurzeln werden später noch diskutiert).

2) Wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $x \in \mathbb{R}$, und $\sin x > x - \frac{x^3}{6} > 0$ für $x \in (0, 2]$, folgt $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Aus den Additionstheoremen erhält man nun unter anderem

$$\sin(\pi) = 2\sin(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2}) = 0, \qquad \sin(2\pi) = 0,$$
$$\cos(\pi) = \cos^2(\frac{\pi}{2}) - \sin^2(\frac{\pi}{2}) = -1, \qquad \cos(2\pi) = 1.$$

Weiter gilt

$$e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1,$$
$$e^{\pi i} = -1.$$

Satz 5.33. *Es gilt*

(i) $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2\pi i k$ *für ein* $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) $e^z = -1 \Leftrightarrow z = \pi i + 2\pi i k$ *für ein* $k \in \mathbb{Z}$.

(iii) $\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$,
$\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$, *für* $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

(iv) Für $x \in \mathbb{R}$ *ist*

$$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z},$$
$$\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

(v) $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist auf* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *strikt monoton wachsend, und* $\sin(x) > 0$ *für alle* $x \in (0, \pi)$.

(vi) $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$,
$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$, *für* $x \in \mathbb{R}$.

(vii) $\cos(\mathbb{R}) = \sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Beweis. □

Wir definieren abschließend den Tangens sowie die Arcusfunktionen als Umkehrfunktionen von Sinus, Cosinus und Tangens. Zur Definition des Tangens verwenden wir Satz 5.33 (iv).

Definition 5.34 (Tangens). Wir definieren den Tangens als

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \{x = \frac{\pi}{2} + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Zur Definition der Arcusfunktionen wenden wir Satz 5.21 an. Nach Satz 5.33 bzw. analogen Überlegungen für cos ist

$$\begin{aligned}
&\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1] \text{ strikt monoton wachsend und stetig,}\\
&\cos : [0,\pi] \to [-1,1] \text{ strikt monoton fallend und stetig,}\\
&\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R} \text{ strikt monoton wachsend und stetig.}
\end{aligned}$$

Die Definitionsbereiche sind jeweils maximal bezüglich der strikten Monotonie gewählt. Dass genau diese Intervalle zur Definition der Arcusfunktionen gewählt werden, ist Konvention. Man könnte z.B. zu sin auch auf $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ eine Umkehrfunktion definieren.

Definition 5.35 (Arcusfunktionen). Wir definieren die Funktionen

$$\begin{aligned}
\arcsin &:= (\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]})^{-1} : [-1,1] \to \mathbb{R},\\
\arccos &:= (\cos|_{[0,\pi]})^{-1} : [-1,1] \to \mathbb{R},\\
\arctan &:= (\tan|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})})^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

KAPITEL 6

Differenzierbarkeit von Funktionen

In diesem Kapitel schränken wir uns darauf ein, Funktionen mit Definitionsbereich und Bildbereich in $\mathbb{R}$ zu betrachten. Die im Folgenden betrachteten Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ sind auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert. Wir setzen voraus, dass I nichttrivial ist, d.h. $I \neq \{x_0\}$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$.

6.1. Definition und erste Eigenschaften

Wir führen den Begriff der Differenzierbarkeit einer Funktion ein. Wie auch bei der Stetigkeit handelt es sich hierbei um einen lokale Eigenschaft einer Funktion. Anschaulich lässt sich die Differenzierbarkeit in einem Punkt auch als die Frage verstehen, ob sich eine Funktion lokal durch eine Gerade (die Tangente) approximieren lässt (vergleiche dazu auch die nachfolgende Bemerkung).

Definition 6.1. Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und $a \in I$. f heißt *in a differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{6.1}$$

in $\mathbb{R}$ existiert. Dann bezeichnet $f'(a)$ die *Ableitung* von f in a. Ist f in a differenzierbar für jedes $a \in I$, so heißt f *differenzierbar auf I*.

Notation: $f'(a)$, $\frac{d}{dx} f(a)$.

Bemerkung. (1) In (6.1) gilt $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

(2) Ist $a \in I$ ein Randpunkt des Intervalls, so wird in (6.1) nur der rechts- bzw. linksseitige Grenzwert betrachtet.

(3) Anschaulich lässt sich die Definition der Ableitung folgendermaßen verstehen: Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ in $a \in I$ differenzierbar, und $y \in I$ mit $y \neq a$. Die durch

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h(x) := f(a) + \frac{f(y) - f(a)}{y - a}(x - a)$$

definierte Funktion ist die *Sekante* durch $(a, f(a))$ und $(y, f(y))$ mit Steigung

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} \to f'(a), \quad y \to a.$$

Für $y \to a$ strebt also die Sekante gegen die *Tangente* von f in $(a, f(a))$, gegeben durch

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Für $y \neq a$ heißt

$$\frac{f(y)-f(a)}{y-a}$$

Differenzenquotient von f in y bzgl. a.

Beispiel. (a) Sei $m, c \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + c$. Dann ist f in jedem $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{mx + c - (ma + c)}{x - a} = m.$$

(b) Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Sei $a \in (0, \infty)$. Dann ist

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Für $a = 0$ ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \infty,$$

d.h. f ist in 0 nicht differenzierbar. Insgesamt erhalten wir: f ist auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0, \infty)$.

Wir zeigen, dass eine in einem Punkt differenzierbare Funktion dort stetig ist. Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch, vergleiche Beispiel (b) für $a = 0$.

Lemma 6.2. *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $a \in I$. Dann ist f stetig in a.*

Beweis. Für $x \in I$, $x \neq a$, gilt

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) \to f'(a) \cdot 0 = 0, \quad x \to a,$$

nach den Rechenregeln für Grenzwerte. □

Die folgenden Rechenregeln werden vielfach verwendet, um Ableitungen zu berechnen.

Satz 6.3. *Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ in $a \in I$ differenzierbar, und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

(i) (Linearität) $\alpha f + \beta g$ ist in a differenzierbar mit

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a).$$

(ii) (Produktregel) $f \cdot g$ ist in a differenzierbar mit

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(iii) (Quotientenregel) Es gelte zusätzlich $g(a) \neq 0$. Dann ist $\frac{f}{g}$ in a differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Beweis. (i) folgt aus Satz 5.6.
(ii) Für $x \in I$, $x \neq a$, gilt

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)+f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\ &\to f'(a)g(a)+f(a)g'(a), \quad x\to a,\end{aligned}$$

da f und g nach Voraussetzung in a differenzierbar und nach Lemma 6.2 dort stetig sind.
(iii) Ist $g(a) \neq 0$, so existiert aufgrund der Stetigkeit von g in a (Lemma 6.2) ein $r > 0$ mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ mit $|x-a| \leq r$. Folglich ist für $x \neq a$, $|x-a| \leq r$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}\right) &= \frac{1}{g(x)g(a)}\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}\\ &= \frac{1}{g(x)g(a)}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a)-f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)\\ &\to \frac{1}{(g(a))^2}(f'(a)g(a)-f(a)g'(a)), \quad x\to a,\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Stetigkeit und Differenzierbarkeit von f und g in a verwendet wurden. $\square$

Einschub: Wir notieren vier wichtige Grenzwerte, welche wir zur Berechnung der Ableitungen der Funktionen exp, log, sin und cos heranziehen werden.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} &= 1, &\qquad \lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y} &= 1,\\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} &= 1, &\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} &= 0.\end{aligned}$$

Beweis. Über die Potenzreihendarstellungen der jeweiligen Funktionen (Übung). Für den zweiten Grenzwert kann die Substitution $y = e^x - 1$ verwendet werden. $\square$

Beispiel. (c) Betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{e^x-e^a}{x-a} = e^a\frac{e^{x-a}-1}{x-a} \to e^a, \quad x\to a.$$

Also ist die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

(d) Sei $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. Dann ist $f_n'(x) = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$.
Beweis: (Induktion) Der Fall $n = 1$ ist in Beispiel (a) gezeigt. Es gelte die Behauptung für f_n. Dann ist $f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x \cdot f_n(x)$, mit Satz 6.3 (ii) folgt

$$f_{n+1}'(x) = 1\cdot f_n(x) + x\cdot nx^{n-1} = (n+1)x^n.$$

Wir zeigen eine etwas stärkere Eigenschaft als Lemma 6.2, welche wir im Beweis der Kettenregel verwenden werden.

Lemma 6.4. *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ in $a \in I$ differenzierbar. Dann existiert ein $r > 0$ und ein $K > 0$ so, dass*

$$|f(x)-f(a)| \leq K|x-a| \qquad \textit{für alle } x\in I,\ |x-a|\leq r.$$

Beweis. Nach Voraussetzung existiert $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$. Also existiert zu $\varepsilon = 1$ ein $r = r(\varepsilon) > 0$ mit

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| \leq 1 \qquad \text{für alle } x \in I \setminus \{a\},\ |x-a| \leq r,$$

und somit

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \leq 1 + |f'(a)| =: K \qquad \text{für alle } x \in I \setminus \{a\},\ |x-a| \leq r.$$

□

Ähnlich wichtig wie die eben bewiesene Produkt- bzw. Quotientenregel ist die Kettenregel. welche eine einfache Berechnung der Ableitung von Kompositionen von Funktionen erlaubt.

Satz 6.5 (Kettenregel). *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ in a differenzierbar, $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $f(I) \subseteq J$, und $g : J \to \mathbb{R}$ in $f(a)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ in a differenzierbar, und*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Beweis. Es sei zunächst $f'(a) \neq 0$. Sei $(x_n)_n \subseteq I \setminus \{a\}$ eine Folge mit $x_n \to a$ für $n \to \infty$. Da $f'(a) \neq 0$ ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n - a} \neq 0, \qquad n \geq N.$$

Für $n \geq N$ folgt $f(x_n) - f(a) \neq 0$, und

$$\begin{aligned}\frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} &= \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{f(x_n) - f(a)} \cdot \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \\ &\to g'(f(a)) \cdot f'(a), \quad n \to \infty,\end{aligned}$$

da f in a stetig ist, also $f(x_n) \to f(a)$, $n \to \infty$, gilt.
Sei nun $f'(a) = 0$. Nach Lemma 6.4 (für g) existieren ein $r > 0$ und ein $K > 0$ so, dass für alle $|f(x) - f(a)| \leq r$

$$\left|\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a}\right| \leq K \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \to K \cdot |f'(a)| = 0, \quad x \to a.$$

Hierbei verwenden wir, dass f in a stetig ist und somit ein $\delta > 0$ so existiert, dass $|x-a| \leq \delta$ die Bedingung $|f(x) - f(a)| \leq r$ impliziert. □

Beispiel. (e) Sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log x$. Dann gilt für $h \neq 0$ und $x > 0$ mit $x + h > 0$

$$\frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} = \frac{\log(1 + \frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} \to \frac{1}{x}, \quad h \to 0.$$

(f) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Sei $f_\alpha : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = x^\alpha$. Nach Definition ist

$$f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \cdot \log x} = (g \circ h)(x),$$

für $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x$ und $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = \alpha \log x$. Nach Satz 6.5 und Beispiel (c), (e) folgt für $x \in (0,\infty)$

$$f_\alpha'(x) = (g \circ h)'(x) = g'(h(x)) \circ h'(x) = e^{\alpha \cdot \log x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Satz 6.6 (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion). *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und strikt monoton und in $a \in I$ differenzierbar mit $f'(a) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ in $b := f(a)$ differenzierbar mit*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Beweis. Da f auf I strikt monoton und I ein Intervall ist, existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ und ist stetig nach Satz 5.21. Es sei $(y_n)_n \subseteq f(I) \setminus \{b\}$ eine Folge mit $y_n \to b$, $n \to \infty$. Da f^{-1} stetig ist, folgt $x_n := f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(b) = a$, $n \to \infty$. Ferner ist $x_n \neq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da f^{-1} strikt monoton ist. Somit gilt

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \left(\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}\right)^{-1} \to \frac{1}{f'(a)}, \quad n \to \infty.$$

□

Beispiel. (e) (zweiter Beweis) Aus Satz 6.6 für $\log = (\exp)^{-1} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ erhalten wir für $y \in (0,\infty)$

$$\log'(y) = ((\exp)^{-1})'(y) = \frac{1}{\exp(\log(y))} = \frac{1}{y}.$$

Wir führen noch einige Bezeichnungen ein.

Definition 6.7 (Einseitige Differenzierbarkeit). Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und $a \in I$. f heißt in a *rechts-* bzw. *linksseitig differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$\frac{d^+}{dx} f(a) := \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$
$$\frac{d^-}{dx} f(a) := \lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

in $\mathbb{R}$ existiert.

Bemerkung. 1) f ist genau dann in a differenzierbar, wenn $\frac{d^+}{dx} f(a)$ und $\frac{d^-}{dx} f(a)$ existieren und $\frac{d^+}{dx} f(a) = \frac{d^-}{dx} f(a)$ gilt. Dann ist $f'(a) = \frac{d^+}{dx} f(a) = \frac{d^-}{dx} f(a)$.

2) Ist $a \in I$ rechter oder linker Randpunkt des Intervalls I, so ist $f'(a) = \frac{d^+}{dx} f(a)$ bzw. $f'(a) = \frac{d^-}{dx} f(a)$.

Definition 6.8 (Höhere Ableitungen). Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf I differenzierbar und $a \in I$. Dann ist die *zweite Ableitung* von f in a durch

$$f''(a) := (f')'(a)$$

definiert, falls diese existiert. Iterativ definiert man für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, die *n-te Ableitung* von f in a durch

$$f^{(n)}(a) := (f^{(n-1)})'(a),$$

falls diese existiert (wobei $f^{(1)} = f'$, $f^{(0)} = f$ gesetzt wird).

Bemerkung. Zur Definition der zweiten Ableitung $f''(a)$ muss f' auf einem nichttrivialen Intervall definiert sein und nicht nur im Punkt a. Entsprechendes gilt für die höheren Ableitungen.

Definition 6.9 (Stetige Differenzierbarkeit). Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *stetig differenzierbar*, falls f auf I differenzierbar und $f' : I \to \mathbb{R}$ stetig ist.
Sei $n \in \mathbb{N}$. f heißt *n-mal differenzierbar* auf I, falls die n-te Ableitung von f für jedes $a \in I$ existiert. f heißt *n-mal stetig differenzierbar* auf I, falls f n-mal differenzierbar ist auf I und die n-te Ableitung $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f^{(n)}(x)$ auf I stetig ist.

Notation: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$\begin{aligned} C^0(I) &:= C(I;\mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig auf } I\}, \\ C^n(I) &:= \{f : I \to \mathbb{R} \mid f\ n\text{-mal stetig differenzierbar auf } I\}, \\ C^\infty(I) &:= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C^n(I). \end{aligned}$$

$C^\infty(I)$ wird auch als Raum der *unendlich oft differenzierbaren* Funktionen bezeichnet.

Beispiel. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, mit $f^{(n)} = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Hier gilt $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.
Sei $a \in (0, \infty)$, $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_a(x) = a^x$. Hier ist $g_a'(x) = (a^x)' = (e^{x\cdot\log a})' = a^x \cdot \log a$, $g_a^{(n)}(x) = a^x \cdot (\log a)^n$, und somit auch $g_a \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Beispiel. Es existiert eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf $\mathbb{R}$ stetig, aber nirgends differenzierbar ist. Vergleiche [**1**, Beispiel IV.1.13 (m)].

6.2. Mittelwertsatz, Monotonie und Konvexität

Wir wollen Ableitungen verwenden, um differenzierbare Funktionen näher auf ihr lokales Verhalten zu untersuchen. Am bekanntesten ist dabei sicherlich die Verwendung der ersten Ableitung zur Bestimmung lokaler Extrema. Wichtigster Satz in diesem Abschnitt ist der sogenannte Mittelwertsatz. Dieser wird verwendet, um aus dem Vorzeichen der ersten Ableitung Aussagen zur Monotonie von Funktionen zu erhalten. Wendet man letzteres auf die zweite Ableitung an, so erhält man Aussagen zur Konvexität von Funktionen.

Definition 6.10 (Maximum, Minimum). Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und $x_0 \in I$. f hat in x_0 ein *lokales Minimum* (bzw. ein *lokales Maximum*), falls ein $r > 0$ existiert mit

$$f(x_0) \leq f(x) \quad (\text{bzw. } f(x_0) \geq f(x)) \qquad \text{für alle } x \in I,\ |x - x_0| \leq r.$$

f hat in x_0 ein *globales Minimum* (bzw. ein *globales Maximum*), falls

$$f(x_0) \leq f(x) \quad (\text{bzw. } f(x_0) \geq f(x)) \qquad \text{für alle } x \in I.$$

f hat in x_0 ein *lokales* bzw. *globales Extremum*, falls f in x_0 ein lokales bzw. globales Minimum oder Maximum hat. In diesem Fall heißt x_0 *Extremalstelle* von f.

Außerhalb der Randpunkte des Intervalls haben wir folgende notwendige Bedingung für lokale Extrema.

Lemma 6.11. *Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ besitze in $x_0 \in I$ ein lokales Extremum, wobei x_0 kein Randpunkt des Intervalls I sei. Ist f in x_0 differenzierbar, so gilt $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. Es sei zunächst $f(x_0)$ ein lokales Minimum. Da x_0 kein Randpunkt ist, existiert ein $r > 0$ mit $J = (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq I$ und $f(x_0) \leq f(x)$, $x \in J$. Somit ist

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \geq 0, & x \in (x_0, x_0 + r), \\ \leq 0, & x \in (x_0 - r, x_0). \end{cases}$$

Für $x \to x_0$ folgt hieraus

$$0 \leq \frac{d^+}{dx} f(x_0) = \frac{d^-}{dx} f(x_0) \leq 0,$$

da f in x_0 differenzierbar ist. Somit ist $f'(x_0) = 0$ gezeigt. Ist $f(x_0)$ andernfalls ein lokales Maximum, so ist $-f(x_0)$ ein lokales Minimum von $-f$. Nach gerade gezeigtem folgt $-f'(x_0) = 0$. $\square$

Wir bezeichnen die möglichen Kandidaten für Extremalstellen (außerhalb des Rands) als kritische Punkte.

Definition 6.12. Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$. Dann heißt x_0 *kritischer Punkt* von f.

Im Folgenden seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Bemerkung. 1) Nach Lemma 6.11 ist jede Extremalstelle x_0 von f, wobei x_0 kein Randpunkt von I ist, ein kritischer Punkt. Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch. *Beispiel:* Betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Hier ist $f'(0) = 0$, aber 0 ist keine Extremalstelle von f.

2) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Nach Satz 5.16 existieren $\max_{[a,b]} f$ und $\min_{[a,b]} f$, und wir erhalten

$$\max_{x \in [a,b]} f(x) = f(a) \vee f(b) \vee \max\{f(x) \,|\, x \in (a, b) \text{ mit } f'(x) = 0\},$$

$$\min_{x \in [a,b]} f(x) = f(a) \vee f(b) \vee \min\{f(x) \,|\, x \in (a, b) \text{ mit } f'(x) = 0\}. \tag{6.2}$$

f nimmt die Extrema also entweder am Rand oder in einem kritischen Punkt an.

Der folgende Satz besagt, dass bei differenzierbaren Funktionen zu einer Sekante durch zwei Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ immer ein Punkt x_0 zwischen a und b so existiert, dass die Tangente an f durch x_0 die gleiche Steigung wie die Sekante besitzt. Der Mittelwertsatz ist Grundlage fast aller weiterer Resultate in diesem Abschnitt.

SATZ 6.13 (Mittelwertsatz). *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit*

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a).$$

Wir zeigen zunächst einen Spezialfall des Mittelwertsatzes, den sogenannten Satz von Rolle.

SATZ 6.14. *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Gilt $f(a) = f(b)$, so existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = 0$.*

BEWEIS. Ist f auf $[a,b]$ konstant, so ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. Sei also f nicht konstant. Nach Satz 5.16 und den Voraussetzungen an f existieren Maximum und Minimum mit $\max_{[a,b]} f \neq \min_{[a,b]} f$. Wegen $f(a) = f(b)$ kann f am Rand nur entweder Maximum oder Minimum annehmen. Nach (6.2) muss folglich ein $x_0 \in (a,b)$ existieren mit $f'(x_0) = 0$. □

BEWEIS VON SATZ 6.13. Wir setzen $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$. Dann gilt

$$g(b) - g(a) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = 0,$$

d.h. g erfüllt die Voraussetzungen von Satz 6.14. Folglich existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $g'(x_0) = 0$, und wir erhalten

$$f'(x_0) = g'(x_0) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

Wir wenden den Mittelwertsatz zur Untersuchung der Monotonie von Funktionen an.

Wir führen noch folgende Notation ein: Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, so setzen wir $\mathring{I}$ als das Intervall ohne dessen Randpunkte.
Beispiel: Für $I = [a,b]$ ist $\mathring{I} = (a,b)$, für $I = (-\infty, b]$ ist $\mathring{I} = (-\infty, b)$, für $I = (a,b)$ ist $\mathring{I} = (a,b)$.

SATZ 6.15. *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und auf $\mathring{I}$ differenzierbar. Dann gilt*

(i) f ist genau dann monoton wachsend, wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathring{I}$.
f ist genau dann monoton fallend, wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathring{I}$.

(ii) Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathring{I}$, so ist f strikt monoton wachsend.
Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathring{I}$, so ist f strikt monoton fallend.

Beweis. (i) „⇒“ Sei f monoton wachsend. Dann ist

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0 \qquad \text{für alle } x, y \in \mathring{I},\ x \neq y.$$

Für $y \to x$ folgt $f'(x) \geq 0$, da f in x differenzierbar ist. Ist f monoton fallend, so betrachte stattdessen $-f$.
„⇒“ Sei $x, y \in I$, $x < y$. Nach dem Mittelwertsatz (Satz 6.13) existiert ein $x_0 \in (x, y)$ mit

$$f(y) - f(x) = f'(x_0)(y - x). \tag{6.3}$$

Ist $f'(x_0) \geq 0$, so ist die rechte Seite nichtnegativ, also ist f monoton wachsend. Ist $f'(x_0) \leq 0$, so ist die rechte Seite nichtpositiv, woraus folgt, dass f monoton fallend ist.
(ii) Dies folgt analog zu (i) „⇒“ aus (6.3), wobei die rechte Seite hier entweder positiv oder negativ ist. □

Bemerkung. Ist $f \in C(I)$ differenzierbar auf $\mathring{I}$ mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathring{I}$, so ist f auf I konstant.
Beweis: Dies folgt aus Satz 6.15 (i), da konstante Funktionen sowohl monoton fallend als auch monoton wachsend sind. In den Randpunkten wird verwendet, dass f auf dem ganzen Intervall I stetig ist.

Literaturverzeichnis

[1] H. Amann, J. Escher. *Analysis I.* Grundstudium Mathematik. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.