Analysis 1

Skriptum Wintersemester 2025/26

Dieses Skriptum folgt meiner Vorlesung im Wintersemester 2025/26, wobei gelegentlich kleinere Korrekturen und Ergänzungen vorgenommen wurden. Die Beweise und Rechnungen im Skriptum sind typischerweise etwas knapper gehalten als in der Vorlesung. Es fehlen darüber hinaus die Schaubilder und viele der mündlichen Erläuterungen aus der Vorlesung.

Ich bedanke mich herzlich bei Esther Bleich und Lars Machinek für ihre Unterstützung bei der Erstellung von früheren Varianten dieses Skriptums.

Karlsruhe, 24. Februar 2026 Roland Schnaubelt

Inhaltsverzeichnis

0.1. Bezeichnungen

Die ersten beiden Abschnitten haben einführenden Charakter. Wir gehen dabei von einem naiven Verständnis der Logik und der Mengenlehre aus. Weiter verwenden wir die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ bzw. $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ und die rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \tfrac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ \text{Bruch gekürzt} \right\}$$

aus der Schulmathematik samt ihrer Rechenregeln. (Die Mengenschreibweise wird gleich erläutert.)

Zur Abkürzung benützen wir in manchen Formeln die Symbole $\neg$ (“nicht”), $\vee$ (“oder”), $\wedge$ (“und”), $\Longrightarrow$ (“impliziert”), $\Longleftrightarrow$ (“äquivalent”), $\exists$ (“es existiert”), $:=$ (“gleich per Definition”), $\exists!$ (“es existiert genau ein”) und $\forall$ (“für alle”) aus der Logik. Beweise werden mit dem Zeichen $\square$ beendet. Mit $\Diamond$ beschließen wir Bemerkungen und Beispiele, auf die kein Beweis folgt.

Eine *Aussage* A ist ein feststellender Satz, der entweder wahr oder falsch ist. So sind etwa $7 + 5 = 12$ und $n + n = 3n$ (für n aus $\mathbb{Z}$) Aussagen, wobei die erste wahr und die zweite für $n \neq 0$ falsch ist. Hingegen ist $5 + n$ keine Aussage. In den nächsten wahren Aussagen treten einige der obigen logischen Verknüpfungen auf.

$$n + 5 = 12 \iff n = 7. \qquad n = 3 \Rightarrow n < 5.$$
$$(n > 3) \wedge (n < 5) \wedge (n \text{ ist natürliche Zahl}) \iff n = 4.$$

Man beachte, dass $n < 5 \Rightarrow n = 3$ für natürliche Zahlen n falsch ist. Für Ausssagen A und B bedeutet “entweder A oder B” gerade $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$.

Mengen werden durch die Angabe der in ihnen enthaltenen *Elemente* definiert. Zur Erläuterung geben wir einige Beispiele an.

$D = \{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} = \{1, 1, 2, 3\}$ hat die Elemente $1, 2$ und 3.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ist die Menge aller natürlichen Zahlen.

$G = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ ist gerade}\}$.

$\emptyset = \{\ \}$ ist die *leere Menge*, die kein Element enthält.

Für Mengen M und N verwenden wir die folgenden Begriffe und Operationen.

- $x \in M$ bedeutet, dass x ein Element von M ist, also in M liegt; z.B. $2 \in D$ oder $\forall\, n \in \mathbb{N} : 4n \in G$.
- $x \notin M$ bedeutet, dass x kein Element von M ist; z.B. $3 \notin G$ oder $0 \notin \emptyset$.
- $M \subseteq N$ bedeutet, dass alle $x \in M$ auch in N enthalten sind oder gleichwertig: $x \in M \Rightarrow x \in N$. Dann heißt M *Teilmenge* von N, sowie N Obermenge von M. Beispiele sind $\{2, 6, 8\} \subseteq G$ oder $G \subseteq \mathbb{N}$.
- $M = N$ bedeutet, dass $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ gelten. Die Mengen M und N heißen dann *gleich* und haben die gleichen Elemente, wie z.B. $G = \{2n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ oder $D = \{3 - 2, 1 + 1, 6/2\}$.
- $M \neq N$ bedeutet, dass M und N nicht gleich sind, wie etwa $D \neq G$.

$M \subset N$	oder $M \subsetneq N$ bedeutet, dass $M \subseteq N$ und $M \neq N$ gelten. Dann heißt M *echte Teilmenge* von N, z.B. $G \subset \mathbb{N}$.
$M \cap N$	ist die Menge aller x, die in M und in N enthalten sind, und heißt *Schnittmenge* oder *Durchschnitt*. Beispiele sind $D \cap G = \{2\}$, $D \cap \mathbb{N} = D$, $M \cap \emptyset = \emptyset$.
$M \cup N$	ist die Menge aller x, die in M oder in N enthalten sind, und heißt *Vereinigungsmenge*. Beispiele sind $D \cup G = \{1, 2, 3, 4, 6, \dots\}$, $D \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$ oder $M \cup \emptyset = M$.
$M \setminus N$	ist die Menge aller x, die in M aber nicht in N enthalten sind, und heißt *Differenzmenge*. Beispiele sind $G \setminus D = \{4, 6, \dots\}$, $D \setminus G = \{1, 3\}$, $G \setminus \mathbb{N} = \emptyset$ oder $\mathbb{N} \setminus G = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ungerade}\}$.
$M \times N$	ist die Menge aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in M$ und $y \in N$ und heißt *Produktmenge*. Weiter schreiben wir M^2 statt $M \times M$. Entsprechend definiert man n-fache Produktmengen.

In Formelsprache gelten

$$M \cap N = \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}, \qquad M \cup N = \{x \mid x \in M \vee x \in N\},$$
$$M \setminus N = \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}, \qquad M \times N = \{(x, y) \mid x \in M \wedge y \in N\}.$$

Man ersetzt hierbei oft das und-Zeichen $\wedge$ durch ein Komma. Einige Rechenregeln der Logik und Mengenlehre werden in der Linearen Algebra oder in [1] diskutiert. Soweit nötig gehen wir später auf einzelne Regeln ein.

Eine *Abbildung* oder *Funktion*

$$f : M \to N; \quad x \mapsto f(x),$$

besteht aus einem Definitionsbereich M, einer Bildmenge N und einer Abbildungsvorschrift, die jedem *Urbild* $x \in M$ genau ein *Bild* $f(x) \in N$ zuordnet. Ein Beispiel ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; $x \mapsto 2x$, auch geschrieben als $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; $f(x) = 2x$. Ein anderes ist

$$f : \{\star, \triangle, \square\} \to \{0, 1\}; \quad f(\star) = 1, \ f(\triangle) = 0, \ f(\square) = 0.$$

Oft verwendet man abkürzend nur das Symbol f für die Funktion. Diese Begriffe werden später vertieft und ergänzt, und auch in der Linearen Algebra behandelt.

0.2. Vollständige Induktion

Wir diskutieren in diesem Abschnitt ein wesentliches Beweisprinzip der Mathematik. Dieses beruht auf der folgenden Eigenschaft der natürlichen Zahlen.

Prinzip der vollständigen Induktion.
Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ erfülle die beiden folgenden Bedingungen.

(IA) 1 sei ein Element von M.

(IS) Es gehöre ein Zahl $n \in \mathbb{N}$ zu M. Dann liegt auch ihr Nachfolger $n+1$ in M.

Dann gilt $M = \mathbb{N}$.

Beweis. Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir müssen zeigen, dass k in M liegt. Gemäß (IA) ist 1 ein Element von M. Wenn $k = 1$ ist, sind wir fertig. Andernfalls ist laut (IS) die Zahl

$2 = 1 + 1$ in M enthalten. Falls auch $k \neq 2$, wiederholen wir diesen Schritt $k - 2$ Mal und erhalten dann $k \in M$. $\square$

Wir wollen dies nun so umfomulieren, dass die Wahrheit einer Familie von Aussagen $A(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ gezeigt werden kann. Dazu betrachten wir die Menge

$$M := \{ m \in \mathbb{N} \mid A(m) \text{ ist wahr} \}.$$

Unter den Annahmen der folgenden Behauptung liefert das obige Induktionsprinzip unmittelbar $M = \mathbb{N}$ und damit somit das behauptete Beweisverfahren.

Beweisverfahren der vollständigen Induktion.
Es sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage $A(n)$ gegeben. Man geht in zwei Schritten vor.

- *(IA) Induktionsanfang: Man zeigt, dass $A(1)$ wahr ist.*
- *(IS) Induktionsschluss: Man nimmt an, dass für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ wahr sei (Induktionsvoraussetzung, IV). Dann zeigt man, dass auch $A(n+1)$ wahr ist.*

Wenn (IA) und (IS) nachgewiesen sind, gelten die Aussagen $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Man kann hier die Indexmenge $\mathbb{N}$ durch $\{k, k+1, \dots\}$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ersetzen. Wir diskutieren einige typische Beispiele für die vollständige Induktion.

Beispiel 0.1. Es gilt $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir bezeichnen die behauptete Aussage mit $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir haben $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)$, sodass (IA) wahr ist. Um (IS) zu zeigen, nehmen wir als (IV) an, dass $A(n)$ für ein (festes, aber beliebiges) $n \in \mathbb{N}$ gilt. Daraus folgern wir

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) &= \tfrac{1}{2} n(n+1) + (n+1) = (n+1)(\tfrac{1}{2} n + 1) \\ &= \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2). \end{aligned}$$

Somit ist $A(n+1)$ und damit (IS) bewiesen. Per vollständiger Induktion ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt, was die Behauptung ist. $\square$

Im Induktionsschluss des Beweises muss man eine Beziehung von $A(n+1)$ und $A(n)$ erkennen und ausnutzen. Hier sieht man, dass sich die linken Seiten nur durch den Summanden $n + 1$ unterscheiden. Also beginnt man mit der linken Seite von $A(n+1)$ und kann direkt die Induktionsvoraussetzung anwenden. Meist sind an dieser Stelle gewisse Umformungen nötig. Den entstehenden Ausdruck $\frac{1}{2} n(n+1) + (n+1)$ versucht man nun zur rechten Seite von $A(n+1)$ umzuformen. Dazu klammert man den benötigten Faktor $\frac{1}{2}(n+1)$ aus und stellt erfreut fest, dass sich das Gewünschte ergibt. In den nächsten Beweisen gehen wir ähnlich vor. (In Übungen kann es durchaus schwieriger werden.)

Um die Schreibweise "$1 + \ldots + n$" zu präzisieren, *definieren* wir *rekursiv* das Summenzeichen $\sum$. Gegeben seien Zahlen $a_j \in \mathbb{Q}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$ mit $j \geq m$, wobei $m \in \mathbb{Z}$ fest gewählt ist. Wir bezeichnen zunächst

$$\sum_{j=m}^{m} a_j := a_m.$$

Wir nehmen dann an, dass die Summe $\sum_{j=m}^{m+n} a_j \in \mathbb{Q}$ für ein (festes, aber beliebiges) $n \in \mathbb{N}_0$ schon definiert worden ist. Dann setzen wir

$$\sum_{j=m}^{m+n+1} a_j := a_{m+n+1} + \sum_{j=m}^{m+n} a_j \ \ \in \mathbb{Q}$$

für dieses n. Nun wenden wir das Induktionsprinzip auf die Menge

$$M := \left\{ n \in \mathbb{N}_0 \,\middle|\, \sum\nolimits_{j=m}^{m+n} a_j \ \text{ ist definiert} \right\}$$

an. (Die Induktion läuft also über die Anzahl der Summanden.) Da die obigen Definitionen den Bedingungen (IA) und (IS) entsprechen, wird dadurch die Summe

$$\sum\nolimits_{j=m}^{p} a_j \ \in \mathbb{Q}$$

für jedes $p \in \mathbb{Z}$ mit $p \geq m$ definiert. Man schreibt stattdessen auch $a_m + \ldots + a_p$. Entsprechend führt man das *Produkt*

$$\prod\nolimits_{j=m}^{p} a_j = a_m \cdot \ldots \cdot a_p$$

ein. Man setzt dabei abkürzend

$$a^n := \prod\nolimits_{k=1}^{n} a \quad \text{ und } \quad a^0 := 1$$

für alle $a \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}$. Es gelten offenbar $a^1 = a$ und $a^2 = a \cdot a$.

Per Induktion kann man die Rechenregeln der Bruchrechnung auf die durch $\sum$ und $\prod$ definierten Summen und Produkte ausdehnen. Zum Beispiel gilt

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j \Big) + \Big(\sum_{j=1}^{n} b_j \Big) = \sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j)$$

für alle $a_j, b_j \in \mathbb{Q}$ mit $j \in \mathbb{N}$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir bezeichnen wieder die behauptete Gleichung mit $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zunächst gilt $A(1)$, da die obige Definition die Identitäten

$$\sum_{j=1}^{1} a_j + \sum_{j=1}^{1} b_j = a_1 + b_1 = \sum_{j=1}^{1} (a_j + b_j)$$

impliziert. Um (IS) nachzuweisen, nehmen wir als (IV) an, dass $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr sei. Indem wir die Definition und in der zweiten Gleichung (IV) verwenden, berechnen wir

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{j=1}^{n+1} a_j \Big) + \Big(\sum_{j=1}^{n+1} b_j \Big) &= a_{n+1} + \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j \Big) + b_{n+1} + \Big(\sum_{j=1}^{n} b_j \Big) \\ &= (a_{n+1} + b_{n+1}) + \sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j) = \sum_{j=1}^{n+1} (a_j + b_j). \end{aligned}$$

Also ist $A(n+1)$ und somit (IS) gezeigt. Vollständigen Induktion impliziert nun, dass $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr ist. $\square$

Wir lassen im Folgenden meist die äußeren Klammern weg, wenn klar sein sollte, worauf sich die Summe oder das Produkt bezieht. Die folgende 'geometrische Summe' wird später eine wichtige Rolle spielen.

BEISPIEL 0.2. Seien $q \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt die Identität

$$\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

BEWEIS. Wieder bezeichne $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die behauptete Identität. Die Aussage $A(0)$ ergibt sich sofort aus der Gleichung

$$\sum\nolimits_{j=0}^{0} q^j = q^0 = 1 = \frac{q-1}{q-1}.$$

Um (IS) zu zeigen, nehmen wir als (IV) an, dass $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte. Mittels der Definition der Summe und mit (IV) in der zweiten Gleichung, folgern wir

$$\sum_{j=0}^{n+1} q^j = q^{n+1} + \sum_{j=0}^{n} q^j = q^{n+1} + \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{q^{n+1}(q-1) + q^{n+1} - 1}{q-1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}.$$

Also ist $A(n+1)$ und somit (IS) wahr. Die Behauptung folgt per Induktion. $\square$

Weiter definiert man die *Fakultät* $n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$ durch

$$0! := 1 \qquad \text{und} \qquad n! := \prod\nolimits_{j=1}^{n} j = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Fakultäten wachsen rasch an; dies sieht man schon an den ersten fünf: $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $5! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Für $n, j \in \mathbb{N}_0$ mit $j \le n$ ist ferner der *Binomialkoeffizient* durch

$$\binom{n}{j} := \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

gegeben. Ein Beispiel ist

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

Für $j, n \in \mathbb{N}_0$ mit $j \le n$ genügt der Binomialkoeffizient den Rechenregeln

$$\binom{n}{n-j} = \frac{n!}{(n-j)!(n-n+j)!} = \binom{n}{j}, \qquad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1, \tag{0.1}$$

$$\begin{aligned} \binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} &= \frac{n!}{(j-1)!\,(n-j+1)!}\,\frac{j}{j} + \frac{n!}{j!\,(n-j)!}\,\frac{n-j+1}{n-j+1} \\ &= \frac{n!\,(j+n-j+1)}{j!\,(n+1-j)!} = \frac{(n+1)!}{j!\,(n+1-j)!} = \binom{n+1}{j} \quad \text{für} \quad j \ge 1. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Die nächste wichtige Aussage verallgemeinert die einfachen Formeln

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \qquad \text{und} \qquad (a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

BEISPIEL 0.3. Für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt der *binomische Satz*

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j.$$

Mit $a = b = 1$ folgt insbesondere die (überraschende) Gleichung $2^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}$.

BEWEIS. Es sei $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die abgesetzte Identität in der Behauptung. Die Aussage (IA) ergibt sich aus der Beobachtung

$$(a+b)^0 = 1 = \sum_{j=0}^{0} \binom{0}{j} a^{0-j} b^j.$$

Um (IS) zu zeigen, nehmen wir als (IV) an, dass $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte. Diese Annahme impliziert

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n &= (a+b) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j. \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j+1} b^j + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^{j+1}.\end{aligned}$$

In der letzten Summe setzen wir nun $l = j+1$ (bzw. $j = l-1$), um Exponenten wie in der vorderen Summe zu erhalten. Der neue Index l läuft von 1 bis $n+1$. Danach schreiben wir wieder j statt l und wenden (0.2) an. Dies liefert die Gleichungen

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j+1} b^j + \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} a^{n-(l-1)} b^l \\ &= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{j=1}^{n} \left(\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} \right) a^{n-j+1} b^j + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} b^j.\end{aligned}$$

Hierbei haben wir am Ende auch die Formeln (0.1) ausgenutzt. Man beachte, dass beim Zusammenziehen der Summen die nicht passenden Terme mit $j = 0$ und $l = n+1$ getrennt auftreten. Also gilt $A(n+1)$ und somit (IS). Die Behauptung folgt nun mittels vollständiger Induktion. $\square$

Die obigen Aussagen gelten nicht nur in $\mathbb{Q}$ sondern allgemeiner in *Körpern*, die im nächsten Abschnitt eingeführt werden.

KAPITEL 1

Reelle und komplexe Zahlen

Wir definieren die reellen Zahlen in drei Schritten, indem wir zuerst die für sie geltenden Regeln (*Axiome*) für die algebraischen Verknüpfungen und für die Ordnungsstruktur festlegen und dann die sogenannte Ordnungsvollständigkeit verlangen. Es wird sich in Beispiel 3.18 zeigen, dass die so eingeführten reellen Zahlen mit denen der Schulmathematik übereinstimmen.

1.1. Geordnete Körper

Sei M eine nichtleere Menge. Eine Abbildung

$$* : M \times M \to M; \quad (x, y) \longmapsto x * y,$$

heißt *Verknüpfung* auf M. Beispiele sind Addition und Multiplikation in $\mathbb{Q}$, also die Abbildungen $+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}; (x, y) \mapsto x + y$, und $\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}; (x, y) \mapsto x \cdot y$.

Definition 1.1. *Es sei K eine Menge mit Elementen $0 \neq 1$ und Verknüpfungen $+$ und $\cdot$. Das Quintupel $(K, 0, 1, +, \cdot)$ heißt* Körper*, falls die folgenden Eigenschaften für alle $x, y, z \in K$ erfüllt sind.*

(AG+)	$(x + y) + z = x + (y + z)$.	(Assoziativgesetz für $+$)
(NE+)	$x + 0 = x$.	(neutrales Element für $+$)
(IE+)	$\forall\, x \in K \quad \exists\, u \in K \quad \textit{mit} \quad x + u = 0$.	(inverse Elemente für $+$)
(KG+)	$x + y = y + x$.	(Kommutativgesetz für $+$)
(AG·)	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.	(Assoziativgesetz für $\cdot$)
(NE·)	$x \cdot 1 = x$.	(neutrales Element für $\cdot$)
(IE·)	$\forall\, x \in K \setminus \{0\} \quad \exists\, v \in K \quad \textit{mit} \quad x \cdot v = 1$.	(inverse Elemente für $\cdot$)
(KG·)	$x \cdot y = y \cdot x$.	(Kommutativgesetz für $\cdot$)
(DG)	$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.	(Distributivgesetz)

Man schreibt oft K statt $(K, 0, 1, +, \cdot)$ und xy statt $x \cdot y$.

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit den üblichen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ sind ein Körper, $\mathbb{Z}$ ist es nicht (da es z.B. kein $v \in \mathbb{Z}$ mit $2v = 1$ gibt). Der kleinste Körper ist $\mathbb{F}_2 = \{\underline{0}, \underline{1}\}$ mit den Verknüpfungen

$$\underline{0} + \underline{0} = \underline{0}, \quad \underline{0} + \underline{1} = \underline{1} + \underline{0} = \underline{1}, \quad \underline{1} + \underline{1} = \underline{0}, \quad \underline{0} \cdot \underline{0} = \underline{0}, \quad \underline{0} \cdot \underline{1} = \underline{1} \cdot \underline{0} = \underline{0}, \quad \underline{1} \cdot \underline{1} = \underline{1}.$$

Man schreibt für die inversen Elemente $u =: -x$ bzw. $v =: x^{-1} = \frac{1}{x}$ (falls $x \neq 0$), sowie $x - y$ anstelle von $x + (-y)$ und $\frac{x}{y}$ anstelle von $x \cdot \frac{1}{y}$ (falls $y \neq 0$). Man lässt meist überflüssige Klammern weg, wobei "$\cdot$ vor $+$" gilt; z.B. verwenden wir $x+y+z$ statt $x+(y+z)$ oder $x+yz$ statt $x+(yz)$.

Man kann zeigen, dass die neutralen und inversen Elemente in (NE+), (IE+), (NE$\cdot$) und (IE$\cdot$) eindeutig bestimmt sind. Weiter gelten Rechenregeln wie in der Bruchrechnung, so etwa $-(-x)=x$ und $-x=(-1)x$ für alle $x\in K$, $(x^{-1})^{-1}=x$ für alle $x\in K\setminus\{0\}$, und es gilt genau dann $x\cdot y=0$ für $x,y\in K$, wenn x oder y gleich 0 sind. Für diese und verwandte Ausssagen verweisen wir auf die Lineare Algebra und benutzen sie ohne weiteren Kommentar. Dort werden auch andere Beispiele für Körper diskutiert. In den Aussagen und Beweisen in Abschnitt 0.2 kann man $\mathbb{Q}$ durch jeden Körper K ersetzen.

In der Analysis benötigt man oft Ungleichungen, zum Beispiel in Konvergenzbetrachtungen. Dazu führen wir die folgenden Begriffe ein. Andere Klassen von Relationen werden In der Linearen Algebra werden auch 'Äquivalenzrelationen' diskutiert.

Definition 1.2. *Sei M eine nichtleere Menge. Eine* Relation *R auf M ist eine nichtleere Teilmenge von $M\times M$. Man schreibt $x\sim_R y$, falls (x,y) in $R\subseteq M\times M$ liegt. Eine Relation R heißt* Ordnung *auf M, wenn für alle $x,y,z\in M$ die folgenden Aussagen gelten.*

(R) *$x\sim_R x$.* (Reflexivität)

(T) *Seien $x\sim_R y$ und $y\sim_R z$. Dann gilt $x\sim_R z$.* (Transitivität)

(AS) *Seien $x\sim_R y$ und $y\sim_R x$. Dann gilt $x=y$.* (Antisymmetrie)

Die Ordnung heißt total*, wenn für alle $x,y\in M$ stets $x\sim_R y$ oder $y\sim_R x$ gilt.*

Man sieht leicht ein, dass auf den Brüchen $\mathbb{Q}$ die üblichen Ordnung $\le$ (also die Relation $\{(x,y)\in\mathbb{Q}^2\,|\,x\le y\}$) eine totale Ordnung im obigen Sinne ist. Man kann auch nachprüfen, dass die Relation $R=\{(m,n)\in\mathbb{N}^2\,|\,m \text{ teilt } n\}$ eine Ordnung auf $\mathbb{N}$ darstellt. Diese ist nicht total, da z.B. 2 nicht 3 und 3 nicht 2 teilt.

Bei einer Ordnung schreibt man statt $\sim_R$ meist "$\le_R$" oder "$\le$" und sagt "kleiner gleich". Man schreibt "$x<y$" und sagt "x kleiner y", wenn $x\le y$ und $x\ne y$ sind. Weiter haben $y\ge x$ und $x\le y$, sowie $y>x$ und $x<y$, jeweils die gleiche Bedeutung.

In der folgenden Definition werden die algebraischen und die ordnungstheoretischen Strukturen miteinander verbunden.

Definition 1.3. *Ein* geordneter Körper *$(K,\le)$ besteht aus einem Körper $K=(K,0,1,+,\cdot)$ und einer totalen Ordnung $\le$ auf K derart, dass für alle $x,y,z\in K$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.*

(O+) *Sei $x<y$. Dann gilt $x+z<y+z$.*

(O$\cdot$) *Seien $x>0$ und $y>0$. Dann gilt $xy>0$.*

Man schreibt meist K statt $(K,\le)$. Ein $x\in K$ heißt positiv (negativ)*, wenn $x>0$ ($x<0$) gilt, und* nichtnegativ (nichtpositiv)*, wenn $x\ge 0$ ($x\le 0$) gilt. Man setzt*

$$K_+=\{x\in K\,|\,x>0\}\qquad \textit{und}\qquad K_-=\{x\in K\,|\,x<0\}.$$

Auf Grund der Totalität der Ordnung gilt $x \le 0$ oder $x \ge 0$ für jedes $x \in K$, und wegen (AS) folgt aus $x \le 0$ und $x \ge 0$ schon $x = 0$. Damit ergeben sich

$$K_+ \cap K_- = \emptyset \qquad \text{und} \qquad K_+ \cup K_- \cup \{0\} = K.$$

Die Brüche $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Ordnung $\le$ bilden einen geordneten Körper.

Wir zeigen nun einige direkte Folgerungen aus den obigen Definitionen; in den Übungen werden weitere Rechenregeln hergeleitet. In diesem Abschnitt werden die für die Umformungen von Ungleichungen benötigten Definitionen detailliert angegeben. Darauf werden wir später bei einfachen Rechenschritten verzichten.

Satz 1.4. *Es seien K ein geordneter Körper und $x, y, z \in K$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) Die Ungleichung $y > x$ ist äquivalent zu $y - x > 0$.
b) Die Ungleichungen $x < 0$ und $-x > 0$ sind gleichwertig, und ebenso $x > 0$ und $-x < 0$.
c) Aus den Relationen $x > 0$ und $y < 0$ folgt $xy < 0$.
d) Sei $x \neq 0$. Dann ergibt sich $x^2 := x \cdot x > 0$, sodass speziell $1 = 1^2 > 0$ gilt.
e) Wir haben genau dann $x > 0$, wenn $\frac{1}{x} > 0$ gilt.
f) Die Ungleichungen $y > x$ und $z > 0$ implizieren $yz > xz$.

In a), b), c) und f) kann man ferner "$>$" durch "$\ge$" ersetzen.

Beweis. a) Wir zeigen die beiden Implikationen separat, da das oft übersichtlicher ist. Es gelte $y > x$. Um $y - x$ zu erzielen, addieren wir zu beiden Seiten $-x$. Dann folgt $y - x > x - x = 0$ aus (O+). Nun gelte $y - x > 0$. Hier addieren wir x und erhalten mit (O+) die gewünschte Ungleichung $y = y - x + x > 0 + x = x$.

b) Die erste Äquivalenz folgt aus Teil a) mit $y = 0$. Wenn wir sie auf $-x$ anwenden, ergibt sich die zweite Teilaussage, da $x = -(-x)$ ist.

c) Seien $x > 0$ und $y < 0$. Wir führen die Aussage auf (O$\cdot$) zurück. Dazu bemerken wir, dass b) die Ungleichung $-y > 0$ liefert. Aus (O$\cdot$) schließen wir dann $0 < x(-y) = -xy$, was nach b) die Behauptung $xy < 0$ impliziert.

d) Sei $x \neq 0$. Aufgrund der Totalität der Ordnung und b) gilt dann entweder $x > 0$ oder $-x > 0$. Aus (O$\cdot$) ergibt sich nun $x^2 > 0$, bzw. $0 < (-x)^2 = (-1)(-x)x = x^2$, wenn wir mit x bzw. $-x$ multiplizieren.

e) Sei $x > 0$. Nach d) ist $x^{-2} := (x^{-1})^2 > 0$. Eine Multiplikation mit $x > 0$ führt gemäß (O$\cdot$) auf $x^{-1} = xx^{-2} > 0$. Mit dem eben Bewiesenen folgern wir umgekehrt aus $x^{-1} > 0$ die Aussage $x = (x^{-1})^{-1} > 0$.

f) Seien $y > x$ und $z > 0$. Gemäß a) haben wir dann $y - x > 0$, sodass (O$\cdot$) die Ungleichung $0 < (y - x)z = yz - xz$ zeigt. Wieder mit a) folgt Teil f).

Den Zusatz zeigt man dann durch Betrachtung der Gleichheitsfälle. Wir behandeln exemplarisch Behauptung f). Aus $z = 0$ folgt direkt $yz = 0 = xz$, und aus $y = x$ natürlich auch. Zusammen mit dem Ungleichheitsfall haben wir aus $y \ge x$ und $z \ge 0$ die Relation $yz \ge xz$ gefolgert. $\square$

Aus den obigen Aussagen d) und b) kann man z.B. schließen, dass es keine Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{F}_2$ gibt, mit der $(\mathbb{F}_2, \leq)$ ein geordneter Körper wäre. In der Tat gälte dann $\underline{1} > \underline{0} > -\underline{1}$, was aber der in $\mathbb{F}_2$ gültigen Gleichung $\underline{1} = -\underline{1}$ widerspräche.

Den folgenden Begriff benötigen wir wesentlich für die Definition und Untersuchung von Grenzwerten.

Definition 1.5. *Es seien K ein geordneter Körper und $x \in K$. Dann heißt*

$$|x| \coloneqq \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

der Betrag *von x.*

Der Betrag wird benutzt, um Abstände in geordneten Körpern zu definieren. In $\mathbb{Q}$ entspricht er gerade dem üblichen Betrag. Hier haben etwa -2 und 3 den Abstand $|-2-3| = |-(2+3)| = 5$. Im nächsten Satz sammeln wir die grundlegenden Eigenschaften des Betrags, die aus der Definition und Satz 1.4 folgen.

Satz 1.6. *Es seien K ein geordneter Körper und $x, y \in K$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) $|x| \geq 0$. $\qquad |x| = 0 \iff x = 0$.
b) $x \leq |x|, \qquad -x \leq |x|, \qquad |x| = |-x|$.
c) $|xy| = |x|\,|y|$.
d) $|x+y| \leq |x| + |y|$.
e) $|x-y| \geq \big||x| - |y|\big|$.

Beweis. a) Wenn $x \geq 0$ ist, dann liefert Definition 1.5 die Ungleichung $|x| = x \geq 0$. Im Falle $x < 0$ gilt $|x| = -x > 0$, wobei Satz 1.4 b) eingeht. Dies zeigt auch den ersten Teil von b). Die Äquivalenz in a) folgt direkt aus Definition 1.5.

b) Nach dem eben Gesagten müssen wir in b) nur den dritten Teil zeigen. Mittels Definition 1.5 und Satz 1.4 b) berechnen wir dazu

$$|-x| = \begin{cases} -x, & -x \geq 0, \\ -(-x), & -x < 0, \end{cases} = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x, & x > 0, \end{cases} = |x|.$$

c) Seien $x \geq 0$ und $y \leq 0$. Nach Satz 1.4 gilt dann $xy \leq 0$. Definition 1.5 führt nun auf $|xy| = -xy = x(-y) = |x|\,|y|$. Die anderen drei Fälle behandelt man ähnlich.

d) Wir zeigen die Behauptung getrennt für die beiden Fälle im Betrag auf der linken Seite. Nach b) haben wir die Ungleichungen $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$. Mit (O+) folgern wir die Abschätzungen $x + y \leq |x| + y \leq |x| + |y|$. Gemäß b) liefert dies auch $-(x+y) = (-x) + (-y) \leq |-x| + |-y| = |x| + |y|$. Zusammen folgt die Aussage aus Definition 1.5.

e) Teil d) impliziert $|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y|$, sodass (O+) die Ungleichung $|x| - |y| \leq |x-y|$ zeigt. Durch Vertauschen von x und y folgert man $|y| - |x| \leq |y-x| = |x-y|$, wobei auch b) eingeht. Es ergibt sich Teil e). $\square$

Die folgenden Teilmengen geordneter Körper werden eine zentrale Rolle spielen. Wir schreiben dabei etwa $a \le x < b$ abkürzend für $a \le x$ und $x < b$.

Definition 1.7. *Es seien K ein geordneter Körper und $a, b \in K$ mit $a < b$. Dann definiert man die* beschränkten Intervalle *durch*

$$[a,b] = \{x \in K \,|\, a \le x \le b\}, \qquad (a,b) = \{x \in K \,|\, a < x < b\}, \qquad [a,a] = \{a\},$$
$$[a,b) = \{x \in K \,|\, a \le x < b\}, \qquad (a,b] = \{x \in K \,|\, a < x \le b\}, \qquad (a,a) = \emptyset,$$

und die unbeschränkten Intervalle *durch*

$$[a,\infty) = \{x \in K \,|\, x \ge a\}, \qquad (-\infty,a] = \{x \in K \,|\, x \le a\},$$
$$(a,\infty) = \{x \in K \,|\, x > a\}, \qquad (-\infty,a) = \{x \in K \,|\, x < a\}.$$

Die Intervalle $[a,b]$, $[a,a]$, $[a,\infty)$ und $(-\infty,a]$ heißen abgeschlossen *und (a,b), (a,a), $(-\infty,a)$ und (a,∞) heißen* offen.

Wir diskutieren zwei Zahlenbeispiele, um das Rechnen mit Ungleichungen, Beträgen und Fallunterscheidungen etwas zu üben. Man beachte, dass man Äquivalenzumformungen benötigt, um alle Lösungen zu bestimmen.

Beispiel 1. Die Menge aller $x \in \mathbb{Q}$ mit $|2x-3|+2 > 3x-5$ ist das Intervall $(-\infty, 4)$ in $\mathbb{Q}$. Um dies zu zeigen, löst man zunächst den Betrag auf und erhält

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3, & x \ge 3/2, \\ 3-2x, & x < 3/2. \end{cases}$$

Demgemäß unterscheidet man nun zwei Fälle, in denen wir die entstehenden Ungleichungen jeweils nach x auflösen.

1. Fall. Sei $x \ge 3/2$. Dann wird aus $|2x-3|+2 > 3x-5$ die Ungleichung

$$3x-5 < 2x-3+2 = 2x-1.$$

Nach (O+) ist diese Relation äquivalent zu $3x < 2x+4$ (wobei man 5, bzw. -5 für die umgekehrte Implikation, addiert), und diese gleichwertig zu $x < 4$ (wobei man $-2x$, bzw. $2x$, addiert). Also gilt die behauptete Ungleichung für alle $x \in [3/2, 4)$, und sie ist falsch für alle $x \ge 4$.

2. Fall. Sei $x < 3/2$. Nun ist die Ungleichung $|2x-3|+2 > 3x-5$ zu

$$3x-5 < 3-2x+2 = 5-2x$$

äquivalent. Wie oben schließen wir aus (O+), dass diese Relation gleichwertig zu $5x < 10$ ist. Mit Satz 1.4 f) formt man dies äquivalent zu $x < 2$ um, indem man $1/5$, bzw. 5, multipliziert. Somit gilt die Aussage für alle $x < 3/2$.

Wenn man die beiden Fälle zusammenfügt, folgt die Behauptung. $\diamondsuit$

Beispiel 2. Die Menge aller $x \in \mathbb{Q}$ mit $|x-1| \leq |x+2|$ ist das Intervall $[-1/2, \infty)$ in $\mathbb{Q}$. Zur Begründung ersetzen wir wieder die Beträge durch Fallunterscheidungen:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1, \\ 1-x, & x < 1, \end{cases} \qquad |x+2| = \begin{cases} x+2, & x \geq -2, \\ -x-2, & x < -2. \end{cases}$$

Dies führt nun auf vier Fälle, die wir nach dem ersten Betrag sortieren.

Fall 1a). Seien $x \geq 1$ und $x \geq -2$. Dies ist äquivalent zur Ungleichung $x \geq 1$, und man kann $|x-1| \leq |x+2|$ durch $x - 1 \leq x + 2$ ersetzen. Durch Addition von $-x$, bzw. x, wird die Ungleichung laut (O+) gleichwertig zu $-1 \leq 2$ umgeformt. Diese Relation ist wahr und folglich lösen alle $x \in [1, \infty)$ das Problem.

Fall 1b). Seien $x \geq 1$ und $x < -2$. Solche x gibt es in $\mathbb{Q}$ nicht, sodass in diesem Fall keine Lösungen existieren.

Fall 2a). Seien $x < 1$ und $x \geq -2$, also $x \in [-2, 1)$. In diesem Fall wird $|x-1| \leq |x+2|$ zu $1 - x \leq x + 2$. Durch Addition mit $x - 2$, bzw. $2 - x$, folgern wir wieder mittels (O+), dass die Ungleichung zu $-1 \leq 2x$ äquivalent ist. Gemäß Satz 1.4 f) überführt eine Multiplikation mit $1/2$, bzw. 2, diese Relation in $x \geq -1/2$. Also lösen $x \in [-1/2, 1)$ das Problem, aber nicht $x \in [-2, -1/2)$.

Fall 2b). Seien $x < 1$ und $x < -2$, also $x < -2$. Hier betrachten wir $1 - x \leq -x - 2$, was man wie bisher durch Addition von $\pm x$ zu $1 \leq -2$ umformen kann. Da diese Aussage in $\mathbb{Q}$ falsch ist, gibt es in diesem Fall keine Lösung.

Die Behauptung folgt nun durch die Kombination aller Fälle. ◊

Abschließend beweisen wir die *Bernoullische Ungleichung*, die wir für einige Konvergenzbetrachtungen heranziehen werden. Danach folgt eine gleichfalls benötigte, aber wenig erstaunliche Aussage über Mittelwerte.

SATZ 1.8. *Es seien K ein geordneter Körper, $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

BEWEIS. Wir beweisen die Aussage per Induktion. Für $n = 1$ gilt sie offensichtlich. Die Aussage gelte für ein $n \in \mathbb{N}$. Mit dieser Induktionsvoraussetzung und Satz 1.4 f) erhalten wir

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x,$$

wobei wir auch $1 + x \geq 0$, sowie am Ende (O+) und $nx^2 \geq 0$ (nach Satz 1.4) verwendet haben. □

LEMMA 1.9. *Es seien K ein geordneter Körper und $a, b \in K$ mit $a < b$. Setze $2 := 1 + 1 \in K$. Dann gelten $2 > 1 > 0$ wegen Satz 1.4 d), sowie $a < \frac{1}{2}(a+b) < b$.*

BEWEIS. Mittels (O+) schließen wir aus $a < b$ in zwei Schritten auf

$$2a = a + a < a + b < b + b = 2b.$$

Laut Satz 1.4 f) bleiben diese Ungleichungen bei Multiplikation mit $\frac{1}{2}$ erhalten. □

1.2. Suprema und reelle Zahlen

In diesem Abschnitt diskutieren wir weitere Begriffe in geordneten Körpern, um in Definition 1.17 die letzte definierende Eigenschaft reeller Zahlen einführen zu können. Hierbei werden wir einige Male 'indirekte' Beweise verwenden, die generell von großer Bedeutung in der Mathematik sind. Deswegen besprechen wir zuerst einige Sachverhalte aus der Logik.

Kontraposition und indirekter Beweis. Wir beginnen mit einer wichtigen Äquivalenz aus der Logik. Seien A und B Aussagen. Dann ist die Implikation

$$A \Rightarrow B \quad \text{gleichwertig zur ihrer } \textit{Kontraposition} \quad \neg B \Rightarrow \neg A.$$

Als ein illustrierendes Beispiel betrachten wir die Folgerung $(n = 3) \Rightarrow (n < 5)$ und die umgekehrte Implikation $(n \geq 5) \Rightarrow (n \neq 3)$ für die Negationen. Die behauptete Äquivalenz zeigen wir mittels einer 'Wahrheitswertstafel', die wesentlich ausnutzt, dass jede Aussage entweder wahr (w) oder falsch (f) ist.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
w	w	w	f	f	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w

Hierbei geben wir zuerst alle vier Kombinationen von w und f für die Grundaussagen A und B an. Die Aussage $A \Rightarrow B$ wird durch die Angabe von w und f für jede dieser Kombination festgelegt. Falls A wahr ist, ist $A \Rightarrow B$ genau dann wahr, wenn auch B wahr ist. Falls jedoch A falsch ist, ist die Implikation unabhängig von B wahr, da man aus einer falschen Annahme alles ableiten kann. Die Negationen $\neg B$ und $\neg A$ haben gegenüber B und A die vertauschten Wahrheitswerte. Man bildet dann die sechste Spalte analog zur dritten. Da diese beiden gleich sind, hängen die zugehörigen Aussagen in gleicher Weise von den Wahrheitswerten von A und B ab. Damit sind sie äquivalent. (Siehe auch die Vorlesung Lineare Algebra.)

Ein mathematischer Satz ist im Prinzip von der Form $A \Rightarrow B$ für die Voraussetzung A und die Behauptung B, wobei wir (natürlich) nur an dem Fall wahrer A interessiert sind. Somit ist der Satz genau dann wahr, wenn B wahr ist.

In einem direkten Beweis findet man solche weiteren Aussagen $C, D, \dots,$ dass $A \Rightarrow C \Rightarrow D \Rightarrow \cdots \Rightarrow B$ gilt und damit der Satz gezeigt ist. Die Beweise der Sätze 1.4 und 1.6 sind im Grunde von dieser Form. Manchmal ist es aber einfacher, die gleichwertige Kontraposition $\neg B \Rightarrow \neg A$ in entsprechender Weise nachzuweisen.

In indirekten Beweisen geht man anders vor. Man nutzt aus, dass B entweder wahr oder falsch ist, und *nimmt an*, dass B falsch sei. Daraus (und auch A verwendend) folgert man die Falschheit einer gewissen Aussage C, von der man aber weiß, dass sie wahr ist. Dieser *Widerspruch* zeigt, dass B nicht falsch sein kann und somit wahr ist.

Wir kehren nun zur Diskussion geordneter Körper zurück und führen mit Hilfe der Ordnung beschränkte Teilmengen und besondere Elemente von ihnen ein.

Definition 1.10. *Es seien K ein geordneter Körper und $M \subseteq K$ nichtleer.*

a) Ein Element a aus K ist eine obere *(bzw.* untere*)* Schranke *von M, wenn $a \geq m$ (bzw. $a \leq m$) für alle $m \in M$ gilt. Wenn so eine Schranke a existiert, dann heißt M* von oben *(bzw.* von unten*)* beschränkt.

b) Die Menge M heißt beschränkt, *wenn sie von oben und von unten beschränkt ist. Andernfalls heißt M* unbeschränkt.

c) Ein Element x von K ist ein Maximum *(bzw.* Minimum*) von M, wenn x in M liegt und x eine obere (bzw. untere) Schranke von M ist. Man schreibt dann $x = \max M$ (bzw. $x = \min M$).*

Zur Illustration geben wir ein Zahlenbeispiel in $\mathbb{Q}$ an. Die Menge $M = [0,1) \cup \{2\}$ hat z.B. die oberen Schranken 2 oder 5, während $3/2$ keine obere Schranke ist. Weiter ist $2 \in M$ ein Maximum von M. Wir diskutieren weitere Beispiele im allgemeinen Rahmen geordneter Körper. Hier bieten sich öfter indirekte Beweise an, da man ein besseres Verständnis von der Negation als der Aussage selbst hat.

Beispiel 1.11. Sei K ein geordneter Körper und $b \in K$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

a) Das Intervall $M = (-\infty, b]$ hat die obere Schranke b (sowie jedes $b' > b$). Da b in M liegt, ist es ein Maximum. Weiter ist M nicht nach unten beschränkt.

Beweis. Die ersten zwei Behauptungen folgen direkt aus den Definitionen 1.7 und 1.10. Für die letzte nehmen wir an, dass M eine untere Schranke $a \in K$ hätte. Also gilt $a \leq m$ für alle $m \in M$ und speziell $a \leq b$. Da -1 nach Satz 1.4 negativ ist, schließen wir dann aus (O+) auf die Ungleichungen $a - 1 < a \leq b$. Also liegt $a - 1$ in M und somit ist $a \leq a - 1 < a$, was falsch ist. Dieser Widerspruch zeigt die Behauptung. □

b) Das Intervall $N = (-\infty, b)$ hat die obere Schranke b (sowie jedes $b' > b$) und kein Maximum.

Beweis. Wieder ist die erste Behauptung klar. Wir nehmen an, dass N ein Maximum a besäße. Da dann a in N liegt, gilt $a < b$. Lemma 1.9 liefert dann die Ungleichungen $a < \frac{1}{2}(a+b) < b$, sodass auch $\frac{1}{2}(a+b)$ in N enthalten ist. Dies ist unmöglich, da a eine obere Schranke von N ist. Also hat N kein Maximum. □

c) Es gilt $0 = \min\{x^2 \mid x \in K\}$, da zum einen nach Satz 1.4 Quadrate nichtnegativ sind und zum anderen $0^2 = 0$ ist. ♢

Aufgrund der folgenden Beobachtung bezeichnen $\max M$ und $\min M$ tatsächlich einzelne Elemente von K (und nicht größere Teilmengen), sodass die Schreibweisen $x = \max M$ und $x = \min M$ sinnvoll sind.

Bemerkung 1.12. Eine nichtleere Teilmenge M eines geordneten Körpers hat höchstens ein Maximum und höchstens ein Minimum.

Beweis. Seien etwa x und y zwei Maxima von M. Da beide in M liegen und obere Schranken sind, erhalten wir $x \le y$ und $y \le x$. Gemäß (AS) sind also x und y gleich. Minima behandelt man genauso. □

Wir kommen zu zwei wichtigen Begriffen der Vorlesung, die allgemeiner als Minimum und Maximum sind und z.B. in Beispiel 1.11 b) verwendet werden können.

Definition 1.13. *Es seien K ein geordneter Körper und $\emptyset \neq M \subseteq K$.*

a) Sei M nach oben beschränkt. Wenn es eine kleinste obere Schranke b von M gibt, so heißt diese Supremum *von M, und man schreibt $b = \sup M$.*

b) Sei M nach unten beschränkt. Wenn es eine größte untere Schranke a von M gibt, so heißt diese Infimum *von M, und man schreibt $a = \inf M$.*

Man beachte, dass in $\mathbb{Q}$ Suprema oder Infima nicht immer existieren, siehe Beispiel 1.16. Wir betrachten ein offenes Intervall.

Beispiel 1.14. In Beispiel 1.11 b) gilt $b = \sup(-\infty, b)$.

Beweis. Wir wissen aus Beispiel 1.11, dass b eine obere Schranke von $(-\infty, b)$ ist. Wir nehmen an, es gäbe eine obere Schranke $x < b$ von $(-\infty, b)$. Nach Lemma 1.9 gilt dann $x < \frac{1}{2}(x+b) < b$, sodass $\frac{1}{2}(x+b)$ in $(-\infty, b)$ liegt. Somit kann x keine obere Schranke sein. □

Wir sammeln einige einfache, aber wichtige Eigenschaften der obigen Konzepte.

Bemerkung 1.15. Sei M eine nichtleere Teilmenge eines geordneten Körpers K. Dann gelten die folgenden Aussagen.

a) Wenn das Supremum von M existiert, dann ist es das Minimum der oberen Schranken von M. Entsprechend ist $\inf M$ das Maximum der unteren Schranken von M, soweit es existiert. Diese Charakterisierungen folgen aus den Definitionen 1.10 und 1.13.

b) Wegen a) und Bemerkung 1.12 besitzt M höchstens ein Supremum und höchstens ein Infimum.

c) Wenn $\max M$ bzw. $\min M$ existieren, dann sind sie schon das Supremum bzw. das Infimum von M. In der Tat ist z.B. $\max M$ eine obere Schranke und als Element von M kleiner gleich jeder anderen oberen Schranke.

d) Wenn Supremum und Infimum von M existieren, dann gilt $\inf M \le m \le \sup M$ für alle $m \in M$.

e) Setze $-M = \{-x \mid x \in M\}$. (Zum Beispiel gilt in $\mathbb{Q}$ die Gleichung $-[-2,3] = [-3,2]$.) Genau dann ist $b \in K$ eine untere Schranke von M, wenn $-b$ eine obere von $-M$ ist. (Nach einer Übung ist $b \le m$ äquivalent zu $-b \ge -m$.) Obere Schranken erfüllen eine entsprechende Aussage. Weiter existiert $\inf M$ genau dann, wenn $\sup(-M)$ existiert, und dann gilt $\inf M = -\sup(-M)$.

Beweis. Sei zuerst b das Maximum einer Teilmenge P von K. Dann ist $-b \in -P$ eine untere Schranke von $-P$. Also ist $-b$ das Minimum von $-P$.

Wir wenden dies auf die Menge P der unteren Schranken von M an. Die Menge M besitze ein Infimum. Nach a) und der Vorüberlegungen ist dieses gleich

$$\begin{aligned}\max P &= -\min(-P) = -\min\{-a \mid a \in K \text{ ist untere Schranke von } M\} \\ &= -\min\{c \mid c \in K \text{ ist obere Schranke von } -M\} = -\sup(-M)\end{aligned}$$

Hier haben wir $-a$ durch c ersetzt. Insbesondere besitzt $-M$ ein Supremum. Entsprechend folgert man die Existenz von $\inf M$ aus der von $\sup(-M)$. □

f) Sei $M \subseteq N \subseteq K$. Wenn $\sup N$ und $\sup M$ existieren, dann ist $\sup N$ eine obere Schranke von N und damit der Teilmenge M, sodass $\sup M \leq \sup N$ gilt. Entsprechend erhalten wir $\inf M \geq \inf N$, wenn $\inf N$ und $\inf M$ existieren. ◊

Beispiel 1.16. Die Menge $M = \{x \in \mid x^2 \leq 2\}$ ist nach oben beschränkt und hat kein Supremum in $\mathbb{Q}$.

Beweis. 1) Wenn $x \geq 2$ ist, folgen die Ungleichungen $x^2 \geq 2x \geq 4$. Somit liegt x nicht in M. Per Negation sehen wir, dass jedes Element x von M kleiner als 2 sein muss. Also ist 2 eine obere Schranke von M.

2) Wir nehmen an, dass $s := \sup M$ in $\mathbb{Q}$ existierte. Dann gibt es teilerfremde $p, q \in \mathbb{N}$ mit $s = p/q$. Gemäß Lemma 1.27 unten gilt nun $s^2 = 2$ und also $p^2 = 2q^2$, sodass p^2 gerade ist. Folglich ist p gerade (für ein ungerades p wäre auch p^2 ungerade) und es gibt ein $r \in \mathbb{N}$ mit $p = 2r$. Wir schließen daraus $2q^2 = 4r^2$, sodass $q^2 = 2r^2$ gerade ist. Damit sind p und q gerade, was ihrer Teilerfremdheit widerspricht. □

Wir fügen ein letztes Axiom hinzu, um die Existenz von Suprema sicher zu stellen. Dies schließt $\mathbb{Q}$ aus.

Definition 1.17. *Ein geordneter Körper K, in dem jede nach oben beschränkte nichtleere Menge ein Supremum besitzt, heißt* ordnungsvollständig. *(Nach Bemerkung 1.15 e) hat dann auch jede nach unten beschränkte nichtleere Menge ein Infimum.) Die* reellen Zahlen $\mathbb{R}$ *sind ein ordnungsvollständiger geordneter Körper.*

Gemäß den Definitionen 1.3 und 1.7 schreiben wir $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ und $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$. Ferner setzen wir $\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty)$ und $\mathbb{R}_{\leq 0} = (-\infty, 0]$. Nach Beispiel 1.16 ist $\mathbb{Q}$ ist nicht ordnungsvollständig. Wir besprechen die obige Definition ein wenig.

Man kann $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ als Teilmengen von $\mathbb{R}$ auffassen. Dies geschieht dadurch, dass man ausgehend von 0 und 1 in $\mathbb{R}$, induktiv die Elemente $2 := 1+1$, $3 := 2+1$ usw. definiert, womit man $\mathbb{N}_0$ erhält. Die Operationen $-n$ und m/n für $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$ führen dann auf $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Q}$. Man kann nachrechnen, dass neben den Elementen 0 und 1 auch die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, sowie die Ordnung $\leq$ von $\mathbb{R}$ mit den bekannten Strukturen auf $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ übereinstimmen.

Ferner kann man $\mathbb{R}$ wie in Definition 1.17 ausgehend von der Mengentheorie konstruieren. Dabei ist $\mathbb{R}$ durch Definition 1.17 "eindeutig bestimmt". Diese Sachverhalte sind nicht Gegenstand dieser Vorlesung, da sie recht umfangreich und begrifflich anspruchsvoll sind. Verwandte allgemeinere Konstruktionen werden in späteren Vorlesungen besprochen. Gleichwohl sei hier auf Theorem I.1.10 in [1] für eine Beweisskizze und auf die Monographien [2] und [5] für eine detaillierte Darstellung verwiesen.

Wir zeigen nun eine wichtige Charakterisierung von Suprema und Infima.

Satz 1.18. *Seien $s \in \mathbb{R}$ und $M \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer.*

a) Sei M nach oben beschränkt. Genau dann ist s das Supremum von M, wenn s eine obere Schranke von M ist und

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in M \quad \text{mit} \quad s - \varepsilon < x_\varepsilon \leq s.$$

b) Sei stattdessen M nach unten beschränkt. Genau dann ist s das Infimum von M, wenn s eine untere Schranke von M ist und

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in M \quad \text{mit} \quad s \leq x_\varepsilon < s + \varepsilon.$$

Beweis. a) Sei $s = \sup M$. Gemäß Definition 1.13 ist dann s eine obere Schranke von M und für alle $\varepsilon > 0$ ist $s - \varepsilon$ keine obere Schranke von M. Somit existiert wie behauptet ein $x_\varepsilon \in M \cap (s-\varepsilon, s]$. Es gelten umgekehrt diese beiden Eigenschaften, und $r \in (-\infty, s)$ sei eine weitere obere Schranke von M. Setze $\varepsilon = s - r > 0$. Nach Voraussetzung gibt es dann ein Element x_ε von M mit $r = s - \varepsilon < x_\varepsilon$, was ein Widerspruch ist. Dies zeigt die erste Äquivalenz.

b)[1] Sei $s = \inf M$. Nach Definition 1.13 ist s eine untere Schranke von M und für alle $\varepsilon > 0$ ist $s+\varepsilon$ keine untere Schranke von M. Also gibt es ein $x_\varepsilon \in M \cap [s, s+\varepsilon)$. Es gelten umgekehrt diese beiden Eigenschaften, und $r > s$ sei eine weitere untere Schranke von M. Setze $\varepsilon = r - s > 0$. Dann existiert ein Element x_ε von M mit $r = s + \varepsilon > x_\varepsilon$. Dieser Widerspruch impliziert die zweite Behauptung. □

Wir verwenden den obigen Satz zuerst um zu zeigen, dass in $\mathbb{Z}$ Suprema und Infima tatsächlich Maxima und Minima sind. Daraus folgen wichtige Eigenschaften von $\mathbb{R}$, die bei Konvergenzuntersuchungen von großem Nutzen sind.

Satz 1.19. *Sei M eine nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$. Dann hat M ein Minimum. Insbesondere hat eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ein Minimum (da sie die untere Schranke 1 besitzt). Wenn $\emptyset \neq N \subseteq \mathbb{Z}$ nach oben beschränkt ist, dann hat diese Menge ein Maximum.*

Beweis. Gemäß Definition 1.17 existiert $x := \inf M$. Satz 1.18 mit $\varepsilon = 1/2$ liefert dann eine Zahl $m_0 \in M \cap [x, x + \frac{1}{2})$. Somit ist m_0 kleiner als $m + \frac{1}{2}$ für jedes $m \in M$, woraus $m > m_0 - \frac{1}{2}$ folgt. Da für $m \in \mathbb{Z} \setminus \{m_0\}$ stets $|m - m_0| \geq 1$ gilt, erhalten wir $m_0 \leq m$ für alle $m \in M$. Also ist m_0 das Minimum von M. Die letzte Behauptung zeigt man genauso. □

Satz 1.20. *a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Zahl $n_x \in \mathbb{N}$ mit $n_x > x$.*

b) Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existiert eine Zahl $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $1/n_\varepsilon < \varepsilon$.

c) Die Zahl $x \in \mathbb{R}$ erfülle $x \leq 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $x \leq 0$.

[1] Dieser Beweis wurde in der Vorlesung ausgelassen.

Beweis. a) Wir nehmen an, es gäbe eine Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_0 \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 1.19 hätte dann $\mathbb{N}$ ein Maximum N. Diese Eigenschaft steht aber im Widerspruch zu $N < N+1 \in \mathbb{N}$, sodass a) gezeigt ist.

b) Nach a) mit $x = \frac{1}{\varepsilon} > 0$, gibt es eine Zahl $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $n_\varepsilon > 1/\varepsilon$, also $\varepsilon > 1/n_\varepsilon$.

c) Wenn $x > 0$ wäre, gäbe es nach b) eine natürliche Zahl n_0 mit $x > 1/n_0$, was der Voraussetzung in c) widerspricht. □

Ein erster Ausflug ins Unendliche. Wir beginnen mit einigen allgemeinen Definitionen und fügen erste Eigenschaften an. Diese Sachverhalte werden wir später vertiefen, siehe auch die Vorlesung Lineare Algebra.

Definition 1.21. *Seien M, N und P nichtleere Mengen.*

a) Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt injektiv*, wenn für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$ stets $f(x) \neq f(y)$ gilt. Sie nennt man* surjektiv*, wenn es für alle $z \in N$ ein $x \in M$ mit $f(x) = z$ gibt. Eine injektive und surjektive Abbildung ist* bijektiv*.*

b) Für ein bijektives $f : M \to N$ existiert die Umkehrabbildung *(oder Inverse) $f^{-1} : N \to M$; $y \mapsto f^{-1}(y) = x$, wobei $x \in M$ das eindeutig bestimmte Element mit $f(x) = y$ ist.*

c) Für Abbildungen $f : M \to N$ und $g : N \to P$ ist die Komposition *(oder Verknüpfung) von g und f durch $g \circ f : M \to P$; $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, gegeben.*

Bemerkung 1.22. Seien M, N und P nichtleere Mengen, sowie $f : M \to N$ und $g : N \to P$ bijektive Abbildungen.

a) Die Inverse $f^{-1} : N \to M$ ist auch bijektiv, da sie für jedes $x \in M$ das eindeutige Urbild $y = f(x) \in N$ hat. Weiter gelten $x = f^{-1}(f(x))$ und $y = f(f^{-1}(y))$.

b) Auch die Komposition $g \circ f : M \to P$ ist bijektiv mit der Inversen $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. In der Tat, gilt für $z \in P$ die Gleichung $(g \circ f)(f^{-1}(g^{-1}(z))) = g(g^{-1}(z)) = z$. Ferner folgt aus $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ wegen der Injektivität von g die Gleichheit $f(x) = f(y)$ und damit $x = y$, da auch f injektiv ist. ♢

Wir nutzen nun Bijektionen, um endliche und unendliche Mengen einzuführen.

Definition 1.23. *Zwei nichtleere Mengen M und N heißen* gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung $f : M \to N$ gibt. Wenn M und $\{1, \ldots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gleichmächtig sind, so schreibt man $\#M = n$ und nennt M* endlich*. Wenn dies für kein $n \in \mathbb{N}$ gilt, so heißt M* unendlich *und man setzt $\#M = \infty$.*

Diese Begriffe gehen auf Georg Cantor zurück. Wir geben hier nur einige einfache Eigenschaften und erste Beispiele in $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ an, siehe Abschnitt 3.2 für $\mathbb{R}$.

Bemerkung 1.24. a) Sei $\#M = n \in \mathbb{N}$. Dann können wir $x_k = f^{-1}(k)$ für die Abbildung f aus Definition 1.23 und $k \in \{1, \ldots, n\}$ setzen. Daraus erhalten wir $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

b) Mittels Teil a) sieht man sofort, dass eine Teilmenge einer endlichen Menge endlich ist. Per Negation folgt dann, dass eine Obermenge einer unendlichen Menge auch unendlich ist.

c) Seien M und N gleichmächtig. Dann gilt $\#M = \#N$. Um dies nachzuweisen, sei zuerst $\#M = n \in \mathbb{N}$. Wir haben dann Bijektionen $f : M \to N$ und $g : M \to \{1, \dots, n\}$. Laut Bemerkung 1.22 ist auch $g \circ f^{-1} : N \to \{1, \dots, n\}$ bijektiv, was $\#N = n = \#M$ zeigt. Insbesondere ist N genau dann endlich, wenn dies auf M zutrifft. Damit ist auch deren Unendlichkeit äquivalent. $\Diamond$

Satz 1.25. *a) Für jedes $m \in \mathbb{Z}$ ist die Menge $M = \{j \in \mathbb{Z} \,|\, j \geq m\}$ unendlich.*

b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b > a$ ist die Menge $N = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, a < x < b\}$ unendlich.

Beweis. a) Wir nehmen an, es gäbe ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\#M = n$. Wie in Bemerkung 1.24 gesehen, können wir dann $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ schreiben. Dann liegt die Zahl $y = |x_1| + \ldots + |x_n| + 1 > x_k \geq m$ in $\mathbb{Z}$. Sie ist also ein Element von M, was unmöglich ist, da y größer als jedes x_k ist.

b) Nach Satz 1.20 existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < b - a$. Also gilt $nb > 1 + na$. Satz 1.19 liefert ein minimales $m \in \mathbb{Z}$ mit $m > na$, woraus $na < m \leq 1 + na < nb$ folgt. Somit liegt $x_1 := m/n$ in (a, b). Aus Satz 1.20 erhalten wir ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1/k < x_1 - a$. Damit genügt der Bruch $x_2 := x_1 - 1/k$ den Ungleichungen $a < x_2 < x_1 < b$. Iterativ erhalten wir eine Teilmenge $N_0 = \{x_1, x_2, \dots\}$ von N. Wegen der Bijektivität der Abbildung $f : \mathbb{N} \to N_0$; $f(n) = x_n$, ist die Menge N_0 gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ und damit nach a) unendlich. Aus Bemerkung 1.24 folgt nun die Unendlichkeit der Obermenge N. $\square$

1.3. Potenzen mit rationalen Exponenten

Wir werden in Definition 4.47 allgemeine Potenzen einführen. Da wir aber zuvor zumindest Wurzeln benötigen, definieren wir schon jetzt Potenzen a^q mit rationalen Exponenten $q = m/n$ und der Basis $a > 0$. Die hier verwendete Definition ist direkter, aber umständlicher als die spätere. Wir gehen in drei Schritten vor.

A) Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ setzen wir zunächst $a^n = \prod_{k=1}^{n} a$ und $a^0 = 1$, sowie $a^{-n} := (a^n)^{-1}$ wenn $a \neq 0$. Per Kehrbruch erhält man auch $a^n = (a^{-n})^{-1}$. Wir zeigen unten die Rechenregeln für diese ganzzahlige Potenzen. Um die Potenzgesetze plausibel zu machen, berechnen wir z.B. für das erste

$$a^m b^m = a \cdot \ldots \cdot a \cdot b \cdot \ldots \cdot b = ab \cdot \ldots \cdot ab = (ab)^m, \qquad m \in \mathbb{N},$$

wobei die Punkte für m-fache Produkte stehen. Man benötigt aber vollständige Induktion, um diese Punkte präzise zu fassen. Im Hinblick auf die Definition behandelt man dabei negative Exponenten per Kehrbruch (und Fallunterscheidungen).

Lemma 1.26. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$, wobei $a, b \neq 0$ sein sollen, wenn k oder m negativ sind. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) $a^m b^m = (ab)^m$. b) $a^k a^m = a^{k+m}$. c) $(a^k)^m = a^{km} = (a^m)^k$.

d) Seien $a, b \geq 0$. Dann ist $a < b$ äquivalent zu $a^n < b^n$, sowie $a \leq b$ zu $a^n \leq b^n$.

Beweis. a) 1) Sei zuerst $m \in \mathbb{N}_0$. Wir gehen induktiv vor. Behauptung a) ist klar für $m = 0$. Sie gelte für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Daraus und aus der obigen Definition folgen die Gleichungen

$$a^{m+1}b^{m+1} = aa^m\, bb^m = ab\,(ab)^m = (ab)^{m+1}.$$

Per vollständiger Induktion ist Teil a) für $m \in \mathbb{N}_0$ gezeigt.

2) Sei $m < 0$. Da dann $-m > 0$ ist, liefert Schritt 1) die Identität $a^{-m}b^{-m} = (ab)^{-m}$. Aussage a) erhalten wir nun per Kehrbruch durch

$$a^m b^m = \frac{1}{a^{-m}}\,\frac{1}{b^{-m}} = \frac{1}{(ab)^{-m}} = (ab)^m.$$

b) 1) Wähle ein (festes) $k \in \mathbb{N}_0$. Die Formel in b) ist offenbar wahr für $m = 0$. Sie gelte für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Wie oben berechnen wir

$$a^k a^{m+1} = a^k a^m a = a^{k+m} a = a^{k+m+1}.$$

Vollständige Induktion impliziert die Aussage b) für $k, m \in \mathbb{N}_0$.

2) Seien nun $k, m < 0$. Aus Teil 1) erhalten wir $a^{-k}a^{-m} = a^{-k-m} = a^{-(k+m)}$, woraus wieder im Kehrbruch die Behauptung folgt.

3) Schließlich sei $km < 0$. Wenn $k + m < 0$ sein sollte, betrachten wir $-m$ und $-k$, deren Produkt auch negativ ist. Also können wir $k + m \geq 0$ annehmen. Sei dann etwa $k > 0 > m$ (sonst vertausche man die Buchstaben). Schritt 1) liefert nun $a^{-m}a^{k+m} = a^{k+m-m} = a^k$. Eine Multiplikation mit a^m zeigt Behauptung b).

c) Sei $k \in \mathbb{Z}$. 1) Sei $m \in \mathbb{N}_0$. Wieder folgt die Aussage für $m = 0$ leicht aus der Definition. Sie gelte für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Auch Teil b) verwendend, erhalten wir dann

$$(a^k)^{m+1} = (a^k)^m a^k = a^{km}a^k = a^{(m+1)k}.$$

Somit ist die erste Gleichung in c) für $m \in \mathbb{N}_0$ induktiv gezeigt.

2) Sei $m < 0$. Schritt 1) führt auf $(a^k)^{-m} = a^{-km}$, was im Kehrbruch $(a^k)^m = a^{km}$ nach sich zieht. Die zweite Gleichung in c) folgt wegen $km = mk$.

d) 1) Sei $0 < a < b$. Daraus ergibt sich $a^2 < ab < b^2$ und per Induktion $a^n < b^n$. Dies gilt auch für $0 \leq a < b$. Ferner impliziert $a = b$ die Gleichung $a^n = b^n$.

2) Wenn wir in 1) für $<$ die Rollen von a und b vertauschen, erhalten wir per Negation, dass aus $a^n \leq b^n$ die Ungleichung $a \leq b$ folgt. Also ist die zweite Äquivalenz in d) gezeigt. Die andere ergibt sich entsprechend. □

Wir geben ein kleines Rechenbeispiel zur Verdeutlichung an:

$$(3^2)^3\, 6^{-3} = 3^6\, 2^{-3}\, 3^{-3} = 3^3\, (\tfrac{1}{2})^3 = (\tfrac{3}{2})^3.$$

B) Nun erfolgt der Hauptschritt, in dem wir die n-te Wurzel w von $a > 0$ konstruieren. Dazu lösen wir die Gleichung $w^n = a$ mittels Ordnungsvollständigkeit.

Lemma 1.27. *Seien $a \in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}$. Die Menge $M = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \,|\, x^n \leq a\}$ besitzt ein Supremum w in $\mathbb{R}$. Dieses ist die einzige Lösung von $w^n = a$ in $\mathbb{R}_+$.*

Beweis. 1) Die Menge M ist nichtleer, da 0 in M liegt. Für $x \geq 1 + a$ folgen aus Lemma 1.26 d) und Satz 1.8 die Ungleichungen $x^n \geq (1+a)^n \geq 1 + na > a$, sodass x nicht in M liegt. Per Negation sehen wir, dass $1 + a$ eine obere Schranke von M ist. Somit existiert nach Definition 1.17 das Supremum $w := \sup M \geq 0$.

2) Wir nehmen an, dass $w^n < a$ gälte. Dann setzen wir

$$\varepsilon := \min\Big\{1, \frac{a - w^n}{(1+w)^n}\Big\} \in (0, 1].$$

Der binomische Satz aus Beispiel 0.3, Formel (0.1) und Lemma 1.26 d) implizieren

$$\begin{aligned}(w+\varepsilon)^n &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} w^j \varepsilon^{n-j} = w^n + \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} w^j \varepsilon^{n-j-1} \\ &\leq w^n + \varepsilon \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} w^j 1^{n-j-1} = w^n + \varepsilon (w+1)^n \leq a.\end{aligned}$$

Am Ende haben wir die Definition von ε ausgenutzt. Damit gehört $w + \varepsilon$ zu M. Weiter gilt $w + \varepsilon > w$, was der Definition von w widerspricht. Also erhalten wir $w^n \geq a > 0$, woraus mit Lemma 1.26 d) auch $w > 0$ folgt.

3)[2] Wir nehmen an, dass $w^n > a$ gälte. Wir setzen nun

$$\varepsilon := \min\Big\{1, \frac{w^n - a}{(1+w)^n}\Big\} \in (0, 1].$$

Wie in Teil 2) berechnen wir

$$\begin{aligned}(w-\varepsilon)^n &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} w^j \varepsilon^{n-j} \geq w^n - \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} w^j \varepsilon^{n-j-1} \\ &\geq w^n - \varepsilon \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} w^j 1^{n-j-1} = w^n - \varepsilon (w+1)^n \geq a.\end{aligned}$$

Andererseits liefert Satz 1.18 eine Zahl $x_\varepsilon \in M$ mit $0 \leq w - \varepsilon < x_\varepsilon \leq w$. Mittels Lemma 1.26 d) ergibt sich dann der Widerspruch $(w - \varepsilon)^n < x_\varepsilon^n \leq a$, da x_ε in M liegt. Somit gilt $w^n = a$.

4) Es gelte auch $v^n = a$ für ein $v \in \mathbb{R}_+$. Also haben wir sowohl $v^n \leq w^n$ als auch $w^n \leq v^n$. Lemma 1.26 d) impliziert nun $v \leq w$ und $w \leq v$, und somit $v = w$. □

C) Nun können wir die gewünschten Potenzen definieren.

Definition 1.28. *Es seien $a \in \mathbb{R}_+$ und $q = \frac{m}{n}$ teilerfremd mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei w wie in Lemma 1.27 gegeben. Dann definieren wir die n-te* Wurzel *von a durch $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} := w$ und die q-te* Potenz *durch $a^q := (a^{\frac{1}{n}})^m$. Falls $q > 0$ setzen wir auch $0^q := 0$. Wir schreiben $\sqrt{a}$ statt $\sqrt[2]{a}$.*

[2] Dieser Teil wurde in der Vorlesung ausgelassen.

Die Wurzel ist also durch die Gleichung $(\sqrt[n]{a})^n = a$ charakterisiert. Wir zeigen nun die grundlegenden Rechenregeln der Potenzen.

Satz 1.29. *Seien $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \in \mathbb{R}$ und $p, q \in \mathbb{Q}$, wobei $a, b > 0$ sind, falls $p < 0$ oder $q < 0$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) $a^q b^q = (ab)^q$. *b)* $a^p a^q = a^{p+q}$. *c)* $(a^p)^q = a^{pq} = (a^q)^p$.

d) Sei $b > a > 0$. Dann gelten $b^q > a^q > 0$ für $q > 0$, und $a^q > b^q > 0$ für $q < 0$.

e) $|x| = \sqrt{x^2}$.

Beweis. Seien $a, b > 0$, $p = \frac{k}{l}$ und $q = \frac{m}{n}$ teilerfremd für $l, n \in \mathbb{N}$ und $k, m \in \mathbb{Z}$. (Für $a = 0$ oder $b = 0$ sind die Aussagen klar.) Wir führen die Behauptungen auf Lemma 1.27 und Definition 1.28 zurück, wobei zuerst die Wurzeln betrachtet werden und auch Lemma 1.26 eingeht.

a) Lemmas 1.26 und 1.27 zeigen $(a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}})^n = (a^{\frac{1}{n}})^n (b^{\frac{1}{n}})^n = ab$. Also liefert Definition 1.28 die Gleichung $a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$. Wir bilden davon die m-te Potenz und erhalten mittels Definition 1.28 und Lemma 1.27 die Behauptung a) durch

$$(ab)^{\frac{m}{n}} = ((ab)^{\frac{1}{n}})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m (b^{\frac{1}{n}})^m = a^q b^q.$$

b) Ähnlich wie in a) berechnen wir

$$(a^{\frac{m}{n}})^n = ((a^{\frac{1}{n}})^m)^n = ((a^{\frac{1}{n}})^n)^m = a^m,$$

und erhalten somit $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$. Daraus folgt mittels Lemmas 1.26 und 1.27

$$(a^p a^q)^{ln} = ((a^k)^{\frac{1}{l}})^{ln} ((a^m)^{\frac{1}{n}})^{ln} = (a^k)^n (a^m)^l = a^{kn+lm}.$$

Wenn wir nun die ln-te Wurzel ziehen, ergibt sich b).

c) Die erste Gleichung in c) erhalten wir wie in b) aus der Rechnung

$$[(a^p)^q]^{ln} = [(a^p)^{\frac{m}{n}}]^{ln} = [(a^p)^m]^l = (a^{\frac{k}{l}})^{lm} = (a^k)^m = a^{km}$$

und dem Ziehen der ln-ten Wurzel. Die zweite Gleichung in c) ist eine Konsequenz der ersten, da $pq = qp$ gilt.

d) Nach Lemma 1.26 d) folgt aus $b^{\frac{1}{n}} \leq a^{\frac{1}{n}}$ die Ungleichung $b \leq a$. Per Negation folgt Behauptung d) für $m = 1$. Lemma 1.26 d) impliziert dann die Aussage für $m \in \mathbb{N}$. Für negative m erhalten wir sie im Kehrbruch, eine Übung verwendend.

e) Nach Definition 1.5 haben wir $|x|^2 = x^2$ für $x \geq 0$ und $|x|^2 = (-x)^2$ für $x < 0$. Also gilt $|x|^2 = x^2$, woraus die Behauptung mit Definition 1.28 folgt. □

Auch hier illustrieren wir die Potenzgesetze durch ein Rechenbeispiel:

$$(6^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}\, 2^{-\frac{3}{2}} = \frac{6^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{3^{\frac{1}{2}}\, 2^{\frac{1}{2}}}{2\, 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Wir betonen, dass Wurzeln nicht additiv sind. Zum Beispiel gilt $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$ für alle $x, y > 0$, siehe die Übungen.

1.4. Komplexe Zahlen

Wir wollen die Gleichung $x^2 = -1$ lösen. Nach Satz 1.4 hat diese Gleichung in einem geordneten Körper keine Lösung, also insbesondere nicht in $\mathbb{R}$. Wir erweitern nun $\mathbb{R}$ zu einem (nicht geordneten) Körper, um eine Lösung zu erhalten. Für $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ betrachten wir dazu die Addition und die Multiplikation

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v), \qquad (x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu).$$

Es ergibt sich speziell $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$. Wir schreiben nun 1 statt $(1, 0)$, i statt $(0, 1)$ und $x + \mathrm{i}y = z$ statt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Insbesondere gilt dann $\mathrm{i}^2 = -1$.

Wir definieren dementsprechend die *komplexen Zahlen*

$$\mathbb{C} := \big\{z = x + \mathrm{i}y \,\big|\, x, y \in \mathbb{R}\big\}.$$

Dabei fassen wir $\mathbb{R}$ als die Teilmenge $\{z = x + \mathrm{i} \cdot 0 \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ von $\mathbb{C}$ auf. Für $z = x + \mathrm{i}y$ und $w = u + \mathrm{i}v$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ erklären wir die Verknüpfungen

$$z + w := (x + u) + \mathrm{i}(y + v) \in \mathbb{C}, \qquad zw = z \cdot w := (xu - yv) + \mathrm{i}(xv + yu) \in \mathbb{C},$$

wobei in den Klammern nur reelle Operationen stehen. Die Körpereigenschaften von $\mathbb{R}$ implizieren leicht, dass $(\mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot)$ ein Körper ist. Die Inversen sind durch

$$-z = -x - \mathrm{i}y \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \text{für} \quad z \neq 0$$

gegeben. Für $z = x$ und $w = u$ in $\mathbb{R}$ erhält man die reellen Verknüpfungen. Durch die obige Identifikation der Zahl $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit dem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ haben wir also die Ebene mit der üblichen Vektoraddition und einer neuen Multiplikation so versehen, dass ein Körper entsteht. Wir führen nun wichtige Bezeichnungen ein.

Definition 1.30. *Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann heißt $x = \operatorname{Re} z$ der* Realteil *von z, $y = \operatorname{Im} z$ der* Imaginärteil *von z, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ der* Betrag *von z und $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$ das* komplex Konjugierte *von z.*

Dabei entspricht $\overline{z}$ dem an der x-Achse gespiegelten Punkt $(x, -y)$. Der komplexe Betrag $|z|$ ist gleich der euklidischen Länge des Vektors (x, y) in $\mathbb{R}^2$. Wenn $z = x$ in $\mathbb{R}$ liegt, dann stimmt der komplexe Betrag $|z| = \sqrt{x^2}$ nach Satz 1.29 mit dem reellen Betrag $|x|$ überein. Wir definieren schließlich für den Mittelpunkt $z \in \mathbb{C}$ und den Radius $r > 0$ die Mengen

$$\begin{aligned} B(z, r) &:= \big\{w \in \mathbb{C} \,\big|\, |z - w| < r\big\} && \text{(die offene Kreisscheibe)},\\ \overline{B}(z, r) &:= \big\{w \in \mathbb{C} \,\big|\, |z - w| \leq r\big\} && \text{(die abgeschlossene Kreisscheibe)},\\ S(z, r) &:= \big\{w \in \mathbb{C} \,\big|\, |z - w| = r\big\} && \text{(die Kreislinie)}. \end{aligned}$$

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt hierbei etwa $B(x, r) \cap \mathbb{R} = (x - r, x + r)$. Neben Kreisen können wir z.B. Halbebenen komplex beschreiben. Für gegebene $a, b \in \mathbb{R}$ sind etwa

$$\big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, \operatorname{Re} z > a\big\} \quad \text{und} \quad \big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, \operatorname{Im} z \leq b\big\}$$

die Halbebene rechts von der vertikalen Geraden $x = a$ bzw. die Halbebene unterhalb und inklusive der horizontalen Geraden $y = b$.

Wir zeigen nun wichtige Eigenschaften der Operationen in $\mathbb{C}$ meistens durch direktes Nachrechnen. Insbesondere verhält sich der komplexe Betrag im wesentlichen wie der reelle, vergleiche Satz 1.6.

Satz 1.31. *Für $w, z \in \mathbb{C}$ gelten die folgenden Aussagen.*

a) $\overline{\overline{z}} = z$; $\quad |z|^2 = z\overline{z}$; $\quad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, *wenn* $z \neq 0$.
b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$.
c) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z})$, $\quad \operatorname{Re} \overline{z} = \operatorname{Re} z$, $\quad \operatorname{Im} \overline{z} = -\operatorname{Im} z$.
d) $|\operatorname{Re} z| \le |z|$, $\quad |\operatorname{Im} z| \le |z|$, $\quad |\overline{z}| = |z|$.
e) $|z| \ge 0$; $\quad z = 0 \iff |z| = 0$.
f) $|zw| = |z|\,|w|$. *Insbesondere gilt* $|-z| = |z|$.
g) $|z + w| \le |z| + |w|$. *(Dreiecksungleichung)*
h) $|z - w| \ge \big||z| - |w|\big|$.

Beweis. Es seien $z = x + \mathrm{i}y$ und $w = u + \mathrm{i}v$ für $x, y, u, v \in \mathbb{R}$.

a) Es gelten $\overline{\overline{z}} = \overline{x - \mathrm{i}y} = x + \mathrm{i}y$ und $z\overline{z} = (x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y) = x^2 - \mathrm{i}^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$, woraus sich auch die dritte Gleichung ergibt.

b) Wir haben $\overline{z + w} = x + u - \mathrm{i}y - \mathrm{i}v = \overline{z} + \overline{w}$ und

$$\overline{z}\,\overline{w} = (x - \mathrm{i}y)(u - \mathrm{i}v) = xu - \mathrm{i}xv - \mathrm{i}yu + \mathrm{i}^2yv = (xu - yv) - \mathrm{i}(xv + yu) = \overline{zw}.$$

c) Aus $z + \overline{z} = x + \mathrm{i}y + x - \mathrm{i}y = 2x = 2\operatorname{Re} z$ folgt die erste Formel, und aus $z - \overline{z} = x + \mathrm{i}y - x + \mathrm{i}y = 2\mathrm{i}y = 2\mathrm{i}\operatorname{Im} z$ die zweite. Die Definition liefert die anderen.

d) Satz 1.29 zeigt $|\operatorname{Re} z| = |x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ und analog die zweite Aussage. Für die letzte berechnen wir $|\overline{z}| = |x + \mathrm{i}(-y)| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |z|$.

e) Nach d) impliziert $|z| = 0$ schon $z = 0$. Die anderen Teile sind klar.

f) Aus a) und b) schließen wir $|zw|^2 = zw\overline{zw} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2\,|w|^2$. Die Behauptung erhalten wir, indem wir die Wurzel ziehen.

g) Mittels der Aussagen a), b), c), d) und f) erhalten wir

$$\begin{aligned}
|z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} = |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \le |z|^2 + 2\,|z\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2\,|z|\,|w| + |w|^2 \\
&= (|z| + |w|)^2.
\end{aligned}$$

Wurzelziehen führt auf Behauptung g). Diese impliziert Teil h) wie in Satz 1.6. $\square$

Wir schließen mit einem Zahlenbeipiel. Es gilt

$$z := \frac{2 + 3\mathrm{i}}{-1 + 2\mathrm{i}} = \frac{(2 + 3\mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i})}{(-1 + 2\mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i})} = \frac{2 + 4\mathrm{i} + 3\mathrm{i} + 6\mathrm{i}^2}{-1 + 4\mathrm{i}^2} = \frac{-4 + 7\mathrm{i}}{-5} = \frac{4}{5} - \frac{7}{5}\mathrm{i}.$$

Daraus folgen $\operatorname{Re} z = \frac{4}{5}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{7}{5}$, $-z = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}\mathrm{i}$, $\overline{z} = \frac{4}{5} + \frac{7}{5}\mathrm{i}$ und

$$|z| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{49}{25}} = \frac{\sqrt{65}}{5}, \qquad \frac{1}{z} = \frac{-1 + 2\mathrm{i}}{2 + 3\mathrm{i}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{25}{65}\Big(\frac{4}{5} + \frac{7}{5}\mathrm{i}\Big) = \frac{1}{13}(4 + 7\mathrm{i}).$$

KAPITEL 2

Konvergenz von Folgen

Konvergenz und Grenzwert sind die zentralen Begriffe der Analysis. In diesem Kapitel werden sie in der einfachsten Situation eingeführt und untersucht.

2.1. Definitionen und einfache Eigenschaften

In der Definition des Grenzwerts spielen die *Quantoren* $\forall$ und $\exists$ eine zentrale Rolle. Deshalb beginnen wir mit Vorbetrachtungen zu diesen logischen Bausteinen.

Verneinung und Reihenfolge von Quantoren. Es seien M eine nichtleere Menge und $A(m)$ für jedes $m \in M$ eine Aussage. Wir erinnern daran, dass die Aussage $\forall\, m \in M : A(m)$ besagt, dass alle $A(m)$ gelten. Weiter bedeutet $\exists\, m \in M : A(m)$, dass (mindestens) ein $A(m)$ gilt.

Wir negieren nun diese Aussagen. Zunächst meint $\neg(\forall\, m \in M : A(m))$, dass $A(m)$ nicht für alle $m \in M$ gilt; also gibt es ein $m_0 \in M$ mit $\neg A(m_0)$, in Formeln:

$$\neg(\forall\, m \in M : A(m)) = (\exists\, m_0 \in M : \neg A(m_0)).$$

Entsprechend besagt $\neg(\exists\, m \in M : A(m))$, dass $A(m)$ für kein $m \in M$ gilt, also für alle $m \in M$ nicht gilt; d.h.,

$$\neg(\exists\, m \in M : A(m)) = (\forall\, m \in M : \neg A(m)).$$

Somit gelten die Vertauschungsregeln '$\neg\forall\ =\ \exists\,\neg$' und '$\neg\exists\ =\ \forall\,\neg$'. Unten diskutieren wir ein gehaltvolles Anwendungsbeispiel, hier geben wir zwei einfache Beispiele mit wahren Aussagen an:

$$\neg(\forall\, n \in \mathbb{N} : n \geq 2) = (\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n_0 < 2),$$
$$\neg(\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : 2n_0 = 1) = (\forall\, n \in \mathbb{N} : 2n \neq 1).$$

Sei auch $N \neq \emptyset$ eine Menge. Für doppelt indizierte Aussagen $A(m, n)$ mit $m \in M$ und $n \in N$ muss man die Reihenfolge der Quantoren beachten, im allgemeinen kommutieren $\forall$ und $\exists$ nicht! Das zeigen die beiden sehr unterschiedlichen Aussagen

$$\forall\, m \in \mathbb{N}\ \ \exists\, n \in \mathbb{N} : n > m \qquad \text{und} \qquad \exists\, n \in \mathbb{N}\ \ \forall\, m \in \mathbb{N} : n > m.$$

Die erste stimmt natürlich (man nehme etwa $n = m + 1$); die zweite behauptet grob falsch, dass es eine (strikte) obere Schranke $n \in \mathbb{N}$ für $\mathbb{N}$ geben soll. In der deutschen Satzstellung stehen im übrigen die Quantoren oft nicht an der logisch richtigen Position. Deswegen hilft es bei komplexen Aussagen oft, diese im logischen

Formalismus aufzuschreiben. Man beachte, dass das Objekt einer Existenzaussage immer von den (im logischen Sinne) davor stehenden Allquantoren abhängt.

Wir definieren als nächstes Folgen und geben dann einige Beispiele an, die ansatzweise die Vielfalt der hier auftretenden Phänomene illustrieren.

Definition 2.1. *Eine Abbildung* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *heißt* (komplexe) Folge. *Man setzt* a_n *statt* $\varphi(n)$ *für* $n \in \mathbb{N}$, *sowie* $(a_n)_{n\geq 1}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_n$ *oder* (a_n) *statt* φ. *Die Zahlen* a_n *nennt man* Folgenglieder. *Wenn diese für alle* $n \in \mathbb{N}$ *in* $\mathbb{R}$ *liegen, dann heißt* $(a_n)_{n\geq 1}$ reell. *Man schreibt anstelle* $(a_n)_n$ *manchmal auch suggestiv* $(a_1, a_2, a_3, \dots)$.

Beispiele. 1) Sei $z \in \mathbb{C}$. Eine konstante Folge ist durch $a_n = z$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Es gilt also $(a_n)_n = (z, z, z, \dots)$.

2) Die Folge $(a_n)_n = (1/n)_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ 'strebt' auf einfache Weise gegen 0.

3) Die 'alternierende' Folge $(a_n)_n = ((-1)^n)_n = (-1, 1, -1, 1, \dots)$ springt zwischen den Werten -1 und 1 hin und her.

4) Das Obige kombinieren wir zu $(a_n)_n = ((-1)^n \frac{3}{n})_n = (-3, \frac{3}{2}, -1, \frac{3}{4}, -\frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \dots)$.

5) Folgen können auch 'unbeschränkt' sein, wie z.B. $(a_n)_n = ((-1)^{n+1} n^2)_n = (1, -4, 9, -16, \dots)$.

6) Statt durch geschlossene Formeln wie oben, kann man Folgen auch durch Fallunterscheidungen wie z.B.

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ ist Quadratzahl,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

angeben. Hier gilt $(a_n)_n = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots)$.

In der Zeichenebene kann man die Glieder a_n einer reellen Folge über den Urbilder $n \in \mathbb{N}$ auftragen. Man kann sich auch die Glieder als eine zeitliche Folge von Punkte in $\mathbb{R}$ (bzw. in $\mathbb{C}$ im komplexen Fall) veranschaulichen. Grob gesagt, strebt eine Folge gegen einen 'Grenzwert' a, wenn ihre Glieder a_n ihm 'beliebig nahe kommen'. Um dies genauer zu fassen, betrachten wir das obige Beispiel 4), in dem die Folge $(a_n)_n = ((-1)^n \frac{3}{n})_n$ gegen 0 konvergieren sollte. Wir geben etwa den Abstand $1/2$ vor. Dann gelten die Relationen

$$|a_n - 0| = |a_n| = \tfrac{3}{n} \leq \tfrac{1}{2}$$

für alle $n \geq N_{1/2} \coloneqq 6$; d.h., für diese n ist der Abstand von a_n und 0 kleiner gleich $1/2$. Wenn wir statt $1/2$ z.B. $1/10$ wählen, so erhalten wir $|a_n - 0| = \frac{3}{n} \leq 1/10$ für alle $n \geq N_{1/10} \coloneqq 30$. Den gewünschten kleineren Abstand erfüllt die Folge also erst ab einem entsprechend größeren Index. Wenn die Folge dies für alle positiven Abstände erfüllt, spricht man von Konvergenz. Diese Überlegungen formulieren wir nun präzise und erhalten die grundlegenden Konzepte der gesamten Vorlesung.

Definition 2.2. *Sei* $(a_n)_{n\geq 1}$ *eine Folge und* $a \in \mathbb{C}$. *Die Folge* $(a_n)_n$ konvergiert gegen a, *wenn es zu jedem gegebenen Abstand* $\varepsilon > 0$ *so einen Startindex* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$

gibt, dass $|a_n - a| \le \varepsilon$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n \ge N_\varepsilon$ *gilt; also wenn*

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\,n \ge N_\varepsilon : \quad |a_n - a| \le \varepsilon. \tag{2.1}$$

Die Zahl a *ist dann der* Grenzwert *(oder Limes) der Folge* $(a_n)_n$*, und man schreibt*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \textit{oder} \qquad a_n \to a \quad (n \to \infty).$$

Im Falle $a_n \to 0$ *für* $n \to \infty$*, bezeichnet man* $(a_n)_n$ *als* Nullfolge*. Eine nicht konvergente Folge heißt* divergent*.*

Also liegen im Falle einer konvergenten Folge $(a_n)_n$ mit Grenzwert a für jedes gegebene $\varepsilon > 0$ alle Folgenglieder ab dem Index N_ε in der Kugel $\overline{B}(a, \varepsilon)$; bis auf endlich viele haben sie demnach zu a einen Abstand kleiner gleich ε. Wenn man n als Zeitpunkt versteht, streben die Punkte a_n für große Zeiten gegen a.

Man beachte, dass $(a_n)_n$ genau dann gegen a konvergiert, wenn $(a_n - a)_n$ oder gleichwertig $(|a_n - a|)_n$ Nullfolgen sind. Außerdem ist es instruktiv, in (2.1) die ersten beiden Quantoren zu vertauschen; man erhält dabei

$$\exists\,N \in \mathbb{N} \;\; \forall\,\varepsilon > 0 \;\; \forall\,n \ge N : \quad |a_n - a| \le \varepsilon.$$

Satz 1.20 impliziert dann $|a_n - a| = 0$ für jedes $n \ge N$, sodass a_n ab N konstant gleich a ist, was natürlich eine viel stärkere Eigenschaft als (2.1) ist. Wir bemerken, dass eine Folge $(a_n)_n$ genau dann divergiert, wenn

$$\forall\,a \in \mathbb{C} \quad \exists\,\varepsilon_a > 0 \quad \forall\,N \in \mathbb{N} \quad \exists\,n = n_{a,N} = n(a, N) \ge N : \quad |a_n - a| > \varepsilon_a. \tag{2.2}$$

Hierbei gilt $n \in \mathbb{N}$, was aber schon in der Definition der Folge enthalten ist. Außerdem versieht man manchmal wie hier Variablen nach Existenzquantoren mit Indizes oder Argumenten, die auf die davor stehenden Allquantoren verweisen, von denen die Existenzaussage abhängt. Wir zeigen die Aussage (2.2). Laut Definition 2.2 ist eine Folge divergent, wenn $\forall\,a \in \mathbb{C} : \neg(2.1)$ gilt. Daraus folgt (2.2) gemäß den oben diskutierten Vertauschungsregeln in den Zwischenschritten

$$\begin{aligned}
&\forall\,a \in \mathbb{C} \;\; \exists\,\varepsilon_a > 0 \;\; \neg(\exists\,N_{\varepsilon_a} \in \mathbb{N} \;\; \forall\,n \ge N_{\varepsilon_a} : \; |a_n - a| \le \varepsilon_a) \\
&\quad = \forall\,a \in \mathbb{C} \;\; \exists\,\varepsilon_a > 0 \;\; \forall\,N \in \mathbb{N} \;\; \neg(\forall\,n \ge N : \; |a_n - a| \le \varepsilon_a) \\
&\quad = \forall\,a \in \mathbb{C} \;\; \exists\,\varepsilon_a > 0 \;\; \forall\,N \in \mathbb{N} \;\; \exists\,n = n_{a,N} \ge N : \; \neg(|a_n - a| \le \varepsilon_a).
\end{aligned}$$

Zur Illustration der obigen Begriffe folgen einfache Beispiele, bei denen man (2.1) oder (2.2) direkt nachprüfen kann. Wir werden sie im Folgenden einige Male verwenden.

Beispiel 2.3. a) Sei $z \in \mathbb{C}$ fest gegeben. Dann konvergiert die konstante Folge mit $a_n = z$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) gegen z.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ (beliebig) vorgegeben. Wähle $N_\varepsilon = 1$. Für alle $n \ge 1$ gilt offenbar $|a_n - z| = |z - z| = 0 \le \varepsilon$. □

b) Sei $p \in \mathbb{Q}_+$ fest gegeben und $a_n = n^{-p}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a_n \to 0$ für $n \to \infty$. Hier haben wir $(a_n)_n = (1, 2^{-p}, 3^{-p}, \dots)$, was die Behauptung nahe legt. Wir motivieren zuerst das Vorgehen im Beweis. Wir wollen $|a_n| = n^{-p} \le \varepsilon$ für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ erzielen. Dies ist aber zu $n \geq \varepsilon^{-1/p}$ äquivalent, sodass wir nur noch eine natürliche Zahl $N_\varepsilon \geq \varepsilon^{-1/p}$ finden müssen.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ (beliebig) vorgegeben. Nach Satz 1.20 gibt es ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $N_\varepsilon \geq \varepsilon^{-1/p} > 0$. Sei $n \geq N_\varepsilon$. Dann impliziert Satz 1.29 die Ungleichungen

$$|a_n - 0| = n^{-p} \leq N_\varepsilon^{-p} \leq (\varepsilon^{-1/p})^{-p} = \varepsilon. \qquad \square$$

c) Sei $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(a_n)_n$ divergiert. Dies ist plausibel, da a_n zwischen -1 und 1 hin und her springt.

Beweis. Wir müssen für jedes $a \in \mathbb{C}$ einen Abstand $\varepsilon_a > 0$ finden, der (2.2) erfüllt. Sei zuerst $a = 1$. Wähle $\varepsilon_1 = 1$. Sei $N \in \mathbb{N}$ gegeben. (Es spielt hier keine Rolle.) Für jedes ungerade $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir $|a_n - a| = |-1-1| = 2 > \varepsilon_1$. Den Fall $a = -1$ behandelt man genauso mit geraden n. Schließlich liege a in $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. Diese Zahl hat von den Folgengliedern den Abstand $d_a = \min\{|1-a|, |-1-a|\} > 0$. Wir wählen deswegen $\varepsilon_a = \frac{1}{2} d_a > 0$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n - a| = \left\{ \begin{matrix} |1-a|, & n \text{ gerade}, \\ |-1-a|, & n \text{ ungerade}, \end{matrix} \right\} \geq d_a > \varepsilon_a. \qquad \square$$

Der nächste Schritt in der Entwicklung der Theorie besteht nun darin, erste Eigenschaften der eingeführten Begriffe zu gewinnen (z.B. Varianten von ihnen) und sie mit den schon bekannten Konzepten in Beziehung zu setzen.

Dazu ist es oft hilfreich Definitionen zu vereinfachen und z.B. $\varepsilon = 1$ in (2.1) zu setzen. Dann sieht man, dass alle Glieder einer konvergenten Folge bis auf endlich viele in der festen Kugel $\overline{B}(a, 1)$ liegen. Somit sollte die Folge *beschränkt* sein. Wir meinen damit, dass die Menge $\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist, d.h., es gibt ein $M \geq 0$ mit $0 \leq |a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner ist eine reelle Folge $(a_n)_n$ nach *oben* oder *unten beschränkt*, wenn das auf die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ zutrifft.

Wir müssen uns ferner fragen, ob eine Folge mehr als einen Grenzwert haben kann. Seien dazu $a, b \in \mathbb{C}$ Limiten von $(a_n)_n$. Wir hätten gerne $a = b$, was nach Satz 1.31 äquivalent zu $|a - b| = 0$ ist. Nun kann man ausnutzen, dass a_n für große n nahe an a und an b liegt. Dazu fügen wir in $|a - b|$ den Term $-a_n + a_n = 0$ ein und erhalten aus der Dreiecksungleichung Satz 1.31 g) und (2.1) die Abschätzung

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| \leq 2\varepsilon$$

für alle genügend großen n. Da hier $\varepsilon > 0$ beliebig ist, wird $a = b$ folgen.

Diese (und spätere) Vorüberlegungen sind noch *nicht* die richtigen Beweise, auch wenn man diese hier mit etwas Erfahrung leicht nachliefern kann. Man fasse diese vorgeschaltete Heuristik als (gut organisierte) ‘Schmierzettelnotizen’ auf, die auf den eigentlichen Beweis hinführen und ihn motivieren sollen. In der Entwicklung der Theorie gelten aber nur der Satz und sein Beweis. (Genauso wie nur schlüssig ausgeführte Argumentationen als richtige Lösungen von Übungsaufgaben zählen.)

Im folgenden Satz zeigen wir nun die Beschränktheit konvergenter Folgen und die Eindeutigkeit des Grenzwertes.

Satz 2.4. *Die Folge $(a_n)_n$ strebe gegen a. Dann gelten die folgenden Aussagen.*
a) $(a_n)_n$ ist beschränkt.
b) Sei auch $a_n \to b$ für $n \to \infty$ und ein $b \in \mathbb{C}$. Dann folgt die Gleichheit $a = b$.

Beweis. a) Wähle $\varepsilon = 1$. Nach (2.1) existiert eine Index $N_1 \in \mathbb{N}$ derart, dass $|a_n - a| \leq 1$ für alle $n \geq N_1$ gilt. Somit erhalten wir für diese n die Schranke

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|,$$

wobei wir Satz 1.31 ausgenutzt haben. Also folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, \cdots, |a_{N_1-1}|, 1 + |a|\} =: M.$$

b) Sei $\varepsilon > 0$. Aus den Voraussetzungen erhalten wir solche Indizes $N_{\varepsilon,a}$ und $N_{\varepsilon,b}$ in $\mathbb{N}$, dass die Ungleichungen $|a_n - a| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N_{\varepsilon,a}$ und $|a_n - b| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N_{\varepsilon,b}$ erfüllt sind. Wir setzen nun $N_\varepsilon := \max\{N_{\varepsilon,a}, N_{\varepsilon,b}\} \in \mathbb{N}$, um beide Abschätzungen verwenden zu können. Wieder mit Satz 1.31 folgt

$$0 \leq |a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| \leq 2\varepsilon$$

für z.B. $n = N_\varepsilon$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ kann man $\varepsilon = \frac{1}{2k} > 0$ wählen, sodass $|a - b| \leq \frac{1}{k}$ folgt. Nun liefert Satz 1.20 die Gleichung $|a-b| = 0$, also $a = b$ nach Satz 1.31. □

Man beachte, dass die Folge $((-1)^n)_n$ beschränkt, aber divergent ist. Somit gilt die Umkehrung von Satz 2.4 a) nicht. Man kann Divergenz nachweisen, indem man zeigt, dass notwendige Bedingungen für Konvergenz wie in Satz 2.4 a) verletzt sind.

Beispiel 2.5. Sei $p \in \mathbb{Q}_+$ und $a_n = n^p$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(a_n)_n = (1, 2^p, 3^p, \dots)$ unbeschränkt und divergent. (Vergleiche Beispiel 2.3 b).)

Beweis. Nach Satz 2.4 reicht es zu zeigen, dass $(n^p)_n$ unbeschränkt ist. Dazu nehmen wir an, es gäbe eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq n^p \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 1.29 gilt dann $n \leq M^{1/p}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was Satz 1.20 widerspricht. □

Wir diskutieren einige Varianten der Konvergenzdefinition, die im Folgenden mehr Flexibilität in den Argumenten erlauben.

Bemerkung 2.6. a) Seien $(a_n)_n$ eine Folge, $a \in \mathbb{C}$ und $c > 0$ eine (von n und ε unabhängige!) Konstante mit

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq N_\varepsilon : \quad |a_n - a| \leq c\varepsilon. \tag{2.3}$$

Dann konvergiert $(a_n)_n$ gegen a. (Für $c = 1$ erhält man aus (2.3) speziell (2.1).)

Beweis. Sei $\eta > 0$ (beliebig) vorgegeben. Setze $\varepsilon := \eta/c > 0$ und $N_\eta := N_\varepsilon$ für $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ aus (2.3). Da dann $c\varepsilon = \eta$ gilt, folgt (2.1) mit η statt ε direkt aus (2.3). □

b) Die Folge $(a_n)_n$ konvergiere gegen a. Dann gilt auch

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \tilde{N}_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq \tilde{N}_\varepsilon : \quad |a_n - a| < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Umgekehrt ist klar, dass (2.1) aus (2.4) folgt.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ (beliebig) vorgegeben. Mit $\varepsilon/2 > 0$ in (2.1) erhalten wir den Index $\tilde{N}_\varepsilon := N_{\varepsilon/2} \in \mathbb{N}$ mit dem $|a_n - a| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ für alle $n \geq \tilde{N}_\varepsilon$ gilt. □

c) Die Folge $(a_n)_n$ habe den Grenzwert a. Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann strebt die *verschobene* Folge $(a_{n+k})_n = (a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$ gegen a. Die Umkehrung gilt auch. Dies folgt direkt aus (2.1).

d) Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$. Eine Abbildung $\psi : \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \geq n_0\} \to \mathbb{C}$ bezeichnet man auch als *Folge*, und man schreibt $(b_n)_{n \geq n_0}$ statt ψ, wobei $b_n := \psi(n)$ ist. Indem man $a_k := b_{k+n_0-1}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ betrachtet, kann man diesen Fall auf die in Definitionen 2.1 und 2.2 behandelte Situation zurückführen. Die hier entwickelte Theorie überträgt sich somit auf Folgen $(a_n)_{n \geq n_0}$. $\Diamond$

Es folgen nun eine Reihe von Rechenregeln für Grenzwerte, die wir samt späterer Varianten ständig verwenden werden. In diesen Regeln zeigen wir, dass der Grenzwert die (meisten der) bisher diskutierten Strukturen auf $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$ respektiert. Wir behandeln $+, \cdot, \leq, |\cdot|, \mathrm{Re}, \mathrm{Im}, ^{-}$. Seien dazu $a_n \to a$ und $b_n \to b$ für $n \to \infty$.

Wir beginnen mit den Körperverknüpfungen. Da $a_n \approx a$ und $b_n \approx b$ für große n, können wir erwarten, dass auch z.B. $a_n + b_n$ für solche n nahe an $a+b$ liegt und dann auch $(a_n + b_n)_n$ gegen $a + b$ konvergiert. Allerdings ist diese Art der Begründung noch viel zu grob (und kann in anderen Zusammenhängen in die Irre führen). Um einem Beweis näher zu kommen, müssen wir den Abstand $|a_n + b_n - (a+b)|$ geeignet kontrollieren, wobei wir die Kleinheit von $a_n - a$ und $b_n - b$ ausnutzen können. Aus der Dreiecksungleichung und (2.1) erhalten wir in der Tat leicht

$$|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq 2\varepsilon$$

für genügend große n. Auch im Falle des Produkts zielen wir auf $a_n - a$ und $b_n - b$. Hier muss man aber passende Terme (etwa $\pm ab_n$) einfügen und erhält wieder mit Satz 1.31 und (2.1) die gewünschten Abschätzungen

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \leq |a_n - a|\,|b_n| + |a|\,|b_n - b| \leq \varepsilon M + |a|\,\varepsilon$$

für genügend große n, wobei man $|b_n|$ gleichmäßig in n mittels Satz 2.4 dominiert.

Als nächstes wollen wir Kehrwerte behandeln. Dazu schreiben wir wie oben

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - a_n|}{|aa_n|} \leq \frac{\varepsilon}{|a|\,|a_n|}.$$

Wir brauchen hier offensichtlich $a \neq 0$ und $a_n \neq 0$ zumindest ab einen Index N. Aber das reicht noch nicht: Um die rechte Seite durch $c\varepsilon$ für eine von n unabhängige Konstante $c > 0$ abzuschätzen, benötigen wir eine in n gleichmäßige positive untere Schranke für $|a_n|$. Da $a \neq 0$ sein muss, wollen wir dazu wieder $a_n \approx a$ verwenden. Die Dreiecksungleichung nach unten liefert

$$|a_n| = |a - (a - a_n)| \geq |a| - |a - a_n| \geq |a| - |a|/2 = |a|/2 > 0,$$

da $|a - a_n| \leq \frac{|a|}{2}$ für große n gilt. Wir können nun die ersten Grenzwertsätze zeigen.

Satz 2.7. *Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergente Folgen mit den Grenzwerten a bzw. b in $\mathbb{C}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) Es existiert $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

b) Es existiert $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$.

c) Sei auch $a \neq 0$. *Dann gibt es so ein* $N \in \mathbb{N}$, *dass* $a_n \neq 0$ *für alle* $n \geq N$ *und* $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$ *für* $n \to \infty$ *und* $n \geq N$ *gelten.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ (beliebig) vorgegeben. Nach Voraussetzung existieren Indizes $N_{\varepsilon,a}$ und $N_{\varepsilon,b}$ in $\mathbb{N}$ derart, dass die Ungleichungen

$$|a_n - a| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_{\varepsilon,a} \qquad \text{und} \qquad |b_n - b| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_{\varepsilon,b} \tag{2.5}$$

gelten. Wir setzen $N_\varepsilon := \max\{N_{\varepsilon,a}, N_{\varepsilon,b}\} \in \mathbb{N}$. Sei $n \geq N_\varepsilon$. Also gilt (2.5) für n.

a) Nach (2.5) und Bemerkung 2.6 folgt Behauptung a) aus der Abschätzung

$$|a_n + b_n - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq 2\varepsilon.$$

b) Satz 2.4 liefert eine Zahl $M \geq 0$ mit $|b_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Indem wir wieder Satz 1.31 und (2.5) verwenden, berechnen wir

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \leq |a_n - a|\,|b_n| + |a|\,|b_n - b| \leq (M + |a|)\varepsilon.$$

Bemerkung 2.6 impliziert dann Aussage b).

c) Wir wählen in (2.5) speziell $\varepsilon_0 := |a|/2 > 0$ und erhalten einen zugehörigen Index $N := N_{\varepsilon_0,a} \in \mathbb{N}$. Für $n \geq N$ liefern (2.5) und die Sätze 1.31 und 1.6 b) die untere Abschätzung

$$|a_n| = |a - (a_n - a)| \geq |\,|a| - |a_n - a|\,| \geq |a| - |a_n - a| \geq |a| - |a|/2 = |a|/2.$$

Dies zeigt den ersten Teil von c). Sei nun $n \geq \max\{N, N_\varepsilon\}$. Wenn wir die eben bewiesene Abschätzung ausnutzen, folgt wie oben die Behauptung aus

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a_n - a|}{|a|\,|a_n|} \leq \frac{2}{|a|^2}\,\varepsilon. \qquad \square$$

Die Nullfolge $(a_n)_n = (\frac{1}{n})_n$ mit der divergenten Kehrwert-Folge $(1/a_n)_n = (n)_n$ zeigt, dass man in Satz 2.7 c) nicht auf die Annahme $a \neq 0$ verzichten kann.

Mit den obigen Gesetzen können wir zahlreiche Grenzwerte bestimmen, ohne explizit Definition 2.2 nachprüfen zu müssen. Wir geben zwei typische Beispiele.

Beispiel 2.8. a) Sei $a_n = \frac{\mathrm{i}n^2 + 2n}{3n^2 + 5n + 1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Nach Beispiel 2.3 konvergieren Folgen $(n^{-p})_n$ mit $p > 0$ gegen 0. Um dies auszunutzen, kürzen den Bruch mit der höchsten Potenz n^2 des Nenners zu

$$a_n = \frac{\mathrm{i} + 2n^{-1}}{3 + 5n^{-1} + n^{-2}}.$$

Beispiel 2.3 zeigt auch, dass etwa $(2)_n$ den Limes 2 hat. Aus Satz 2.7 schließen wir dann, dass der Zähler für $n \to \infty$ gegen i konvergiert und der Nenner gegen 3. Da $3 \neq 0$ ist, liefert Satz 2.7 den Grenzwert $a_n \to \mathrm{i}/3$ für $n \to \infty$.

b) Mittels der Potenzgesetze in Satz 1.29 berechnen wir ganz ähnlich

$$b_n = \frac{2 + \mathrm{i}\sqrt{n} - n^{3/2}}{2n - 1 + n^{3/2}} = \frac{2n^{-3/2} + \mathrm{i}n^{-1} - 1}{3n^{-1/2} - n^{-3/2} + 1} \longrightarrow -1, \qquad n \to \infty. \qquad \diamond$$

Der nächste Satz sichert die Verträglichkeit des Konvergenzbegriffs mit den komplexen Strukturen inklusive des Betrages. Dabei erhalten wir, dass die Konvergenz in $\mathbb{C}$ äquivalent zu der von Real- und Imaginärteil ist. Die Beweise folgen leicht aus (2.1), Satz 2.7 und den Formeln in Satz 1.31.

SATZ 2.9. *Seien* $(a_n)_n$ *eine Folge,* $a \in \mathbb{C}$ *und* $b, c \in \mathbb{R}$.

a) Sei $a_n \to a$ *für* $n \to \infty$. *Dann konvergieren* $(\overline{a}_n)_n$ *gegen* $\overline{a}$, $(\operatorname{Re} a_n)_n$ *gegen* $\operatorname{Re} a$, $(\operatorname{Im} a_n)_n$ *gegen* $\operatorname{Im} a$ *und* $(|a_n|)_n$ *gegen* $|a|$. *Insbesondere hat eine konvergente reelle Folge einen reellen Grenzwert.*

b) Sein $\operatorname{Re} a_n \to b$ *und* $\operatorname{Im} a_n \to c$ *für* $n \to \infty$. *Dann strebt* $(a_n)_n$ *gegen* $a = b + \mathrm{i}c$.

BEWEIS. Sei $\varepsilon > 0$ (beliebig) gegeben und $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ der Index aus (2.1). Sei $n \geq N_\varepsilon$. Zusammen mit (2.1) liefert dann Satz 1.31 die Abschätzung

$$|\overline{a}_n - \overline{a}| = |\overline{a_n - a}| = |a_n - a| \leq \varepsilon$$

und damit $\overline{a}_n \to \overline{a}$ für $n \to \infty$. Wegen der Formeln $\operatorname{Re} a_n = (a_n + \overline{a_n})/2$ und $\operatorname{Im} a_n = (a_n - \overline{a_n})/(2\mathrm{i})$ aus Satz 1.31 folgen die Konvergenzaussagen für Real- und Imaginärteil dann aus Satz 2.7. Die untere Dreiecksungleichung und (2.1) implizieren die Abschätzung

$$\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a| \leq \varepsilon,$$

sodass $|a_n|$ gegen $|a|$ strebt. Wenn $a_n \in \mathbb{R}$ ist, dann ergibt sich $0 = \operatorname{Im} a_n \to \operatorname{Im} a$ für $n \to \infty$ und somit $a \in \mathbb{R}$. Teil b) ist eine direkte Konsequenz von Satz 2.7. □

Wie schon (2.1) zeigt, lebt die Analysis von Ungleichungen. Geeignete Abschätzungen sind oft unersetzlich, wie wir gleich unten an ersten Beispielen sehen werden. Also ist wesentlich, dass Grenzwerte Ungleichungen respektieren. Dies trifft aber auf *strikte* nicht zu, da z.B. die Folgen $a_n = 0 < 1/n = b_n$ beide den Grenzwert 0 besitzen. Der folgende Satz zeigt aber, dass der Limes 'kleiner gleich' erhält, und er liefert ein wichtiges Hilfsmittel für Konvergenzuntersuchungen. Dabei genügt es hier (und in vielen ähnlichen Situationen), dass die Vorausssetzungen nur ab einem gewissen Index gelten. Da wir mit der Ordnung arbeiten, benötigen wir reelle Folgen. Wir schicken aber voraus, dass man den folgenden Satz im Komplexen auf Beträge oder Real- und Imaginärteile anwenden kann.

SATZ 2.10. *Es seien* $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$, $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ *und* $(c_n)_n$ *reelle Folgen und* $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a_n \to a$ *und* $b_n \to b$ *für* $n \to \infty$.

a) Sei $a_n \leq b_n$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n \geq n_0$. *Dann folgt* $a \leq b$.

b) Seien $a = b$ *und* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n \geq n_1$. *Dann konvergiert* $(c_n)_n$ *gegen* a. *(Sandwichkriterium)*

BEWEIS. Sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen $N_\varepsilon := \max\{N_{\varepsilon,a}, N_{\varepsilon,b}, n_0, n_1\}$ für $N_{\varepsilon,a}$ und $N_{\varepsilon,b}$ aus (2.5). Sei $n \geq N_\varepsilon$. Es gelten also (2.5) und die Annahmen in a) und b) für n.

a) Wir wollen $a - b \leq 0$ mit Satz 1.20 zeigen, was $a \leq b$ liefert. Wie bisher fügen wir $\pm a_n$ und $\pm b_n$ ein, um (2.5) zu verwenden, und erhalten so mit Satz 1.6 b)

$$a - b = a - a_n + a_n - b_n + b_n - b \leq |a - a_n| + |b_n - b| \leq 2\varepsilon.$$

Hier nützen wir wesentlich aus, dass der Zusatzterm $a_n - b_n$ nach Voraussetzung nichtpositiv ist und deswegen in der Ungleichung weggelassen werden kann. Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt $a - b \le 0$.

b) Wie rechnen ziemlich direkt (2.1) für $c_n \to a$ nach. Dazu lösen wir den Betrag auf, nutzen die Voraussetzung in b), Satz 1.6 b) und (2.5) aus und erhalten damit

$$|c_n - a| = \begin{cases} c_n - a \le b_n - a \le |b_n - a|, & c_n \ge a, \\ a - c_n \le a - a_n \le |a - a_n|, & c_n < a, \end{cases} \Bigg\} \le \varepsilon. \qquad \square$$

Beispiel 2.11. a) Sei $a_n = \frac{\sqrt[3]{1+n}}{\sqrt{2+n}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Um diesen Grenzwert zu bestimmen, beachten wir zuerst die Näherungen $1+n \approx n$ und $2+n \approx n$ für große n. Insofern sollte sich a_n wie $n^{1/3}/n^{1/2} = n^{-1/6}$ verhalten und gegen 0 konvergieren. Wir weisen nun $a_n \to 0$ für $n \to \infty$ mit dem Sandwichkriterium nach.

Beweis. Wir suchen eine Nullfolge $(b_n)_n$ mit $0 \le a_n \le b_n$. Dazu bemerken wir, dass aus $c \ge a > 0$ und $b \ge d > 0$ mit Satz 1.4 und einer Übung die Ungleichungen $\frac{a}{b} = \frac{1}{b}a \le \frac{1}{b}c \le \frac{c}{d}$ folgen. Damit wollen wir die Summen in a_n beseitigen, um die Potenzgesetze anwenden zu können. Dabei sollte man aber die Potenzen von n beibehalten, da diese die Konvergenz liefern. Wir schätzen $1+n \le 2n$ und $2+n \ge n$ ab. Satz 1.29 impliziert dann

$$0 \le a_n \le \frac{\sqrt[3]{2n}}{\sqrt{n}} = \sqrt[3]{2}\, n^{-\frac{1}{6}} =: b_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. (Zu grob wäre etwa $2 + n \ge 2$, da $a_n \le 2^{-1/6} n^{1/3}$ zu nichts führt.) Die rechte Seite b_n bildet eine Nullfolge nach Beispiel 2.3 und Satz 2.7, sodass die Behauptung aus Satz 2.10 b) folgt. $\square$

b) Seien $x \in \mathbb{R}_+$ und $a_n = x^{\frac{1}{n}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Da der Exponent gegen 0 strebt, erwarten wir $a_n \to x^0 = 1$ für $n \to \infty$. Dies werden wir zeigen. Dabei müssen wir beim aktuellen Stand der Theorie aber anders argumentieren und wieder Satz 2.10 verwenden, was hier etwas unhandlich ist.

Beweis. 1) Sei zuerst $x \ge 1$. Nach Satz 1.29 ist $a_n \ge 1$. Wir potenzieren, um die Wurzel zu beseitigen, und schätzen dann nach unten ab, um den erwünschten Term $a_n - 1$ zu dominieren. Satz 1.8 liefert

$$x = a_n^n = (1 + (a_n - 1))^n \ge 1 + n(a_n - 1).$$

Daraus ergeben sich die Ungleichungen $0 \le a_n - 1 \le (x-1)/n$. Da die rechte Seite nach Beispiel 2.3 und Satz 2.7 gegen 0 strebt, impliziert Satz 2.10 b) die Behauptung in diesem Fall.

2) Sei $x \in (0,1)$. Dann ist $1/x > 1$ und Schritt 1) zeigt die Konvergenz $a_n^{-1} = (1/x)^{\frac{1}{n}} \to 1$ für $n \to \infty$. Hieraus erhalten wir mit Satz 2.7 die Aussage. $\square$

2.2. Monotone Folgen

Bislang setzen alle Sätze in diesem Kapitel voraus, dass gewisse Folgen konvergieren. In diesem und dem folgenden Abschnitt folgern wir hingegen die Existenz eines Grenzwerts aus einfacher nachzuweisenden Eigenschaften einer Folge. Dazu betrachten wir zunächst eine Klasse reeller Folgen, die die Ordnung respektieren.

DEFINITION 2.12. *Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine reelle Folge.*
a) $(a_n)_n$ wächst (wächst strikt)*, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ $(a_{n+1} > a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.*
b) $(a_n)_n$ fällt (fällt strikt)*, wenn $a_{n+1} \leq a_n$ $(a_{n+1} < a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.*
c) $(a_n)_n$ ist (strikt) monoton*, wenn sie (strikt) wächst oder (strikt) fällt.*
Wir schreiben $a_n \nearrow$ und $a_n \searrow$ für eine wachsende bzw. fallende Folge, sowie $a_n \nearrow a$ und $a_n \searrow a$, wenn diese zusätzlich den Grenzwert a hat.

Mit einer einfachen Induktion zeigt man, dass eine wachsende Folge für alle Indizes $k \leq n$ die Ungleichung $a_k \leq a_n$ erfüllt (und analog für die anderen Begriffe). Die Definition und eine Übung implizieren, dass eine Folge $(a_n)_n$ genau dann (strikt) fällt, wenn $(-a_n)_n$ (strikt) wachsend ist. Ähnlich wachsen $(ca_n)_n$ und $(a_n + b_n)_n$ (strikt), wenn $(a_n)_n$ (strikt) wächst, $(b_n)_n$ wächst und $c > 0$ ist. Wir illustrieren die Begriffe durch einige typische Beispiele.

BEISPIEL 2.13. a) Sei $p \in \mathbb{Q}_+$. Dann ist die Folge $(n^{-p})_{n\geq 1}$ strikt fallend, da $(n+1)^{-p} < n^{-p}$ nach Satz 1.29 gilt. Analog ist $(n^p)_{n\geq 1}$ strikt wachsend.

b) Sei $a_n = n/(2n+1)$ für $n \in \mathbb{N}$. Wenn man hier durch n kürzt, erhält man einen konstanten Zähler und einen strikt fallenden Nenner. Dies zeigt im Grunde schon, dass $(a_n)_n$ strikt wächst. Wir beweisen dies ferner durch einen robusten und recht allgemein verwendbaren Zugang, in dem man direkt die Definition nachprüft. Danach gehen wir eleganter vor und nutzen (wie im ersten Argument) die Struktur von a_n aus, um die Aussage auf eine Variante von a) zurückzuführen.

ERSTER BEWEIS. Sei $n \in \mathbb{N}$. Die behauptete Ungleichung

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1} > \frac{n}{2n+1} = a_n$$

ist vermittels Multplikation bzw. Division mit $(2n+3)(2n+1) > 0$ äquivalent zu

$$(n+1)(2n+1) = 2n^2 + 3n + 1 > n(2n+3) = 2n^2 + 3n.$$

Diese Ungleichung kann durch $\mp(2n^2+3n)$ gleichwertig zur wahren Aussagen $1 > 0$ umgeformt werden, was die Behauptung zeigt.

ZWEITER BEWEIS. Wir zerlegen a_n in eine Differenz einer festen Zahl und einem Bruch, bei dem nur der Nenner von $n \in \mathbb{N}$ abhängt, und erhalten

$$a_n = \frac{1}{2}\,\frac{2n+1-1}{2n+1} = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2n+1}\Big).$$

Ähnlich wie in a) ist $((2n+1)^{-1})_n$ strikt fallend, woraus die Aussage folgt. □

c) Die Folge $((-1)^n)_{n\geq 1}$ ist nicht monoton, da $a_{2n-1} = -1 < 1 = a_{2n}$ und $a_{2n} = 1 > -1 = a_{2n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten. $\Diamond$

Wir betrachten zwei typische divergente Folgen: $((-1)^n)_n$ ist beschränkt und nicht monoton, und $(n)_n$ ist strikt monoton und unbeschränkt. Im *Konvergenzsatz für monotone Folgen* folgern wir nun relativ einfach die Konvergenz einer reellen Folge aus ihrer Monotonie und Beschränktheit. Dabei kann man Monotonie oft direkt aus der Definition der Folge ableiten und Beschränkheit ist eine deutlich einfachere Eigenschaft als Konvergenz.

THEOREM 2.14. *Für eine reelle Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ gelten die folgenden Aussagen.*

a) Sei $(a_n)_n$ wachsend und nach oben beschränkt. Dann existiert $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\geq 1} a_n := \sup\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

b) Sei $(a_n)_n$ fallend und nach unten beschränkt. Dann existiert $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\geq 1} a_n := \inf\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

BEWEIS. a) Aufgrund der Beschränktheitsannahme gibt es die reelle Zahl $a := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ nach Definition 1.17. Sei $\varepsilon > 0$. Satz 1.18 liefert einen Index $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $a - \varepsilon < a_{N_\varepsilon} \leq a$. Da $(a_n)_n$ wächst und a das Supremum ist, erhalten wir

$$a - \varepsilon < a_{N_\varepsilon} \leq a_n \leq a$$

und somit $|a_n - a| = a - a_n \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$. Also ist a) gezeigt.

b) Nach Teil a) für $(-a_n)_n$ und Bemerkung 1.15 existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}(-a_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(-a_n) = -\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n,$$

woraus mit Satz 2.7 auch Behauptung b) folgt. $\square$

Die nächsten beiden Beispiele werden später wieder aufgegriffen werden. In ihnen folgern wir aus dem obigen Theorem recht erstaunliche Resultate, wobei im ersten die bloße Existenz des Grenzwerts zu seiner Berechnung führt. Wie in Bemerkung 2.6 d) erläutert, wenden wir dabei das Theorem auf $(a_n)_{n\geq 2}$ an.

BEISPIEL 2.15 (Heron Verfahren). Für ein gegebenes $x > 0$ definiert man rekursiv $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{x}{a_n})$. Dann folgt $a_n \to \sqrt{x}$ für $n \to \infty$.

BEWEIS. 1) Zunächst zeigen wir induktiv, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (und somit die Folge überhaupt definiert ist). Für $n = 1$ ist dies klar. Wenn $a_n > 0$ gilt, so folgt die Positivität des Nachfolgers a_{n+1} direkt aus seiner Definition.

2) Wir zeigen als nächstes die Konvergenz von $(a_n)_n$ mittels Theorem 2.14. Für $n \in \mathbb{N}$ liefert die Definition die Gleichungen

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{2} + \frac{x}{2a_n} - a_n = \frac{1}{2a_n}\,(x - a_n^2)$$

Nach 1) ist $\frac{1}{2a_n}$ positiv. Wir zeigen nun $a_n^2 \geq x$ für $n \geq 2$, woraus sich die untere Schranke $a_n \geq \sqrt{x}$ und das Fallen von $(a_n)_{n\geq 2}$ ergibt. Wir berechnen dazu

$$a_n^2 - x = \frac{1}{4}\Big[a_{n-1} + \frac{x}{a_{n-1}}\Big]^2 - x = \frac{1}{4}\Big[a_{n-1}^2 + 2x + \frac{x^2}{a_{n-1}^2} - 4x\Big] = \frac{1}{4}\Big[a_{n-1} - \frac{x}{a_{n-1}}\Big]^2 \geq 0.$$

Nach Theorem 2.14 und Satz 2.10 strebt $(a_n)_{n\geq 2}$ gegen eine Zahl $a \geq \sqrt{x} > 0$ für $n \to \infty$. Gemäß Bemerkung 2.6 c) gilt dies auch für $(a_n)_{n\geq 1}$.

3) Wir nutzen die Konvergenz aus 2) nun aus, um den Grenzwert zu berechnen. Wenn wir Bemerkung 2.6 c) und Satz 2.7 auf die Definition von a_n anwenden, erhalten wir

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{x}{a_n}\Big) = \frac{1}{2}\Big(a + \frac{x}{a}\Big).$$

Aus dieser Gleichung folgt $x = a^2$ und damit die Behauptung. $\square$

Beispiel 2.16 (Eulersche Zahl). Wir setzen $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ und $b_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann existieren $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: \mathrm{e}\ (\approx 2,71828)$.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$. 1) Wir zeigen zuerst $a_{n+1}/a_n > 1$ und damit, dass $(a_n)_n$ wächst. (Der Quotient ist hier wegen der Form von a_n bequemer als die Differenz, die in Beispiel 2.15 gut zur Rekursion passte.) Diese untere Abschätzung folgt aus der Definition und Satz 1.8 durch

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)\frac{\big(1+\frac{1}{n+1}\big)^n}{\big(1+\frac{1}{n}\big)^n} = \frac{n+2}{n+1}\,\frac{\big(\frac{n+2}{n+1}\big)^n}{\big(\frac{n+1}{n}\big)^n} = \frac{n+2}{n+1}\Big(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\Big)^n \\
&= \frac{n+2}{n+1}\Big(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\Big)^n \geq \frac{n+2}{n+1}\Big(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\Big) = \frac{n+2}{n+1}\,\frac{(n+1)^2-n}{(n+1)^2} \\
&= \frac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n+1)^3} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{(n+1)^3} = \frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3} > 1,
\end{aligned}$$

wobei am Ende auch der binomische Satz aus Beispiel 0.3 einging.

2) Aufgrund ihrer Definition wächst auch die Folge $(b_n)_n$. Wir beweisen nun die Ungleichungen $a_n \leq b_n \leq 3$. Zunächst bemerken wir, dass $j! \geq 2^{j-1}$ für $j \in \mathbb{N}$ gilt. Damit und mit den Beispielen 0.3 und 0.2 berechnen wir

$$\begin{aligned}
a_n &= \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}\frac{1}{n^j} = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{n!}{(n-j)!\,j!\,n^j} \\
&= 1 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-j+1}{n} \leq 1 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} = b_n \\
&\leq 1 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^{j-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} < 3.
\end{aligned}$$

3) Die ersten beiden Teile kombiniert mit Theorem 2.14 und Satz 2.10 implizieren, dass $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ jeweils Grenzwerte a und b haben und dass $a \leq b$ gilt. Um die verbleibende Ungleichung $a \geq b$ nachzuweisen, gehen wir von der zweiten Zeile in der abgesetzten Rechnung in 2) aus. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $n \geq m$. Dann folgt

$$a_n \geq 1 + \sum_{j=1}^m \frac{1}{j!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(1-\frac{j-1}{n}\Big) =: c_{nm}.$$

Für festes m liefern hier die Sätze 2.7 und 2.10 im Grenzwert $n \to \infty$ die Aussage

$$a \geq \lim_{n\to\infty} c_{nm} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} = b_m.$$

Für $m \to \infty$ ergibt sich nun die gewünschte Relation $a \geq b$. □

2.3. Teilfolgen und Vollständigkeit

Die Folge $((-1)^n)_n = (-1, 1, -1, 1, \dots)$ divergiert zwar, hat aber konvergente 'Anteile'. Der folgenden beiden Definitionen dienen dazu, dies präzise zu fassen.

Definition 2.17. *Es seien $\varphi = (a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge und $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine* strikt wachsende Abbildung *(d.h., $\Phi(j+1) > \Phi(j)$ für jedes $j \in \mathbb{N}$). Wir definieren die* Teilfolge *$\psi = \varphi \circ \Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ von $(a_n)_{n\geq 1}$ und schreiben $(b_j)_{j\geq 1}$ statt ψ. Es gilt also $b_j = a_{\Phi(j)}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Wir verwenden meist die Notation $(a_{n_j})_j$ mit $n_j := \Phi(j)$ anstelle von $(b_j)_{j\geq 1}$ oder $(a_{\Phi(j)})_{j\geq 1}$.*

Eine Teilfolge entsteht also aus einer gegebenen Folge durch Weglassen von Folgengliedern, wobei aber unendlich viele Glieder übrig bleiben müssen. Zur Veranschaulichung geben wir einige typische Beispiele an.

1) Jede Folge ist eine Teilfolge von sich selbst (wähle $\Phi(j) = j$ für $j \in \mathbb{N}$).

2) Für $a_n = (-1)^n$ und $\Phi(j) = 2j = n_j$ für $j \in \mathbb{N}$ erhält man die (konstante) Teilfolge $(b_j)_j = (a_{2j})_j = (1, 1, 1, \dots)$. Analog gilt $(a_{2j+1})_j = (-1, -1, \dots)$, während $(a_{3j+1})_j = (1, -1, 1, \dots)$ die Ursprungsfolge mit einem anderen Vorzeichen reproduziert.

3) Sei $a_n = (-1)^n/n$. Hier haben wir z.B. $(a_{2j})_j = (1/(2j))_j = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots)$.

4) Sei $a_n = \sqrt[3]{n}$ für eine Quadratzahl n und $a_n = 0$ für die anderen $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen $\Phi(j) = j^2 = n_j$, um die Teilfolge der $a_n \neq 0$ zu beschreiben, und erhalten $b_j = a_{\Phi(j)} = a_{j^2} = j^{2/3}$ für $j \in \mathbb{N}$. Das ist eine 'dünnere' Teilfolge im Vergleich zu etwa $(a_{2j})_j = (0, 2^{2/3}, 0, 0, 0, 0, 0, 2^{4/3}, 0, \dots)$.

Wir notieren nun zwei einfache Beobachtungen.

Bemerkung 2.18. a) Sei $(a_{n_j})_j$ eine Teilfolge. Da $n_{j+1} > n_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt, ist die Indexmenge $J = \{n_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ unbeschränkt. Wegen der Bijektivität von $\Phi : \mathbb{N} \to J;\ j \mapsto n_j$, ist J auch unendlich (siehe Bemerkung 1.24 und Satz 1.25).

b) Sei $a_n \to a$ für $n \to \infty$. Dann strebt auch jede Teilfolge $(a_{n_j})_j$ von $(a_n)_n$ gegen a für $j \to \infty$. Um das einzusehen, sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir haben den Index $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ aus (2.1). Gemäß Teil a) existiert eine natürliche Zahl J_ε mit $n_{J_\varepsilon} \geq N_\varepsilon$. Für alle $j \geq J_\varepsilon$ erhalten wir demnach $n_j \geq N_\varepsilon$ und somit $|a_{n_j} - a| \leq \varepsilon$. ◊

De nächste Begriff wird es erlauben, konvergente Teilfolgen zu beschreiben.

Definition 2.19. *Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge. Eine Zahl $a \in \mathbb{C}$ heißt* Häufungspunkt *von $(a_n)_n$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele a_n mit $|a_n - a| \leq \varepsilon$ (oder äquivalent $a_n \in \overline{B}(a, \varepsilon)$) gibt.*

Die durch $a_n = n$ gegebene Folge hat keinen Häufungspunkt, da für jedes $a \in \mathbb{C}$ höchstens ein Folgenglied in $\overline{B}(a, 1/3)$ liegt. Für $(a_n)_n = ((-1)^n)_n$ erhalten wir die Häufungspunkte -1 und 1, da für jedes $\varepsilon > 0$ alle geraden Folgenglieder in $\overline{B}(1, \varepsilon)$ und alle ungeraden in $\overline{B}(-1, \varepsilon)$ liegen. Andere Häufungspunkte schließt man wie bei $(n)_n$ aus. Durch den nächsten Satz werden die beiden obigen Begriffe direkt miteinander verknüpft.

Satz 2.20. *Seien $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge und $a \in \mathbb{C}$. Genau dann ist a ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$, wenn es eine Teilfolge $(a_{n_j})_{j\geq 1}$ mit Grenzwert a gibt.*

Beweis. 1) Es gelte $a_{n_j} \to a$ für $j \to \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es so einen Index $J_\varepsilon \in \mathbb{N}$, dass $|a - a_{n_j}| \leq \varepsilon$ für alle $j \geq J_\varepsilon$ gilt. Wie in Bemerkung 2.18 sieht man, dass $\{n_j \,|\, j \geq J_\varepsilon\}$ und $\{j \,|\, j \geq J_\varepsilon\}$ gleichmächtig und damit unendlich sind. Also ist a ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$.

2) Sei a ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$. Wir definieren rekursiv eine Teilfolge $(a_{n_j})_j$ mit $|a - a_{n_j}| \leq 1/j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dazu verwenden wir die Aussage

$$A(j): \quad \exists\, n_1 < n_2 < \cdots < n_j \ \text{ in } \mathbb{N} \ \text{ mit } \ |a - a_{n_l}| \leq 1/l \ \text{ für alle } l \in \{1, 2, \ldots, j\}$$

Nach Voraussetzung (mit $\varepsilon = 1$) gilt $A(1)$. Es gelte $A(j)$ für ein $j \in \mathbb{N}$. Da a ein Häufungspunkt ist, existieren unendlich viele a_n in $\overline{B}(a, 1/(j+1))$. Somit finden wir einen Index $n_{j+1} > n_j$ mit $|a - a_{n_{j+1}}| \leq 1/(j+1)$. Also ist $A(j+1)$ gezeigt. Per Induktion erhalten wir somit eine Teilfolge $(a_{n_j})_j$ mit $|a - a_{n_j}| \leq 1/j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Nach Satz 2.10 b) ist dann $(|a - a_{n_j}|)_j$ eine Nullfolge und somit konvergiert $(a_{n_j})_j$ gegen a für $j \to \infty$. □

Kombiniert mit Satz 2.9 zeigt das obige Resultat, dass eine reelle Folge nur reelle Häufungspunkte haben kann. Wir beschreiben auch die (schlichte) Rolle von Häufungspunkten im konvergenten Fall.

Korollar 2.21. *Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiere gegen $a \in \mathbb{C}$. Dann ist a ihr einziger Häufungspunkt.*

Beweis. Nach Satz 2.20 ist a ein Häufungspunkt. Sei $b \in \mathbb{C}$ ein weiterer. Dann existiert gemäß Satz 2.20 eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ mit Grenzwert b. Diese konvergiert aber auch gegen a, da $(a_n)_n$ das tut (siehe Bemerkung 2.18). Satz 2.4 impliziert nun die Gleichheit von a und b. □

Das nächste Lemma kann dazu dienen, in Beispielen die Existenz weiterer Häufungspunkte auszuschließen, was wir unten einmal durchspielen.

Lemma 2.22. *Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit den Häufungspunkten $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ und zugehörigen Teilfolgen $a_{\Phi_k(j)} \to \alpha_k$ für $j \to \infty$ und $k \in \{1, \ldots, m\}$. Jedes Folgenglied a_n liege in (mindestens) einer dieser Teilfolgen. Dann hat $(a_n)_n$ keinen weiteren Häufungspunkt.*

Beweis. Wir nehmen an, $(a_n)_n$ besäße einen weiteren Häufungspunkt $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. Gesucht ist so einen Radius $r > 0$, dass höchstens endlich viele

a_n in $\overline{B}(\alpha, r)$ enthalten sind. Dafür nutzen wir aus, dass ab einem Index die Teilfolgenglieder $a_{\Phi_k(j)}$ nahe bei α_k liegen und dass $d := \min\{|\alpha - \alpha_1|, \dots, |\alpha - \alpha_m|\} > 0$ ist. Die Voraussetzung liefert solche Indizes $J_1, \dots, J_m \in \mathbb{N}$, dass die Ungleichung $|\alpha_k - a_{\Phi_k(j)}| \le d/2$ für alle $j \ge J_k$ und $k \in \{1, \dots, m\}$ gilt. Für $j \ge J_k$ folgt daraus

$$|\alpha - a_{\Phi_k(j)}| = |\alpha - \alpha_k + \alpha_k - a_{\Phi_k(j)}| \ge |\alpha - \alpha_k| - |\alpha_k - a_{\Phi_k(j)}| \ge d - d/2 > d/3.$$

Also liegen diese Folgenglieder nicht in $\overline{B}(\alpha, d/3)$. Um zurück zu a_n zu kommen, setzen wir $N = \max\{\Phi_1(J_1), \dots, \Phi_m(J_m)\}$. Sei $n \ge N$. Nach Voraussetzung gibt es Zahlen $k \in \{1, \dots, m\}$ und $j \in \mathbb{N}$ mit $n = \Phi_k(j)$. Da Φ_k wächst, gilt $j \ge J_k$ und somit $|\alpha - a_n| > d/3$. Also liegen in $\overline{B}(a, d/3)$ nur endlich viele Folgenglieder (höchstens $N - 1$), was ein Widerspruch ist. $\square$

Beispiel 2.23. Die durch

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{n}, & n \text{ gerade}, \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} \dfrac{2n^2+3}{3n^2-1}, & n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

gegebene Folge hat genau die Häufungspunkte $-\frac{2}{3}$, 0 und $\frac{2}{3}$.

Beweis. Wir setzen

$$b_j = a_{2j} = \frac{(-1)^j}{2j}, \quad c_j = a_{4j+1} = -\frac{2(4j+1)^2+3}{3(4j+1)^2-1}, \quad d_j = a_{4j+3} = +\frac{2(4j+3)^2+3}{3(4j+3)^2-1}.$$

für $j \in \mathbb{N}$. Es gelten $b_j \to 0$ (da $|b_j| = \frac{1}{2j}$), $c_j \to -2/3$ und $d_j \to 2/3$ für $j \to \infty$ (vgl. Beispiel 2.8). Da jedes a_n in (genau) einer dieser Teilfolgen vorkommt, gibt es nach Lemma 2.22 keine weiteren Häufungspunkte. $\square$

Im folgenden Theorem werden wir sehen, dass jede beschränkte Folge $(a_n)_n$ mindestens einen Häufungspunkt besitzt (so wie im obigen Beispiel). Dabei gehen wir vom reellen Fall aus und suchen monotone Teilfolgen von $(a_n)_n$, da diese nach Theorem 2.14 konvergieren werden. Tatsächlich werden wir dabei den größten und den kleinsten Häufungspunkt erhalten. Dazu kombinieren wir Infima und Suprema für die Mengen $A_n := \{a_j \,|\, j \ge n\}$ der Glieder der Restfolge ab einem Index $n \in \mathbb{N}$.

Es sei $(a_n)_n$ eine beschränkte reelle Folge. Sei $n \in \mathbb{N}$. Da A_n beschränkt ist, liefern Definition 1.17 und Bemerkung 1.15 die Ungleichung

$$b_n := \sup A_n \ge \inf A_n =: c_n.$$

Wegen $A_{n+1} \subseteq A_n \subseteq A_1$, folgen aus Bemerkung 1.15 und der obigen Ungleichung die Abschätzungen

$$\sup_{j \ge 1} a_j = b_1 \ge b_n \ge b_{n+1} \ge c_{n+1} \ge c_n \ge c_1 = \inf_{j \in \mathbb{N}} a_j. \tag{2.6}$$

Also fällt $(b_n)_n$, wächst $(c_n)_n$ und beide sind beschränkt. Gemäß Theorem 2.14 existieren somit der *Limes superior*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{j \ge n} a_j = \inf_{n \ge 1} \sup_{j \ge n} a_j \tag{2.7}$$

und der *Limes inferior*

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{j\geq n} a_j = \sup_{n\geq 1} \inf_{j\geq n} a_j. \tag{2.8}$$

Aus (2.6) und Satz 2.10 erhalten wir dabei die Relation

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} a_n. \tag{2.9}$$

In Hinblick auf unser Ziel muss man aber beachten, dass b_n und c_n im Allgemeinen keine Folgenglieder sind, und damit keine Teilfolge bilden. (Ein Beispiel ist die Folge $(1/n)_n$ mit $A_n = \{1/n, 1/(n+1), \dots\}$ und $c_n = 0$.) Weiter kann z.B. bei einer nach unten beschränkten Folge nicht immer einen Limes inferior in $\mathbb{R}$ definieren, so etwa bei der Folge $(n)_n$ mit $A_n = \{n, n+1, \dots\}$ und $c_n = n$ (vgl. Definition 3.40).

Das folgende Theorem von *Bolzano* und *Weierstraß* ist eines der wichtigsten Resultate dieser Vorlesung. Aus der recht schwachen Voraussetzung der Beschränktheit wird hier die Konvergenz zumindest einer Teilfolge gewonnen. (Die Beispiele $((-1)^n)_n$ und $(n)_n$ zeigen zum einen, dass nicht die ganze Folge konvergieren muss, und zum anderen, dass die Beschränktheit benötigt wird.) Wir werden den Hauptsatz oft in zentralen Beweisteilen benötigen. Fortgeschrittene Varianten des Theorems sind ein wesentliches Instrument auch in der aktuellen angewandten Analysis (aber das ist Stoff des Masterstudiums).

Theorem 2.24. *a) Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ hat eine konvergente Teilfolge und damit nach Satz 2.20 einen Häufungspunkt.*

b) Wenn die Folge $(a_n)_n$ auch reell ist, dann ist $\varlimsup_{n\to\infty} a_n$ der größte und $\varliminf_{n\to\infty} a_n$ der kleinste der Häufungspunkte von $(a_n)_n$.

Beweis. b) Sei $(a_n)_n$ reell und beschränkt. Setze $L = \varlimsup_{n\to\infty} a_n$. Wir konstruieren gleich in zwei Schritten eine Teilfolge $(a_{n_j})_j$ von $(a_n)_n$, die gegen L konvergiert. Zunächst nutzen wir den Limes $b_n \to L$ in (2.7) aus, um Zahlen $b_N \approx L$ zu finden. Da diese nicht notwendig Folgenglieder sind, verwenden wir ihre Definition als Supremum des Folgenrests, um Glieder $a_n \approx b_N \approx L$ zu erhalten. Dies wird nun in einer Induktion präzisiert, die derjenigen im Beweis von Satz 2.20 ähnelt.

Wir definieren rekursiv die gewünschte Teilfolge. Zunächst existiert wegen $b_n \to L$ ein Index $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|L - b_{N_1}| \leq 1/2$. Da $b_{N_1} = \sup\{a_j \,|\, j \geq N_1\}$, liefert Satz 1.18 eine natürliche Zahl $n_1 \geq N_1$ mit $b_{N_1} - 1/2 \leq a_{n_1} \leq b_{N_1}$ und damit $|b_{N_1} - a_{n_1}| = b_{N_1} - a_{n_1} \leq 1/2$. Zusammen folgt die Abschätzung

$$|L - a_{n_1}| = |L - b_{N_1} + b_{N_1} - a_{n_1}| \leq |L - b_{N_1}| + |b_{N_1} - a_{n_1}| \leq 1.$$

Es seien als Induktionsvoraussetzung Zahlen $n_1 < n_2 < \cdots < n_{j-1}$ in $\mathbb{N}$ so gefunden, dass $|L - a_{n_l}| \leq 1/l$ für alle $l \in \{1, 2, \dots, n_{j-1}\}$ gilt. Gemäß $b_n \to L$, gibt es einen Index $N_j > n_{j-1}$ mit $|L - b_{N_j}| \leq \frac{1}{2j}$. Ferner erhalten wir aus Satz 1.18 wie im vorigen Abschnitt eine natürliche Zahl $n_j \geq N_j > n_{j-1}$ mit $|b_{N_j} - a_{n_j}| \leq \frac{1}{2j}$. Daraus ergibt sich die Ungleichung $|L - a_{n_j}| \leq |L - b_{N_j}| + |b_{N_j} - a_{n_j}| \leq 1/j$. Per Induktion (und Satz 2.10) gewinnen wir so eine Teilfolge mit $a_{n_j} \to L$ für $j \to \infty$.

Entsprechend findet man eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$, die gegen $\ell = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ strebt. Nach Satz 2.20 sind also L und ℓ Häufungspunkte von $(a_n)_n$.

Sei schließlich $(a_{n_m})_m$ eine weitere Teilfolge mit Häufungspunkt α. Die Formeln (2.7) und (2.8) implizieren dann $c_{n_m} \to \ell$ und $b_{n_m} \to L$ für $m \to \infty$, wobei

$$c_{n_m} = \inf\left\{a_n \,\middle|\, n \geq n_m\right\} \leq a_{n_m} \leq \sup\left\{a_n \,\middle|\, n \geq n_m\right\} = b_{n_m}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt. Mit Satz 2.10 folgt $\ell \leq \alpha \leq L$, wie in b) behauptet.

a) Sei $(a_n)_n$ beschränkt. Dann ist $(x_n)_n := (\operatorname{Re} a_n)_n$ eine beschränkte reelle Folge und besitzt somit nach b) eine konvergente Teilfolge $x_{n_l} \to x$ für $l \to \infty$. Genauso ist $(y_{n_l})_l := (\operatorname{Im} a_{n_l})_l$ reell und beschränkt, sodass nach b) eine Teilfolge $(y_{n_{l_j}})_j$ mit Grenzwert y existiert. Satz 2.9 zeigt nun $a_{n_{l_j}} = x_{n_{l_j}} + \mathrm{i}y_{n_{l_j}} \to x + \mathrm{i}y$ für $j \to \infty$. □

Das Vorgehen in Teil a) ist typisch für viele Konvergenzuntersuchungen in $\mathbb{C}$. Mittels Real- und Imaginärteil reduziert man sie auf die reelle Situation und setzt die Teilaussagen am Ende einfach zusammen. Man beachte auch, dass man hier nicht einfach eine Teilfolge $(y_{n_m})_m$ von $(y_n)_n$ verwenden kann, da die Indexmengen $\{n_l \,|\, l \in \mathbb{N}\}$ und $\{n_m \,|\, m \in \mathbb{N}\}$ disjunkt sein können. Das deswegen oben benutzte iterative Vorgehen tritt häufig auf.

In Beispiel 2.23 gelten folglich $-\frac{2}{3} = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ und $\frac{2}{3} = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$. Der dritte Häufungspunkt 0 liegt dazwischen. Wenn man den Satz von Bolzano–Weierstraß anwendet, muss man zu Teilfolgen übergehen. Die folgenden Aussagen zeigen, wie man trotzdem Informationen über die gesamte Folge gewinnen kann.

Korollar 2.25. *Sei $(a_n)_n$ eine beschränkte Folge.*

a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

i) $(a_n)_n$ konvergiert.

ii) $(a_n)_n$ hat genau einen Häufungspunkt $a \in \mathbb{C}$.

iii) Es gibt ein $b \in \mathbb{C}$ derart, dass jede Teilfolge von $(a_n)_n$ eine Teilfolge mit Grenzwert b besitzt.

In diesem Fall gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a = b$.

b) Sei $(a_n)_n$ reell. Genau dann konvergiert $(a_n)_n$, wenn ihr Limes superior und Limes inferior übereinstimmen. In diesem Fall gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n.$$

Beweis. Es sei $(a_n)_n$ beschränkt.

a) Es gelte i). Die Aussage ii) und die Gleichung $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ folgen dann aus Korollar 2.21.

Es gelte ii). Sei $(a_{n_l})_l$ eine Teilfolge von $(a_n)_n$. Da auch $(a_{n_l})_l$ beschränkt ist, liefert Theorem 2.24 eine Teilteilfolge $(a_{n_{l_j}})_j$ mit einem Grenzwert $\alpha \in \mathbb{C}$. Nach Satz 2.20 ist α ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$ und somit nach ii) gleich der Zahl a. Also gilt iii) mit $b := a$.

Es gelte iii). Wie nehmen an, $(a_n)_n$ konvergierte nicht gegen b. Nach (2.2) existiert dann so ein $\varepsilon_0 > 0$, dass es für jedes $m \in \mathbb{N}$ einen Index $n_m \geq m$ mit

$|a_{n_m} - b| > \varepsilon_0$ gibt. Diese Indizes wachsen nicht notwendig strikt. Deswegen definieren wir iterativ eine Teilfolge durch $m_1 = 1$ und $m_{l+1} = n_{m_l} + 1$ für $l \in \mathbb{N}$. Es folgt also $n_{m_{l+1}} \geq m_{l+1} > n_{m_l}$. Wir setzen abkürzend $n_l := n_{m_l}$. So erhalten wir eine Teilfolge $(a_{n_l})_l$ mit $|a_{n_l} - b| > \varepsilon_0$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Gemäß iii) gibt es aber eine Teilteilfolge $(a_{n_{l_j}})_j$, die gegen b konvergiert. Dieser Widerspruch impliziert i).

Die gezeigte Implikationskette *i)* $\Rightarrow$ *ii)* $\Rightarrow$ *iii)* $\Rightarrow$ *i)* liefert die Äquivalenzen *i)* $\Leftrightarrow$ *ii)*, *ii)* $\Leftrightarrow$ *iii)* und *i)* $\Leftrightarrow$ *iii)*. Insbesondere gelten alle Aussagen, wenn eine wahr ist. In diesem Fall kann man also alle obigen Beweisschritte verwenden und erhält so den Zusatz in Teil a).

b) Nach a) konvergiert $(a_n)_n$ genau dann, wenn sie genau einen Häufungspunkt hat. Da $(a_n)_n$ reell ist, bedeutet dies nach Theorem 2.24 b), dass Limes superior und inferior (als Maximum und Minimum der Häufungspunkte) übereinstimmen. $\square$

Man kann in dieser Folgerung nicht auf die Beschränktheit der Folge verzichten, wie das divergente Beispiel

$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{ gerade}, \\ 1, & n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

mit dem einzigen Häufungspunkt 1 zeigt.

Im Gegensatz zu (2.1) will man mit dem folgenden Begriff Konvergenz ohne Rückgriff auf einen Grenzwert erfassen. Dies ist nötig, wenn man (wie im nächsten Kapitel) ein noch *unbekanntes* Objekt als Limes einer Folge definieren will.

Definition 2.26. *Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heißt* Cauchyfolge, *wenn es für jeden Abstand $\varepsilon > 0$ so einen Startindex $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, dass $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq N_\varepsilon$ gilt; also wenn*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n, m \geq N_\varepsilon : \quad |a_n - a_m| \leq \varepsilon. \tag{2.10}$$

Bei einer Cauchyfolge sind also für jedes $\varepsilon > 0$ alle Folgenglieder bis auf endlich viele nur höchstens ε voneinander entfernt. Das folgende Theorem ist die Grundlage für die weitere Entwicklung der Analysis.

Theorem 2.27. *Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist. (Man nennt deswegen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$* vollständig.*)*

Beweis. 1) Es konvergiere $(a_n)_n$ gegen a. Für $\varepsilon > 0$ finden wir also so einen Index $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, dass $|a_n - a| \leq \varepsilon/2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Daraus folgt für alle $n, m \geq N_\varepsilon$ die Ungleichung

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| \leq \varepsilon,$$

sodass $(a_n)_n$ eine Cauchyfolge ist.

2) Sei $(a_n)_n$ eine Cauchyfolge. Man erhielte (2.1) aus (2.10), wenn für festes $n \geq N_\varepsilon$, die Folge $(a_m)_m$ für $m \to \infty$ gegen eine Zahl a strebt. Um dies (zumindest

für eine Teilfolge) zu erzielen, zeigen wir zuerst wie in Satz 2.4 die Beschränktheit von $(a_n)_n$ und nutzen dann das Theorem von Bolzano–Weierstraß aus.

Dazu wählen wir $\varepsilon = 1$ in (2.10) und erhalten so einen Index $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_N| \le 1$ für alle $n \ge N$. Damit gilt $|a_n| \le |a_n - a_N| + |a_N| \le 1 + |a_N|$ für diese n. Es folgt $|a_n| \le \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Da somit $(a_n)_n$ beschränkt ist, liefert Theorem 2.24 eine Teilfolge $(a_{n_j})_j$ mit Grenzwert a. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt dann einen Index $J_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_j} - a| \le \varepsilon$ für alle $j \ge J_\varepsilon$. In (2.1) benötigen wir aber Folgenglieder a_n. Dazu verwenden wir den Index N_ε aus (2.10). Sei $n \ge N_\varepsilon$. Um die Ungleichung für $a_{n_j} - a$ auszunutzen, wählen wir ein festes $j \ge J_\varepsilon$ mit $n_j \ge N_\varepsilon$. (So ein n_j gibt es wegen Bemerkung 2.18.) Mittels (2.10) und der Konvergenzaussage für a_{n_j}, schätzen wir nun

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_j} + a_{n_j} - a| \le |a_n - a_{n_j}| + |a_{n_j} - a| \le 2\varepsilon$$

ab. Also konvergiert $(a_n)_n$ gegen a. Nach Satz 2.9 ist a reell, wenn $(a_n)_n$ dies ist. □

Bemerkung 2.28. a) Gemäß Theorem 2.27 haben Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ die gleichen Eigenschaften wie konvergente Folgen.

b) Die Folge $(\sqrt{n})_n$ erfüllt (2.10) mit $m = n+1$, da nach einer Übung $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$ für $n \to \infty$ gilt. Sie ist aber keine Cauchyfolge, weil sie divergiert. Also kann man in (2.10) den Index m nicht durch etwa $n+1$ ersetzen.

c) Die Folge $(a_n)_n$ in Beispiel 2.15 ist eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$, deren Grenzwert $\sqrt{2}$ in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liegt (vgl. Beispiel 1.16). Aus diesem Grunde ist es wenig sinnvoll, in $\mathbb{Q}$ Analysis zu betreiben. Hingegen zeigt das obige Theorem, dass die reellen und komplexen Zahlen für die Analysis geeignet sind. ◊

Wir fügen einige Rechenregeln zum Limes superior und inferior (und für Supremum und Infimum) hinzu. Das erste Lemma zeigt, dass alle Folgenglieder bis auf endlich viele durch lim sup und lim inf mit einem ε-Fehler beschränkt sind.

Lemma 2.29. *Seien $(a_n)_n$ eine beschränkte reelle Folge und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein Index $J_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass*

$$-\varepsilon + \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \le a_j \le \varepsilon + \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$$

für alle $j \ge J_\varepsilon$ gilt.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach (2.7) und Satz 1.18 gibt es einen Index $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\ge1} \sup_{j\ge n} a_j \ge -\varepsilon + \sup_{j\ge N_\varepsilon} a_j \ge -\varepsilon + a_k,$$

also $a_k \le \varepsilon + \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$, für alle $k \ge N_\varepsilon$. Ebenso findet man eine natürliche Zahl M_ε mit $a_k \ge -\varepsilon + \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ für alle $k \ge M_\varepsilon$. Die Behauptung folgt nun mit $J_\varepsilon := \max\{M_\varepsilon, N_\varepsilon\}$. □

Das Beispiel $(-2, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, \dots)$ zeigt, dass man im Allgemeinen die ϵ-Terme im Lemma braucht. Bei der Folge $((-1)^n)_n$ sind sie hingegen unnötig.

Im folgenden Satz erhalten wir Analoga der Rechenregeln für den Limes. Allerdings ändert ein negativer Faktor lim sup zur lim inf und umgekehrt, und bei Summen und Produkten erhält man im Allgemeinen nur Ungleichungen. Die ersten beiden Teile folgen leicht aus den Definitionen und Eigenschaften von sup und inf, für die beiden folgenden verwendet man das obige Lemma und in der letzten Aussage greift man auf Bolzano–Weierstraß zurück.

Satz 2.30. *Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ reelle beschränkte Folgen. Dann erhalten wir die folgenden Aussagen.*

a) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\varlimsup\limits_{n\to\infty}(-a_n)$.

b) Sei $a_n \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \le \varliminf\limits_{n\to\infty} b_n$.

c) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$, $\quad \varliminf\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) \ge \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} b_n$.

d) Sei $a_n, b_n \ge 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(a_nb_n) \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$ *und* $\varliminf\limits_{n\to\infty}(a_nb_n) \ge \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \varliminf\limits_{n\to\infty} b_n$.

e) Es konvergiere $(a_n)_n$ oder $(b_n)_n$. Dann gelten c) und d) mit Gleichheit.

Beweis. a) Aus (2.8), Bemerkung 1.15 und (2.7) folgt

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\ge1}\inf_{j\ge n} a_j = \sup_{n\ge1}\Big(-\sup_{j\ge n}(-a_j)\Big) = -\inf_{n\ge1}\sup_{j\ge n}(-a_j) = -\varlimsup_{n\to\infty}(-a_n).$$

b) Sei $a_n \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sup_{j\ge n} b_j$ eine obere Schranke für $(a_j)_{j\ge n}$ und somit gilt $\sup_{j\ge n} a_j \le \sup_{j\ge n} b_j$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen (2.7) folgt daraus auf die gleiche Weise die erste Behauptung $\varlimsup_{n\to\infty} a_n \le \varlimsup_{n\to\infty} b_n$. Da $-b_n \le -a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, liefern Teil a) und die Ungleichung für den Limes superior, dass

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = -\varlimsup_{n\to\infty}(-a_n) \le -\varlimsup_{n\to\infty}(-b_n) = \varliminf_{n\to\infty} b_n.$$

c) Sei $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 2.29 existieren Indizes $J_\varepsilon^a, J_\varepsilon^b \in \mathbb{N}$ mit

$$a_j \le \varepsilon + \varlimsup_{n\to\infty} a_n \quad \text{für alle} \quad j \ge J_\varepsilon^a, \qquad b_j \le \varepsilon + \varlimsup_{n\to\infty} b_n \quad \text{für alle} \quad j \ge J_\varepsilon^b. \tag{2.11}$$

Sei $J_\varepsilon = \max\{J_\varepsilon^a, J_\varepsilon^b\}$. Die Summe der rechten Seiten in (2.11) ist eine obere Schranke der Summe der linken Seiten für $j \ge J_\varepsilon$. Diese Beobachtung und (2.7) liefern die Ungleichungen

$$\varlimsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \le \sup\nolimits_{j\ge J_\varepsilon}(a_j+b_j) \le 2\varepsilon + \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt die erste Behauptung in c) mittels Satz 1.20. Die zweite zeigt man wie in b) mittels Teil a).

d) Sei $\varepsilon \in (0,1]$. Wir verwenden (2.11) und J_ε aus c). Wie oben ergibt sich

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty} a_nb_n &\le \sup\nolimits_{j\ge J_\varepsilon} a_jb_j \le \Big(\varepsilon + \varlimsup_{n\to\infty} a_n\Big)\Big(\varepsilon + \varlimsup_{n\to\infty} b_n\Big) \\ &\le \varepsilon\Big(1 + \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n\Big) + \varlimsup_{n\to\infty} a_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} b_n.\end{aligned}$$

Hierbei nutzen wir aus, dass die Folgenglieder nichtnegativ sind. Wir erhalten die erste Behauptung, da $\varepsilon \in (0,1]$ beliebig ist. Die zweite zeigt man ähnlich. Dabei wählt man $0 < \varepsilon < \min\{\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n, \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n\}$ für das Analogon von (2.11), wenn dieses Minimum positiv ist. Falls etwa $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 0$ gilt, ist Behauptung klar.

e) Wir betrachten exemplarisch den ersten Teil in c) und nehmen an, dass $(a_n)_n$ den Grenzwert a besitzt. Nach Theorem 2.24 und Satz 2.20 gibt es eine Teilfolge mit $b_{n_j} \to \overline{b} := \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$ für $j \to \infty$. Somit konvergieren $a_{n_j} + b_{n_j}$ gegen $a + \overline{b}$. Da $\overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ nach Theorem 2.24 der größte Häufungspunkt der Folge $(a_n + b_n)_n$ ist, folgt $a + \overline{b} \le \overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ und daraus mit c) die behauptete Gleichheit. $\square$

Das Beispiel $a_n = (-1)^n$ und $b_n = (-1)^{n+1}$ mit $a_n + b_n = 0$ zeigt, dass z.B. in Satz 2.30 c) strikte Ungleichungen gelten können. Man beachte, dass man in den Aussagen a)–d) nicht mit den Teilfolgen argumentieren kann, die gegen z.B. $\overline{\lim}\, a_n$ und $\overline{\lim}\, b_n$ konvergieren, da diese disjunkte Indexmengen haben können.

In einer typischen Anwendung[1] sieht man wie die Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ die Existenz eines Grenzwerts garantiert. Wir vertiefen das Beispiel in Bemerkung 5.22.

Satz 2.31. *Seien $(a_n)_{n\ge 0}$ eine Folge und $q \in [0,1)$ so eine Konstante, dass $|a_{n+1} - a_n| \le q|a_n - a_{n-1}|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann konvergiert $(a_n)_n$.*

Beweis. Für $j \in \mathbb{N}_0$ liefert die Voraussetzung iterativ

$$|a_{j+1} - a_j| \le q|a_j - a_{j-1}| \le q^2|a_{j-1} - a_{j-2}| \le \cdots \le q^j|a_1 - a_0|.$$

Seien $n > m$ in $\mathbb{N}_0$. Mit Hilfe der Substitution $j = l + m$ und Beispiel 3.2 b) erhalten wir dann die Ungleichung

$$|a_n - a_m| = \big|(a_n - a_{n+1}) + a_{n+1} - \cdots - a_{m+1} + (a_{m+1} - a_m)\big| \le \sum_{j=m}^{n-1} |a_{j+1} - a_j|$$

$$\le \sum_{j=m}^{n-1} q^j|a_1 - a_0| = q^m \sum_{l=0}^{n-m-1} q^l|a_1 - a_0| \le \frac{|a_1 - a_0|}{1-q}\, q^m =: b_m.$$

Da $(b_m)_m$ eine Nullfolge ist, finden wir für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| \le b_m \le \varepsilon$ für $n > m \ge N_\varepsilon$. Folglich ist $(a_n)_n$ eine Cauchyfolge und hat gemäß Theorem 2.27 einen Grenzwert. $\square$

Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ mit $|f(x) - f(y)| \le q|x - y|$ für $q \in [0,1)$ und alle $x, y \in [a,b]$ und definiere die Iteration $x_{n+1} = f(x_n) \in [a,b]$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und ein gegebenes $x_0 \in [a,b]$. Dann ist der obige Satz anwendbar, da

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \le q|x_n - x_{x-1}|$$

für $n \in \mathbb{N}$ gilt. (Man nennt solche f *strikt kontraktiv.*) Man kann dies als 'diskretes dynamische System' auffassen, wobei x_n den Zustand zur Zeit n und f die Entwicklung des Systems in einem Zeitschritt beschreiben.

[1] Der folgende Satz wurde in der Vorlesung an einer anderen Stelle besprochen.

Um[2] analoge Rechenregeln für das Supremum und das Infimum zu formulieren (siehe auch Bemerkung 1.15), benötigen wir einige Definitionen. Für nichtleere Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ setzt man

$$A + B = \big\{x \in \mathbb{R} \,\big|\, \exists\, a \in A, \exists\, b \in B \text{ mit } \; x = a + b\big\},$$
$$A \cdot B = \big\{x \in \mathbb{R} \,\big|\, \exists\, a \in A, \exists\, b \in B \text{ mit } \; x = ab\big\}.$$

Speziell schreibt man $a + B$ und $a \cdot B$, wenn $A = \{a\}$.

Satz 2.32. *Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer.*

a) Seien A und B nach oben beschränkt. Dann ist auch $A + B$ nach oben beschränkt und es gilt $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$. *Wenn zusätzlich $A, B \subseteq \mathbb{R}_+$, dann ist $A \cdot B$ nach oben beschränkt und wir erhalten* $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$.

b) Seien A und B nach unten beschränkt. Dann ist $A+B$ nach unten beschränkt und es gilt $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$. *Wenn zusätzlich $A, B \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$, dann ist $A \cdot B$ nach unten beschränkt und wir erhalten* $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$.

Beweis. Für alle $a \in A$ und $b \in B$ gelten $a \leq \sup A$ und $b \leq \sup B$. Also ist $\sup A + \sup B$ eine obere Schranke für $A + B$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 1.18 gibt es solche Elemente a_ε von A und b_ε von B, dass $a_\varepsilon > -\varepsilon + \sup A$ und $b_\varepsilon > -\varepsilon + \sup B$ gelten. Dann liegt $a_\varepsilon + b_\varepsilon$ in $A + B$ und erfüllt $a_\varepsilon + b_\varepsilon \geq -2\varepsilon + \sup A + \sup B$. Satz 1.20 impliziert nun die erste Gleichung in a). Für die zweite beachten wir, dass aus $\sup A = 0$ schon $A = \{0\}$ folgt und dann die Behauptung klar ist. Ebenso schließt man für $\sup B = 0$. Andernfalls wählt man $0 < \varepsilon < \min\{\sup A, \sup B\}$ und argumentiert wie bei "+". Aussage b) zeigt man entsprechend. $\square$

[2] Das folgende Ende des Kapitels wurde nicht in der Vorlesung behandelt.

KAPITEL 3

Reihen

Wir definieren zunächst 'unendliche Summen' $a_0+a_1+a_2+\dots$ mit einem Rückgriff auf die Folgenkonvergenz und diskutieren dann verschiedene Anwendungen.

3.1. Definitionen und Konvergenzkriterien

Man führt unendliche Summen einfach als Grenzwert endlicher 'Teilsummen' ein, insofern dieser existiert.

Definition 3.1. *Es seien* $(a_k)_{k\geq 0}$ *eine Folge und* $n\in\mathbb{N}_0$. *Dann heißt* $s_n=\sum_{k=0}^n a_k$ *die* n*-te* Partialsumme *und die Folge* $(s_n)_{n\geq 0}$ *heißt* Reihe *mit den Gliedern* a_k. *Wir schreiben* $\sum_{k\geq 0} a_k$, $\sum_k a_k$ *oder* $\sum a_k$ *statt* $(s_n)_n$.

Die Reihe konvergiert *(*divergiert*), wenn die Folge* $(s_n)_n$ *konvergiert (divergiert). Wenn Konvergenz vorliegt, bezeichnet man den Grenzwert von* $(s_n)_n$ *als* Grenzwert *der Reihe (oder* Reihenwert*), und man schreibt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k=\lim_{n\to\infty} s_n.$$

Analog behandelt man Reihen, die bei $k_0\in\mathbb{Z}$ statt bei $k_0=0$ beginnen. Man identifiziert auch Reihe und Reihenwert. Wir besprechen zuerst einige wichtige Beispiele, bei denen man zum Teil die Partialsummen explizit ausrechnen kann.

Beispiel 3.2. a) (Exponentialreihe) Seien $a_k=\frac{1}{k!}$ und $k,n\in\mathbb{N}_0$. Es gilt

$$s_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\dots+\frac{1}{n!}\quad\text{und nach Beispiel 2.16 existiert}\quad\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=\mathrm{e}.$$

Hier haben wir $(s_n)_n=(1,2,\frac{5}{2},\frac{5}{2}+\frac{1}{6},\dots)$.

b) (Geometrische Reihe) Seien $z\in\mathbb{C}$ mit $|z|<1$ und $k,n\in\mathbb{N}_0$. Setze $a_k=z^k$. Beispiel 0.2 liefert

$$s_n=\sum_{k=0}^{n} z^k=1+z+z^2+\dots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}.$$

Da $|z|<1$ ist, strebt z^{n+1} gemäß einer Übung für $n\to\infty$ gegen 0. Also existiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k=\frac{1}{1-z}\,.$$

Für $z = \frac{1}{2}$ erhält man

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1.$$

Das hat eine geometrische Bedeutung: Mit den Schnittstellen $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \dots$ halbiert man die Strecke von 0 nach 1 iterativ. Die obige Reihe ist die Summe der Längen der Teilintervalle, die sich zu 1 aufsummieren sollten. Das wurde eben gezeigt.

c) (Teleskopsumme) Es sei $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$ für $k \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ liefert die Indexverschiebung $j = k + 1$ die Formel

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Somit konvergiert die Reihe und hat den Grenzwert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

d) (Harmonische Reihe) Die Reihe $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ divergiert, da $s_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2}$ für $m \in \mathbb{N}_0$ gilt, sodass die Partialsummen unbeschränkt sind und nach Satz 2.4 divergieren.

Beweis. Zunächst motivieren wir die Behauptung durch das Beispiel

$$s_{2^3} = 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) \geq 1 + \tfrac{1}{2} + 2\,\tfrac{1}{4} + 4\,\tfrac{1}{8} = 1 + \tfrac{3}{2}.$$

Wir zeigen die behauptete untere Abschätzung per Induktion. Für $m = 0$ ist die Behauptung klar. Sie gelte für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Dann folgt

$$s_{2^{m+1}} = \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{m}{2} + \frac{2^m}{2^{m+1}} = 1 + \frac{m+1}{2}. \qquad \square$$

e) Die Reihe $\sum_{k\geq 0}(-1)^k$ divergiert, denn ihre Partialsummen sind

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 - 1 = 0, & n \text{ ungerade}, \\ 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 = 1, & n \text{ gerade}. \end{cases} \qquad \Diamond$$

Ausgehend von Definition 3.1 liefern die Sätze des letzten Kapitels ziemlich direkt eine Rechenregel ('Linearität') und erste Konvergenzkriterien für Reihen. Produkte von Reihen untersuchen wir im nächsten Abschnitt.

Satz 3.3. *Es seien $\sum_{k\geq 0} a_k$ und $\sum_{k\geq 0} b_k$ konvergente Reihen und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann existiert der Grenzwert*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Die Partialsummen erfüllen die Gleichung

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=0}^{n} a_k + \beta \sum_{k=0}^{n} b_k$$

Nach Voraussetzung und Satz 2.7 strebt die rechte Seite zur rechten Seite der Behauptung. Also hat $(s_n)_n$ den gleichen Grenzwert. $\square$

Im einfachsten Fall sind die Reihenglieder nichtnegativ. Hier benötigt man nur eine obere Schranke von $(s_n)_n$ für die Konvergenz der Reihe.

Satz 3.4. *Für nichtnegative a_k mit $k \in \mathbb{N}_0$ seien die Partialsummen s_n für $n \in \mathbb{N}_0$ nach oben beschränkt. Dann existiert der Grenzwert*

$$\sum\nolimits_{k=0}^{\infty} a_k = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} s_n.$$

Beweis. Aufgrund der Voraussetzungen wachsen die Partialsummen

$$s_n = \sum\nolimits_{k=0}^{n} a_k \le a_{n+1} + \sum\nolimits_{k=0}^{n} a_k = s_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

und sie sind beschränkt. Theorem 2.14 impliziert nun die Behauptung. $\square$

Für Reihen ohne eine Vorzeichenbedingung wie oben benötigen wir das folgende *Cauchy-Kriterium*. Die meisten unserer Konvergenzkriterien beruhen auf einer Kombination der Sätze 3.4 und 3.5.

Satz 3.5. *Eine Reihe $\sum_{k \ge 0} a_k$ konvergiert genau dann, wenn*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > m \ge N_\varepsilon : \quad \Big| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \Big| \le \varepsilon. \tag{3.1}$$

Beweis. Nach Theorem 2.27 und Definition 3.1 konvergiert die Reihe genau dann, wenn $(s_n)_n$ eine Cauchyfolge ist. Diese Eigenschaft bedeutet wegen

$$s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^{n} a_k \qquad \text{für} \quad n > m \ge 0$$

das Gleiche wie die Formel (3.1). $\square$

Wenn man in (3.1) den Index $n = m+1$ wählt, erhält man die folgende notwendige Bedingung für Reihenkonvergenz.

Korollar 3.6. *Wenn eine Reihe $\sum_{k \ge 0} a_k$ konvergiert, dann bilden ihre Glieder $(a_k)_{k \ge 0}$ eine Nullfolge.*

Man beachte, dass es sehr wohl divergente Reihen gibt, deren Summanden eine Nullfolge bilden, wie z.B. die harmonische Reihe in Beispiel 3.2 d). Die obige Folgerung aus der Reihenkonvergenz erlaubt es uns, per Negation die geometrische Reihe auch in dem Fall zu behandeln, der in Beispiel 3.2 nicht betrachtet wurde.

Beispiel 3.7. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 1$. Gemäß Korollar 3.6 konvergiert die Reihe $\sum_{k\geq 0} z^k$ nicht, da hier $|z^k| = |z|^k \geq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt. $\Diamond$

Unten werden wir sehen, dass eine 'rasche' Konvergenz der Glieder a_k gegen 0 die Konvergenz der Reihe $\sum_k a_k$ impliziert. Im folgenden *Leibniz-Kriterium* untersuchen wir zunächst eine Klasse von Reihen, in denen $(a_k)_k$ beliebig langsam fallen kann, aber ein Vorzeichenwechsel zu Auslöschungseffekten führt und so die Konvergenz erzwingt. Der Satz ist sehr leicht anzuwenden.

Satz 3.8. *Es seien $b_k \geq b_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $b_k \to 0$ für $k \to \infty$. Dann konvergiert die* (alternierende) *Reihe $\sum_{k\geq 0}(-1)^k b_k$.*

Beweis. Wie bemerken zunächst, dass die fallende Nullfolge $(b_k)_k$ hat nur nichtnegative Glieder hat, da der Grenzwert 0 nach Theorem 2.14 ihr Infimum ist.

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und setze $s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k b_k$. Wir suchen nach Monotonie in $(s_n)_n$, um die Konvergenz der Reihe aus Theorem 2.14 zu folgern. Die Folge selbst ist nicht monoton, da das Vorzeichen der Differenz $s_{n+1} - s_n = (-1)^{n+1} b_{n+1}$ wechselt. Dieses Verhalten legt es nahe, die Teilfolgen $(s_{2n})_n$ und $(s_{2n+1})_n$ zu studieren.

Da $(b_k)_k$ fällt, gilt die Ungleichung

$$s_{2n+2} - s_{2n} = (-1)^{2n+2} b_{2n+2} + (-1)^{2n+1} b_{2n+1} = b_{2n+2} - b_{2n+1} \leq 0;$$

und damit ist auch $(s_{2n})_n$ fallend. Genauso folgt

$$s_{2n+3} - s_{2n+1} = (-1)^{2n+3} b_{2n+3} + (-1)^{2n+2} b_{2n+2} = -b_{2n+3} + b_{2n+2} \geq 0,$$

sodass $(s_{2n+1})_n$ wächst. Weil $b_{2n+1} \geq 0$ ist, erhalten wir ferner die Schranken

$$s_1 \leq s_{2n+1} = (-1)^{2n+1} b_{2n+1} + s_{2n} \leq s_{2n} \leq s_0.$$

Somit konvergiert nach Theorem 2.14 die Teilfolge $(s_{2n})_n$ gegen eine reelle Zahl s und $(s_{2n+1})_n$ gegen ein $t \in \mathbb{R}$.

Wegen Lemma 2.22 hat $(s_n)_n$ neben s und t keinen weiteren Häufungspunkt. Im Hinblick auf Korollar 2.25 bleibt $s = t$ zu zeigen. Da $(b_k)_k$ eine Nullfolge ist, liefert Satz 2.7 die gewünschte Identität

$$t - s = \lim_{n\to\infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n+1} b_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (-b_{2n+1}) = 0. \qquad \square$$

Man beachte, dass im Leibniz-Kriterium $(b_k)_k$ wegen Korollar 3.6 eine Nullfolge sein muss. Außerdem benötigt man die Monotonie, wie die Folge $(b_k)_{k\geq 1} = (1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0 \dots)$ zeigt. Hier sind die Partialsummen s_{2n-1} in Satz 3.8 gleich $-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ und divergieren somit gemäß Beispiel 3.2 d). Das nächste Beispiel zeigt, dass man auch auf den Vorzeichenwechel nicht einfach verzichten kann.

Beispiel 3.9. Aus dem Leibniz-Kriterium Satz 3.8 folgt direkt die Konvergenz der Reihe $\sum_{k\geq 1}(-1)^k \frac{1}{k}$. Hingegen divergiert $\sum_{j\geq 1} \frac{1}{j}$ nach Beispiel 3.2 d). $\Diamond$

Wir sehen im nächsten Abschnitt, dass alternierende Reihen oft nicht robust unter Manipulationen sind. Die folgende Definition beschreibt eine Klasse konvergenter Reihen mit gegenteiligen Eigenschaften. Hier spielen eventuelle Vorzeichenwechsel oder Auslöschungen keine Rolle.

Definition 3.10. *Eine Reihe* $\sum_{k\geq 0} a_k$ konvergiert absolut, *wenn die Reihe* $\sum_{k\geq 0} |a_k|$ *der Beträge ihrer Glieder konvergiert.*

Wir sammeln grundlegende Eigenschaften absolut konvergenter Reihen.

Bemerkung 3.11. a) Im Falle nichtnegativer Glieder a_k konvergiert die Reihe $\sum_{k\geq 0} a_k$ genau dann absolut, wenn sie konvergiert.

b) Nach den Sätzen 2.4 und 3.4 konvergiert eine Reihe $\sum_{k\geq 0} a_k$ genau dann absolut, wenn die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right)_n$ beschränkt ist. Dieses einfache Kriterium wird im Folgenden wesentlich verwendet.

c) Beispiel 3.9 beschreibt eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe.

d) Die absolute Konvergenz einer Reihe $\sum_{k\geq 0} a_k$ impliziert ihre Konvergenz. Es gilt dann die 'unendliche Dreiecksungleichung'

$$\Big|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|.$$

Beweis. Die Reihe konvergiere absolut. Sei $\varepsilon > 0$. Der Beweis beruht wesentlich auf dem Cauchy-Kriterium Satz 3.5. Es liefert so einen Index $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, dass

$$\varepsilon \geq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \geq \Big|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\Big|$$

für alle $n > m \geq N_\varepsilon$ gilt, wobei wir auch die Dreiecksungleichung verwendet haben. Satz 3.5 zeigt nun die Konvergenz von $\sum_k a_k$. Weiter folgern wir aus Satz 2.9, der Dreiecksungleichung und Satz 2.10 die gewünschte Abschätzung

$$\Big|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big| = \lim_{n\to\infty} \Big|\sum_{k=0}^{n} a_k\Big| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|. \qquad \square$$

Das folgende *Majorantenkriterium* bildet die Grundlage für die beiden darauf folgenden Konvergenzkriterien. Majoranten spielen oft eine wichtige Rolle in Grenzwertbetrachtungen, vergleiche Satz 2.10 b). In Teil a) erhalten wir im Falle $0 \leq a_k \leq b_k$ die Monotonie $0 \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergenter Reihen.

Satz 3.12. *Gegeben seien Zahlen a_k und b_k für $k \in \mathbb{N}_0$.*

a) Sei $0 \leq |a_k| \leq b_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und die Reihe $\sum_{k\geq 0} b_k$ konvergiere. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k\geq 0} a_k$ absolut und genügt den Ungleichungen

$$\Big|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

b) Sei $a_k \geq b_k \geq 0$ und die Reihe $\sum_{k\geq 0} b_k$ divergiere. Dann divergiert auch $\sum_{k\geq 0} a_k$.

Beweis. a) Nach Voraussetzung gilt $\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{n} b_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Aus Satz 3.4 folgt dann die absolute Konvergenz von $\sum_k a_k$ und die zweite in a) behauptete Ungleichung. Bemerkung 3.11 d) liefert die andere Abschätzung.

b) Teil a) und die Voraussetzung zeigen, dass aus der Konvergenz von $\sum_k a_k$ die von $\sum_k b_k$ folgt. Somit ergibt sich b) per Negation. □

Im folgenden typischen Beispiel sehen wir, wie bei nichtnegativen Gliedern deren Konvergenzgeschwindigkeit über die Konvergenz der Reihe entscheidet.

Beispiel 3.13. Die Reihe $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^p}$ konvergiert für $p \geq 2$ und divergiert für $p \leq 1$, wobei $p \in \mathbb{Q}$.[1]

Beweis. Da $n \leq n^2$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt, erhalten wir $n(n+1) \leq 2n^2$. Beispiel 3.2 c) und Satz 3.12 implizieren also die Konvergenz von $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n^2}$, und nach Satz 3.3 konvergiert auch $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$. Für $p > 2$ haben wir $n^{-p} = n^{2-p} n^{-2} \leq n^{-2}$ für $n \in \mathbb{N}$ nach Satz 1.29, sodass Satz 3.12 a) die Aussage für diese p liefert.

Beispiel 3.2 d) zeigt die Divergenz für $p = 1$. Wegen $n^{-1} = n^{p-1} n^{-p} \leq n^{-p}$ für $p < 1$, folgt der Rest der Behauptung aus Satz 3.12 b). □

Um Satz 3.12 anzuwenden, braucht man eine 'summierbare' Majorante $b_n \geq |a_n|$. Bislang kennen wir nur wenige Kandidatinnen dafür. Als besonders effektiv erweist sich hier die geometrische Reihe mit $b_n = cq^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und gewisse $q \in [0,1)$ und $c \geq 0$. Wir motivieren zunächst die beiden folgenden wichtigen Sätze.

Wir benötigen die Ungleichung $|a_n| \leq cq^n$. Am einfachsten ist es, die n-te Wurzel zu ziehen und $c = 1$ zu wählen. Das führt auf die Forderung $|a_n|^{1/n} \leq q < 1$, zumindest für große n. Dies ist die Grundlage für das Wurzelkriterium in Satz 3.16.

Oft ist aber eine andere Bedingung bequemer zu überprüfen. Dazu schauen wir uns $|a_n| \leq cq^n$ für kleine n an. Wenn wir $c = |a_0|$ setzen, gilt die Ungleichung im Fall $n = 0$. Für $n = 1$ müssen wir dann $|a_1| \leq q|a_0|$ verlangen. Die zentrale Beobachtung ist nun, dass dann aus der weiteren Annahme $|a_2| \leq q|a_1|$ schon

$$|a_2| \leq q|a_1| \leq q^2|a_0|$$

folgt. Das läßt sich iterieren. Wenn man wieder beachtet, dass man sich auf große n beschränken kann, erhält man das folgende *Quotientenkriterium* für absolute Konvergenz. In Bemerkung 3.41 werden wir die Beschränkheitsannahmen in beiden Kriterien entfernen. Wir illustrieren ihre Anwendbarkeit mit typischen Beispielen.

Satz 3.14. *Seien $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge und $n_0 \in \mathbb{N}_0$ derart, dass $a_n \neq 0$ für $n \geq n_0$ gilt und dass die Folge $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\geq n_0}$ beschränkt ist.*

a) Sei $\overline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$. Dann konvergiert $\sum_{n\geq 0} a_n$ absolut.

b) Sei $\underline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$. Dann divergiert $\sum_{n\geq 0} a_n$.

[1] Mit Aussagen aus (4.13) erhält man die Behauptung auch für reelle p. Die Konvergenz für $p \in (1,2)$ wird mittels Integrationstheorie zu Beginn von Analysis 2 gezeigt.

Beweis. a) Wähle q zwischen $\overline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ und 1. Nach Lemma 2.29 gibt es so eine natürliche Zahl $N \geq n_0$, dass die Ungleichung $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ für alle $n \geq N$ gilt. Daraus folgt induktiv

$$|a_{n+1}| \leq q|a_n| \leq q^2|a_{n-1}| \leq \cdots \leq q^{n-N+1}|a_N|.$$

Da $\sum_{n\geq 0} q^n$ nach Beispiel 3.2 b) konvergiert, liefert Satz 3.12 die erste Behauptung.

b) Wieder mit Lemma 2.29 erhalten wir eine natürliche Zahl $M \geq n_0$ mit $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für alle $n \geq M$. Wie in a) folgt dann $|a_{n+1}| \geq |a_n| \geq \cdots \geq |a_M| > 0$, sodass Satz 3.4 die Divergenz der Reihe impliziert. □

Beispiel 3.15. a) Seien $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_n = \frac{z^n}{n!}$. Dann konvergiert $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ absolut. (Hier bietet sich wegen der Produktstruktur das Quotientenkriterium an.)

Beweis. Für $z = 0$ ist die Behauptung klar. Sonst gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|z^{n+1}|\, n!}{(n+1)!\,|z^n|} = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)\,|z|^n} = \frac{|z|}{n+1} \longrightarrow 0$$

für $n \to \infty$, woraus nach Satz 3.14 die Behauptung folgt. □

b) Seien $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = (-1)^n\frac{1}{n}$ und $c_n = \frac{1}{n^2}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{n}{n+1} \to 1$ und $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$ für $n \to \infty$. Hier divergiert $\sum_n a_n$, konvergiert $\sum_n b_n$ und konvergiert $\sum_n c_n$ absolut laut den Beispielen 3.9 und 3.13. Also erlaubt das Quotientenkriterium für $\overline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ oder $\underline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1$ keine allgemeine Aussage. ◊

In der Übung wird gezeigt, dass die Anwendbarkeit das Quotientenkriteriums die des folgenden *Wurzelkriteriums* impliziert. Im Beispiel 3.17 besprechen wir ferner eine Reihe, die nur mit dem Wurzelkriterium behandelt werden kann. Dieses ist auch insofern schärfer, dass in beiden Teilen der Limes superior eingeht. Vor allem ist es ein wichtiges Instrument für die in Abschnitt 3.3 entwickelte Theorie.

Satz 3.16. *Es sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge und $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\geq 0} =: (b_n)_n$ sei beschränkt.*

a) Sei $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$. Dann konvergiert $\sum_{n\geq 0} a_n$ absolut.

b) Sei $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$. Dann divergiert $\sum_{n\geq 0} a_n$.

Beweis. a) Wähle q zwischen $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ und 1. Lemma 2.29 liefert so einen Index $N \in \mathbb{N}$, dass $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq q$, und damit $|a_n| \leq q^n$, für alle $n \geq N$ gilt. Das Majorantenkriterium Satz 3.12 und Beispiel 3.2 b) implizieren a).

b) Nach Voraussetzung und Theorem 2.24 gibt es eine Teilfolge mit $|a_{n_j}|^{\frac{1}{n_j}} \geq 1$, also $|a_{n_j}| \geq 1$, für alle $j \in \mathbb{N}$. Korollar 3.6 zeigt nun b). □

Beispiel 3.17. a) Sei $z \in \mathbb{C}$ gegeben. Die Reihe $\sum_{k\geq 0} 2^n z^n$ konvergiert absolut für $|z| < \frac{1}{2}$ und divergiert für $|z| > \frac{1}{2}$. (Wegen der n-ten Potenzen ist das Wurzelkriterium hier besonders bequem.)

Beweis. Dies folgt aus Satz 3.16 und den Ungleichungen

$$|2^n z^n|^{\frac{1}{n}} = 2\,|z| \begin{cases} < 1, & |z| < \frac{1}{2}, \\ > 1, & |z| > \frac{1}{2}. \end{cases} \qquad \square$$

b) Die Reihen aus Beispiel 3.15 b) zeigen auch für Satz 3.16, dass im Falle von $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ im Allgemeinen keine Konvergenzaussage möglich ist. (Man verwendet dazu den Grenzwert $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$ aus einer Übung.)

c) Wir betrachten

$$a_n = \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n+(-1)^n} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n, & n \text{ gerade}, \\ 2\,(\frac{1}{2})^n, & n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2}\,(2^{(-1)^{n+1}})^{1/n}$. Nach Beispiel 2.11 streben $2^{1/(2j+1)}$ und $2^{-1/(2j)}$ für $j \to \infty$ gegen 1. Also gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \to \frac{1}{2}$, und die Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ konvergiert absolut nach Satz 3.16 a). Andererseits erhalten wir

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2\,(\frac{1}{2})^{n+1}}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n} = 2 \quad \text{für gerade } n, \qquad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{2}\,(\frac{1}{2})^{n+1}}{2(\frac{1}{2})^n} = \frac{1}{8} \quad \text{für ungerade } n.$$

Somit erlaubt das Quotientenkriterium hier keine Aussage.

d) Sei $a_n = \big(\frac{1}{2} + (-1)^n\big)^{2n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Hier gilt

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} = \left|\frac{1}{2} + (-1)^n\right|^2 = \begin{cases} (\frac{3}{2})^2, & n \text{ gerade}, \\ (\frac{1}{2})^2, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Also ist $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{9}{4} > 1$, und die Reihe divergiert gemäß Satz 3.16 b). $\Diamond$

3.2. Einige Vertiefungen

Wir diskutieren zunächst die *Dezimaldarstellung* der reellen Zahlen.

Beispiel 3.18. Sei $r \in \mathbb{R}$. Nach Satz 1.19 existiert die größte ganze Zahl kleiner gleich r, die wir mit der *Gaußklammer* $[r] := \max\{k \in \mathbb{Z} \,|\, k \leq r\}$ bezeichnen.

Wir setzen $m := [r]$ und $x := r - m \in [0,1)$. Da $[0,1)$ gleich der disjunkten Vereinigung $[0,\frac{1}{10}) \cup \cdots \cup [\frac{9}{10},\frac{10}{10})$ ist, gibt es genau eine Zahl $x_1 \in \{0,1,\ldots,9\}$ mit $x_1 10^{-1} \leq x < (x_1+1)10^{-1}$. Somit liegt $x - x_1 10^{-1}$ in $[0,1/10)$. Induktiv findet man nun *Ziffern* $x_n \in \{0,1,\ldots,9\}$, die

$$0 \leq x - \sum_{k=1}^{n} x_k 10^{-k} < 10^{-n}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ erfüllen. Nach Satz 2.10 und Beispiel 3.2 b) konvergiert demnach die Reihe $\sum_{k\geq 1} x_k 10^{-k}$ gegen x. Also gilt

$$r = m + x = m + \sum_{k=1}^{\infty} x_k 10^{-k}.$$

Man schreibt stattdessen $r = m, x_1 x_2 x_3 \cdots$.

Umgekehrt seien $m \in \mathbb{Z}$ und $x_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ für $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Da $0 \leq x_k 10^{-k} \leq 9 \cdot 10^{-k}$ ist, liefern Satz 3.12 und Beispiel 3.2 b) wieder die Konvergenz der Dezimaldarstellung $r = m, x_1 x_2 x_3 \cdots$. Man beachte, dass die rationale Folge $(m, x_1 x_2 x_3 \cdots x_n)_n$ gegen r strebt.

Leider ist diese Darstellung nicht immer eindeutig bestimmt. Es gebe dazu so ein $l \in \mathbb{N}$, dass $x_{l-1} < 9$ (soweit $l \geq 2$) und $x_n = 9$ für jedes $n \geq l$ erfüllt sind; d.h., $r = m, x_1 \cdots x_{l-1} 99 \cdots$. Die Beispiele 0.2 und 3.2 liefern dann

$$\begin{aligned}\sum_{k=l}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} &= 9 \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k} - 9 \sum_{k=0}^{l-1} 10^{-k} = 9 \Big(\frac{1}{1 - 10^{-1}} - \frac{1 - 10^{-l}}{1 - 10^{-1}} \Big) = 9\, \frac{10^{-l}}{9/10} \\ &= 10^{-(l-1)}.\end{aligned}$$

Somit gilt auch $r = m, x_1 \cdots x_{l-2}(x_{l-1} + 1)00 \cdots$ für $l \geq 2$ und $r = m + 1, 00 \cdots$ für $l = 1$. In diesem Fall verwendet man die Darstellung mit den Nullen am Ende und läßt diese dann weg. (Die obige Rekursion liefert im übrigen diese Version.)

Wenn nun auch $r = n, y_1 \dots$ wäre, betrachten wir den ersten Index k, bei dem die beiden Darstellungen abweichen. Dann differieren $m, x_1 \dots x_k$ und $n, y_1 \cdots y_k$ um mindestens 10^{-k}. Die Differenz der Reststücke ab x_{k+1} bzw. y_{k+1} ist aber echt kleiner als $9 \sum_{j=k+1}^{\infty} 10^{-j} = 10^{-k}$ nach der obigen Rechnung. Mit der obigen Vereinbarung hat also jede reelle Zahl r genau eine Dezimaldarstellung. Man kann die 'Basis' 10 leicht durch ein $b \geq 2$ in $\mathbb{N}$ ersetzen, siehe Theorem II.7.11 in [1]. $\Diamond$

Ein zweiter Ausflug ins Unendliche. Wir ergänzen die Definition 1.23 der unendlichen Mengen. Dort haben wir Mengen M und N als gleichmächtig bezeichnet, wenn es eine bijektive Abbildung $f : M \to N$ gibt; und M als unendlich, wenn sie für kein $n \in \mathbb{N}$ zu $\{1, \dots, n\}$ gleichmächtig ist. Die folgenden Begriffe und Beispiele gehen wieder auf Cantor zurück, der noch weitaus feinere Unterscheidungen des Unendlichen eingeführt hat.

Definition 3.19. *Eine Menge heißt* abzählbar unendlich*, wenn sie gleichmächtig zu* $\mathbb{N}$ *ist, und* überabzählbar*, wenn sie unendlich aber nicht abzählbar ist.*

Diese Eigenschaften übertragen sich auf gleichmächtige Mengen.

Beispiel 3.20. a) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar unendlich.

Beweis. Wir definieren $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ durch $f(n) = (n-1)/2$ für ungerade $n \in \mathbb{N}$ und $f(n) = -n/2$ für gerade $n \in \mathbb{N}$. Die Injektivität dieser Abbildung folgt leicht aus ihrer Definition. Sei $m \in \mathbb{Z}$. Für $m \geq 0$ gilt $m = f(2m+1)$. Wenn $m < 0$ ist, dann erhalten wir $m = f(-2m)$. Somit ist f auch surjektiv.

Also kann man $\mathbb{Z}$ als Folge $(f(1), f(2), \dots) = (0, -1, 1, -2, \dots)$ schreiben. $\square$

b) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich.

Beweisskizze. Um eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ zu konstruieren, schreibt man

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & -\frac{3}{1} & -\frac{2}{1} & -\frac{1}{1} & \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \cdots \\
\cdots & -\frac{3}{2} & -\cancel{\frac{2}{2}} & -\frac{1}{2} & \cancel{\frac{0}{2}} & \frac{1}{2} & \cancel{\frac{2}{2}} & \frac{3}{2} & \cdots \\
\cdots & -\cancel{\frac{3}{3}} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \cancel{\frac{0}{3}} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \cancel{\frac{3}{3}} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

wobei man ungekürzte Brüche streicht. Nun setzt man $f(1) = 0/1$, $f(2) = 1/1$, $f(3) = 1/2$, $f(4) = -1/2$, $f(5) = -1/1$, $f(6) = -2/1$, $f(7) = -2/3$, $f(8) = -1/3$ usw., sowie $q_n = f(n)$ für $n \in \mathbb{N}$. So können wir die Brüche als Folge

$$\mathbb{Q} = (0, 1, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -1, -2, -\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, \cdots) = (q_n)_{n\geq 1} \qquad \text{auffassen.}$$

Wir ergänzen, dass gemäß Beispiel 3.18 die Menge der Häufungspunkte von $\mathbb{Q} = (q_n)_n$ gleich $\mathbb{R}$ ist. $\square$

c) Die Mengen $(0, 1)$ und $\mathbb{R}$ sind überabzählbar.

Beweis. Nach Bemerkung 1.24 sind beide Mengen unendlich, da sie etwa $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ enthalten. Wir nehmen an, $(0, 1)$ wäre abzählbar unendlich. Dann gäbe es eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to (0, 1)$. Wir schreiben $x_n = \varphi(n) \in (0, 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\xi_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ die n-te Ziffer von x_n gemäß Beispiel 3.18. Wir setzen

$$\eta_n = \begin{cases} 5, & \xi_n < 5, \\ 4, & \xi_n \geq 5, \end{cases}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Nach Beispiel 3.18 definiert $y = 0, \eta_1\eta_2 \cdots$ eine Zahl in $(0, 1)$. Da $\eta_n \neq \xi_n$, ist y ungleich jedem x_n. Dies widerspricht der Surjektivität von φ. Also ist $(0, 1)$ überabzählbar.

Mit Methoden aus Abschnitt 5.2 sieht man ferner, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to (0, 1); \quad f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{1 + 2|x|},$$

bijektiv ist. Daraus folgt dann die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$. $\square$

Umordnung von Reihen und Cauchyprodukte. Wir diskutieren zwei weitere Operationen mit Reihen. Wir zeigen zunächst, dass es im Allgemeinen kein ‘unendliches Kommutativgesetz’ für Reihen gibt.

Beispiel 3.21. Man kann die Glieder $a_j = (-1)^{j+1}\frac{1}{j}$ der nach Beispiel 3.9 konvergenten Reihe $\sum_{j\geq 1}(-1)^{j+1}\frac{1}{j}$ so ‘umordnen’, dass man eine divergente Reihe $\sum_{k\geq 1} b_k$ enthält, die aus den gleichen Summanden besteht. (Dieses erstaunliche Resultat zeigt, dass man sich in der Mathematik beim ‘Unendlichen’ nicht auf die Anschauung verlassen kann und exakte Begriffe und Argumente benötigt.)

Beweis. Wir definieren rekursiv die neue Reihe $\sum_k b_k$. Zuerst führen wir die Indizes $k_1 = 2$ und $k_{m+1} = k_m + 2^{m-1} + 1$ für $m \in \mathbb{N}$ ein. Wir definieren nun die neuen (negativen) Reihenglieder mit geraden Nennern durch

$$b_{k_m} = -\frac{1}{2m} = a_{2m} \qquad \text{für alle} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Es gelten also $b_2 = -\frac{1}{2}$, $b_4 = -\frac{1}{4}$, $b_7 = -\frac{1}{6}$, $b_{12} = -\frac{1}{8}$ usw. Zwischen b_{k_m} und $b_{k_{m+1}}$ liegen 2^{m-1} weitere Glieder b_k. Diese setzen wir sukzessive gleich den (positiven) a_j mit ungeraden j. Dabei ergeben sich $b_1 = 1$ und

$$b_{k_m+l} = \frac{1}{2^m + 2l - 1} = a_{2^m+2l-1} \qquad \text{für} \quad l \in \{1, 2, \ldots, 2^{m-1}\}$$

für $m \in \mathbb{N}$. Wegen $k_{m+1} - 1 = k_m + 2^{m-1}$, ist das letzte Glied mit $l = 2^{m-1}$ durch $b_{k_{m+1}-1} = \frac{1}{2^{m+1}-1}$ gegeben. Somit haben wir einerseits die neuen Reihenglieder b_k für alle $k \in \mathbb{N}$ erklärt und zum anderen tritt jedes a_j genau einmal unter den b_k auf. Für $m \geq 2$ erhalten wir nun die untere Schranke

$$\begin{aligned} B_m &:= b_{k_m+1} + b_{k_m+2} \cdots + b_{k_{m+1}} = \frac{1}{2^m+1} + \frac{1}{2^m+3} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}-1} - \frac{1}{2m+2} \\ &\geq \frac{2^{m-1}}{2^{m+1}} - \frac{1}{2m+2} \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{k_{M+1}} b_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \sum_{m=2}^{M} B_m \geq \frac{M-1}{12}$$

für alle $M \in \mathbb{N}$ mit $M \geq 2$. Also ist die Reihe $\sum_k b_k$ unbeschränkt und damit nach Satz 2.4 divergent. □

Der nächsten Begriff formalisiert das obige Vorgehen.

Definition 3.22. *Seien $\sum_{j\geq 0} a_j$ eine Reihe und $\Phi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine Bijektion. Setze $b_k = a_{\Phi(k)}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt $\sum_{k\geq 0} b_k$ eine* Umordnung *von $\sum_{j\geq 0} a_j$.*

Wenn $\Phi(k) = k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \geq N$ für ein $N \in \mathbb{N}_0$ gilt, dann stimmen die Partialsummen s_n^b von $\sum_{k\geq 0} b_k$ und s_n^a von $\sum_{j\geq 0} a_j$ für alle $n \geq N$ überein, sodass das Konvergenzverhalten der beiden Reihen gleich ist. Beispiel 3.21 zeigt, dass dies bei unendlichen Umordnungen im Allgemeinen nicht gilt. Für absolut konvergente Reihen können wir aber ein 'unendliches Kommutativgesetz' beweisen. (Es lässt sich mit einem 'unendlichem Assoziativgesetz' kombinieren, siehe S.70 in [4].)

Satz 3.23. *Die Reihe $\sum_{j\geq 0} a_j$ konvergiere absolut. Dann konvergiert jede Umordnung $\sum_{k\geq 0} b_k$ von $\sum_{j\geq 0} a_j$ absolut. Sie hat den gleichen Grenzwert $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum_j |a_j|$ konvergiert, liefert Satz 3.5 ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall\, n > N_\varepsilon : \qquad \sum_{j=N_\varepsilon+1}^{n} |a_j| \le \varepsilon.$$

(Setze dort $m = N_\varepsilon$.) Mit Satz 2.10 folgt daraus im Limes $n \to \infty$ die Ungleichung

$$\sum\nolimits_{j=N_\varepsilon+1}^{\infty} |a_j| \le \varepsilon.$$

Sei nun $\Phi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine Bijektion. Um die in der obigen Abschätzung nicht berücksichtigten a_j zu behandeln, setzen wir $M_\varepsilon = \max\{\Phi^{-1}(0), \dots, \Phi^{-1}(N_\varepsilon)\}$. Für jeden Index j gilt $j = \Phi(\Phi^{-1}(j))$, was für $j \in \{0, 1, \dots, N_\varepsilon\}$ die Inklusion

$$\{0, 1, \dots, N_\varepsilon\} \subseteq \{\Phi(0), \Phi(1), \dots, \Phi(M_\varepsilon)\}$$

nach sich zieht. Seien nun $n \ge N_\varepsilon$ und $m \ge M_\varepsilon$. Wir setzen

$$D_{m,n} = \sum_{k=0}^{m} a_{\Phi(k)} - \sum_{j=0}^{n} a_j.$$

In $D_{m,n}$ kürzen sich die Reihenglieder a_l, die doppelt vorkommen. Somit impliziert die obige Inklusion, dass nur Summanden $\pm a_l$ mit $l \ge N_\varepsilon + 1$ in $D_{m,n}$ übrig bleiben. Zusammen mit der zweiten abgesetzten Ungleichung erhalten wir also

$$|D_{m,n}| \le 2 \sum_{l=N_\varepsilon+1}^{\infty} |a_l| \le 2\varepsilon.$$

Sei $m \ge M_\varepsilon$ fest. Da auch $\sum_j a_j$ nach Bemerkung 3.11 konvergiert, existiert der Grenzwert von $|D_{m,n}|$ für $n \to \infty$ gemäß Satz 2.9. Somit liefert Satz 2.10 die Ungleichung

$$2\varepsilon \ge \lim_{n\to\infty} |D_{m,n}| = \Big| \sum_{k=0}^{m} a_{\Phi(k)} - \sum_{j=0}^{\infty} a_j \Big|$$

für alle $m \ge M_\varepsilon$. Das ist die behauptete Konvergenz. Man kann im obigen Argument a_j durch $|a_j|$ ersetzen, sodass auch $\sum_k |a_{\Phi(k)}|$ konvergiert. □

Für konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihen kann beim Umordnen 'fast alles' geschehen. Dies ist Gegenstand des Riemannschen Umordnungssatz, siehe etwa Satz 3.54 in [6], den wir nicht behandeln.

Konvergente Reihen kann man z.B. mit Hilfe von Satz 2.7 durch

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k = \lim_{n\to\infty} (a_0 + \dots + a_n)(b_0 + \dots + b_n) \\ &=: \lim_{n\to\infty} A_n B_n \qquad (3.2)\end{aligned}$$

multiplizieren. Hierbei werden die Summanden $a_j b_k$ des Produktes über wachsende Rechtecke mit $j, k \in \{0, 1, \dots, n\}$ addiert. In wichtigen Fällen ist es aber besser über Dreiecke und entlang den Diagonalen $j+k=m$ zu summieren. Für gegebene a_j und b_k mit $j,k\in\mathbb{N}_0$ definieren wir dazu

$$c_m=\sum\nolimits_{l=0}^{m}a_lb_{m-l}\qquad\text{für } m\in\mathbb{N}_0. \tag{3.3}$$

Satz 3.24. *Seien* $\sum_{j\geq 0}a_j$ *und* $\sum_{k\geq 0}b_k$ *absolut konvergente Reihen und* c_m *durch* (3.3) *gegeben. Dann konvergiert das* Cauchyprodukt $\sum_{m\geq 0}c_m$ *absolut und es gilt*

$$\sum_{j=0}^{\infty}a_j\cdot\sum_{k=0}^{\infty}b_k=\sum_{m=0}^{\infty}c_m=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{m}a_lb_{m-l}\right). \tag{3.4}$$

Beweis. Seien A_n und B_n für $n\in\mathbb{N}_0$ wie in (3.2) gegeben. Weiter setzen wir

$$A_n^*:=\sum\nolimits_{j=0}^{n}|a_j|,\qquad B_n^*:=\sum\nolimits_{k=0}^{n}|b_k|,\qquad C_n:=\sum\nolimits_{m=0}^{n}c_m.$$

Nach Voraussetzung existieren die Grenzwerte

$$A^*:=\lim_{n\to\infty}A_n^*=\sum\nolimits_{j=0}^{\infty}|a_j|\qquad\text{und}\qquad B^*:=\lim_{n\to\infty}B_n^*=\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}|b_k|.$$

Wir wollen (3.2) verwenden. Dazu müssen wir die Differenz $A_nB_n-C_n$ kontrollieren. Dies kann gelingen, da diese nur Elemente a_jb_k mit $j+k>n$ enthält, die wegen der Annahmen klein sein sollten. Insbesondere kürzen sich in ihr alle Summanden a_jb_k mit $j,k\leq[\frac{n}{2}]$. Wir berechnen

$$|A_nB_n-C_n|=\Bigg|\sum_{\substack{j,k\in\{0,1,\dots,n\}\\ j+k>n}}a_jb_k\Bigg|\leq\sum_{\substack{j,k\in\{0,1,\dots,n\}\\ j+k>n}}|a_j|\,|b_k|\leq A_n^*B_n^*-A^*_{[\frac{n}{2}]}B^*_{[\frac{n}{2}]}.$$

Nach Satz 2.7 strebt die rechte Seite gegen $A^*B^*-A^*B^*=0$ für $n\to\infty$. Wegen (3.2) folgt damit (3.4) aus dem Limes

$$\sum\nolimits_{m=0}^{n}c_m=C_n-A_nB_n+A_nB_n\ \longrightarrow\ \sum\nolimits_{j=0}^{\infty}a_j\cdot\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}b_k$$

für $n\to\infty$. Ferner liefern (3.3) und die obigen Definitionen die Abschätzung

$$\sum_{m=0}^{n}|c_m|\leq\sum_{m=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}|a_l|\,|b_{m-l}|\leq A_n^*B_n^*\leq A^*B^*$$

für alle $n\in\mathbb{N}$. Daraus folgt die geforderte absolute Konvergenz. □

Auch dieser Satz versagt für konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihen, wie in den Übungen besprochen wird. Mit dem Cauchyprodukt gewinnt man leicht die wesentlichen algebraischen Eigenschaften der wohl wichtigsten Reihe in der Analysis. Sie wird im Folgenden immer wieder aufgegriffen und tiefer untersucht.

Beispiel 3.25. Nach Beispiel 3.15 konvergiert die *Exponentialreihe*

$$\exp(z):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

für $z \in \mathbb{C}$ absolut. Wir haben $\exp(0) = 1$ und $\exp(1) = \mathrm{e}$ (nach Beispiel 2.16). Ferner gelten die folgende Gleichungen für $w, z \in \mathbb{C}$.

a) $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$. (Exponentialgesetz)

b) $\exp(z) \neq 0, \quad \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}, \quad \overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$.

c) $\exp(p) = \mathrm{e}^p$ für alle $p \in \mathbb{Q}$.

Beweis. Satz 3.24 und Beispiel 0.3 implizieren

$$\exp(z)\exp(w) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\frac{w^{n-k}}{(n-k)!}\cdot\frac{n!}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k w^{n-k}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+w)^n}{n!} = \exp(z+w)$$

und damit Behauptung a). Daraus schließen wir

$$1 = \exp(0) = \exp(z - z) = \exp(z)\exp(-z),$$

sodass $\exp(z)$ ungleich 0 ist und den Kehrwert $\exp(-z)$ besitzt. Der letzte Teil von b) folgt mit den Sätzen 2.9 und 1.31 aus der Rechnung

$$\overline{\exp(z)} = \lim_{n\to\infty}\overline{\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\overline{z}^k}{k!} = \exp(\overline{z}).$$

Sei $p = m/n$ für $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Sei $m \geq 0$. Teil a) liefert

$$\exp(p)^n = \exp(p)\cdot\ldots\cdot\exp(p) = \exp(np) = \exp(m) = \exp(1)\cdot\ldots\cdot\exp(1) = \mathrm{e}^m,$$

wobei die Punkte ein n-faches bzw. m-faches Produkt bezeichnen. Nach Definition 1.28 gilt somit $\exp(p) = \mathrm{e}^p$. Für $m < 0$ verwendet man ferner Teil b) und Satz 1.31. Es ergibt sich

$$\exp(p) = \exp(-(-p)) = \exp(-p)^{-1} = (\mathrm{e}^{-p})^{-1} = \mathrm{e}^p. \qquad \square$$

3.3. Potenzreihen

Viele der elementaren Funktionen (mit der Variablen z) werden wie in Beispiel 3.25 durch Reihen definiert, in denen Potenzen z^n in die n-ten Glieder eingehen. Dies motiviert den nächsten Begriff.

Definition 3.26. *Es seien Zahlen $a_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann nennt man die Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$* Potenzreihe *mit Koeffizienten a_n.*

Bemerkung 3.27. Es sei D die Menge derjenigen $z \in \mathbb{C}$, für die die Potenzreihe konvergiert. Man beachte, dass D stets 0 enthält. Dann ist $f : D \to \mathbb{C}$; $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, eine Abbildung mit $f(0) = a_0$. $\Diamond$

Das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe wird weitgehend durch die folgende Größe beschrieben, die nur von den gegebenen Koeffizienten abhängt.

Definition 3.28. *Der* Konvergenzradius ρ *einer Potenzreihe* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *ist*

$$\rho := \begin{cases} \dfrac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \textit{wenn } \big(\sqrt[n]{|a_n|}\big)_{n\geq 0} \textit{ beschränkt und keine Nullfolge ist,} \\ 0, & \textit{wenn } \big(\sqrt[n]{|a_n|}\big)_{n\geq 0} \textit{ unbeschränkt ist,} \\ \infty, & \textit{wenn } \sqrt[n]{|a_n|} \to 0 \textit{ für } n \to \infty. \end{cases}$$

Der nachstehende *Konvergenztheorem für Potenzreihen* liefert (im Falle $\rho \in (0,\infty)$) absolute Konvergenz für $z \in B(0,\rho)$ und Divergenz für $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}(0,\rho)$. Teile c), e) und f) des nächsten Beispiels zeigen, dass für z im Rand $S(0,\rho)$ des Konvergenzkreises $B(0,\rho)$ keine allgemeine Aussage wie im Theorem möglich ist.

Theorem 3.29. *Seien ρ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum a_n z^n$ und $z \in \mathbb{C}$.*

a) Sei $\rho \in (0,\infty)$. Dann konvergiert $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ absolut, wenn $|z| < \rho$ ist; und die Potenzreihe divergiert im Falle $|z| > \rho$.

b) Sei $\rho = 0$. Dann divergiert $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ für alle $z \neq 0$.

c) Sei $\rho = \infty$. Dann konvergiert $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ absolut für alle z.

Somit gilt $\rho = \sup\big\{r \geq 0 \,\big|\, \forall z \in \overline{B}(0,r) : \exists \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\big\}$, wobei $\sup[0,\infty) =: \infty$.

Beweis. Das Theorem folgt fast direkt aus dem Wurzelkriterium Satz 3.16. Wir haben zunächst $|a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = |a_n|^{\frac{1}{n}}\,|z| =: b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Für $\rho \in (0,\infty)$ liefert Satz 2.30 e), dass $\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n = |z|/\rho$. Diese Zahl ist genau dann kleiner (bzw. größer) als 1, wenn $|z| < \rho$ (bzw. $|z| > \rho$) ist. Satz 3.16 impliziert somit Behauptung a).

b) Seien $\rho = 0$ und $z \neq 0$. Dann ist $(b_n)_n$ unbeschränkt. Es gibt somit ein Teilfolge $b_{n_j} \geq 1$, woraus $|a_{n_j} z^{n_j}| \geq 1$ für all $j \in \mathbb{N}$ folgt. Nach Korollar 3.6 divergiert die Potzenzreihe.

c) Sei $\rho = \infty$. Dann konvergiert $(b_n)_n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gegen 0, sodass die absolute Konvergenz von $\sum_n a_n z^n$ wieder aus Satz 3.16 folgt.

Die Konvergenzaussagen liefern die Relation '$\leq$' im Zusatz, und die Divergenzbehauptungen die Ungleichung '$\geq$'. $\square$

Das obige Kriterium ist oft einfach anzuwenden, wie folgende Beispiele zeigen.

Beispiel 3.30. a) Seien $a_n = 0$ für alle $n > m$ und ein $m \in \mathbb{N}_0$. Dann ist die Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ gleich dem *Polynom* $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m$ und $\rho = \infty$.

b) Die Exponentialreihe $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ aus Beispiel 3.25 konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$. Sie definiert die *Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Somit hat exp nach Theorem 3.29 den Konvergenzradius $\rho = \infty$. Insbesondere gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0. \tag{3.5}$$

c) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ aus Beispiel 3.2 konvergiert absolut für $z \in B(0,1)$, da hier $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und somit $\rho = 1$ gilt. Sie divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq 1$ nach Beispiel 3.7.

d) Die Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} n!z^n$ hat wegen (3.5) und Satz 3.38 unten den Konvergenzradius $\rho = 0$. Sie divergiert also nach Theorem 3.29 für alle $z \neq 0$.

e) Die Potenzreihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}(2z)^n$ hat die Koeffizienten $a_n = 2^n/n$ für $n \in \mathbb{N}$. Da eine Übung $|a_n|^{\frac{1}{n}} = 2/\sqrt[n]{n} \to 2$ für $n \to \infty$ zeigt, hat die Reihe den Konvergenzradius $\rho = \frac{1}{2}$. Nach Theorem 3.29 konvergiert sie also für $|z| < \frac{1}{2}$ absolut und für $|z| > \frac{1}{2}$ divergiert sie. Gemäß Beispiel 3.9 konvergiert sie ferner für $z = -\frac{1}{2}$ und divergiert für $z = \frac{1}{2}$.[2]

f) Sei $\sum_{n>1} n^{-2}3^{-n}z^n$. Es gilt also $|a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}(\sqrt[n]{n})^{-2}$, was nach einer Übung für $n \to \infty$ gegen $\frac{1}{3}$ strebt. Somit ist $\rho = 3$, und die Potenzreihe konvergiert für $|z| < 3$ absolut und divergiert für $|z| > 3$, laut Theorem 3.29. Sei $|z| = 3$. Dann gilt $|n^{-2}3^{-n}z^n| = n^{-2}$, sodass das Majorantenkriterium Satz 3.12 auch für $|z| = 3$ die absolute Konvergenz zeigt. $\Diamond$

Aus den vorherigen Resultaten über Reihen folgen leicht die folgenden Rechenregeln. Man beachte, dass rechts wieder Potenzreihen stehen.

Satz 3.31. *Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, sowie $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ und $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradien $\rho_a > 0$ und $\rho_b > 0$. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \rho_a$ und $|z| < \rho_b$. Dann existieren die Grenzwerte*

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) z^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} \Big) z^n.$$

Beweis. Die erste Aussage ergibt sich direkt aus Theorem 3.29 und Satz 3.3. Die zweite ist eine Folgerung von Theorem 3.29, Satz 3.24 und der Rechnung

$$c_n = \sum\nolimits_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = z^n \sum\nolimits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad \text{in (3.3).} \qquad \square$$

Wir können nun mit Sinus und Kosinus zwei weitere wichtige Funktionen als Potenzreihen definieren und erste Eigenschaften festhalten.

Beispiel 3.32. Die Reihen

$$\sin(z) = \sin z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots \qquad \text{und}$$

$$\cos(z) = \cos z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \cdots$$

[2] Nach Satz 3.44 in [6] konvergiert die Reihe für alle $z \in S(0, 1/2) \setminus \{1/2\}$. Diese Aussage beruht auf einem tiefer liegenden Konvergenzkriterium für Reihen.

konvergieren für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut. Weiter gelten

$$\begin{aligned} \sin x \in \mathbb{R} \qquad &\text{und} \qquad \cos x \in \mathbb{R} \qquad &&\text{für alle } x \in \mathbb{R}, \qquad (3.6)\\ \cos(-z) = \cos z \qquad &\text{und} \qquad \sin(-z) = -\sin z \qquad &&\text{für alle } z \in \mathbb{C}. \qquad (3.7) \end{aligned}$$

Beweis. Der Sinus ist eine Potenzreihe mit Koeffizienten $a_j = 0$ für gerade $j \in \mathbb{N}_0$ und $a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$ für ungerade $j = 2k+1$ mit $k \in \mathbb{N}_0$. Mit (3.5) folgt $\rho = \infty$, sodass Theorem 3.29 die erste Behauptung für sin zeigt. Den Kosinus behandelt man genauso. Die anderen Aussagen ergeben sich aus den Reihen. □

Der nächste Satz stellt einen unerwarteten Zusammenhang zwischen den *komplexen* Funktionen exp, sin und cos her. Insbesondere liegt die Zahl $\exp(\mathrm{i}x)$ für reelle x auf der Einheitskreislinie und hat den Realteil $\cos x$ und den Imaginärteil $\sin x$, was gerade der elementargeometrischen Definition des Sinus und Kosinus entspricht. Dies wird in Abschnitt 4.4 vertieft.

Satz 3.33. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten die folgenden Formeln.*

$$\begin{aligned} \exp(\mathrm{i}z) = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z) \quad \textit{(Euler)}, \qquad &(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1,\\ \cos z = \tfrac{1}{2}\big(\exp(\mathrm{i}z) + \exp(-\mathrm{i}z)\big), \qquad &\sin z = \tfrac{1}{2\mathrm{i}}\big(\exp(\mathrm{i}z) - \exp(-\mathrm{i}z)\big). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ erhalten wir ferner

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(\exp(\mathrm{i}x)) = \cos x, \qquad &\mathrm{Im}(\exp(\mathrm{i}x)) = \sin x,\\ \big|\exp(\mathrm{i}x)\big| = 1, \qquad |\cos x| \le 1, \qquad &|\sin x| \le 1. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Beweis. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt aufgrund der Reihendarstellungen und $\mathrm{i}^2 = -1$

$$\exp(\mathrm{i}z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}^2)^k}{(2k)!} z^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}(\mathrm{i}^2)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \cos z + \mathrm{i}\sin z,$$

was die Eulerformel zeigt. Daraus folgen mit dem Exponentialgesetz in Beispiel 3.25 und den Eigenschaften (3.7) die Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 &= \exp(0) = \exp(\mathrm{i}z - \mathrm{i}z) = \exp(\mathrm{i}z)\exp(\mathrm{i}(-z)) = (\cos z + \mathrm{i}\sin z)(\cos z - \mathrm{i}\sin z)\\ &= (\cos z)^2 - \mathrm{i}^2(\sin z)^2 = (\cos z)^2 + (\sin z)^2. \end{aligned}$$

Ähnlich erhalten wir

$$\begin{aligned} \exp(\mathrm{i}z) + \exp(-\mathrm{i}z) &= \cos z + \mathrm{i}\sin z + \cos z - \mathrm{i}\sin z = 2\cos z,\\ \exp(\mathrm{i}z) - \exp(-\mathrm{i}z) &= \cos z + \mathrm{i}\sin z - \cos z + \mathrm{i}\sin z = 2\mathrm{i}\sin z. \end{aligned}$$

Behauptung (3.9) folgt aus den Aussagen (3.6) und (3.8) und Satz 1.31. □

Es gibt zahlreiche Formeln, die sin und cos miteinander verbinden. Wir beschränken uns hier exemplarisch auf eine Gleichung, die später benötigt wird; andere werden in den Übungen besprochen.

Korollar 3.34. *Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\cos z - \cos w = -2\sin\big(\tfrac{1}{2}(z+w)\big)\sin\big(\tfrac{1}{2}(z-w)\big).$$

Beweis. Die Gleichungen (3.8) und das Exponentialgesetz implizieren

$$\begin{aligned}
&-2\sin\big(\tfrac{1}{2}(z+w)\big)\sin\big(\tfrac{1}{2}(z-w)\big)\\
&= \frac{-2}{(2\mathrm{i})^2}\Big[\exp\big(\tfrac{\mathrm{i}}{2}(z+w)\big) - \exp\big(-\tfrac{\mathrm{i}}{2}(z+w)\big)\Big]\Big[\exp\big(\tfrac{\mathrm{i}}{2}(z-w)\big) - \exp\big(-\tfrac{\mathrm{i}}{2}(z-w)\big)\Big]\\
&= \tfrac{1}{2}\big(\exp(\mathrm{i}z) - \exp(\mathrm{i}w) - \exp(-\mathrm{i}w) + \exp(-\mathrm{i}z)\big) = \cos z - \cos w.
\end{aligned}$$

□

3.4. Uneigentliche Grenzwerte

In diesem Abschnitt diskutieren wir den einfachsten Fall der Divergenz näher, um manche Überlegungen und Aussagen zu vereinfachen. In diesem Zusammenhang führen wir zunächst einige Begriffe ein.

Definition 3.35. *Die erweiterte Zahlengerade ist*

$$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

wobei die Symbole $-\infty$ und $+\infty = \infty$ die Eigenschaften

$$-\infty < x < +\infty \quad (\text{für alle } x \in \mathbb{R}) \qquad \text{und} \qquad |\pm\infty| = +\infty$$

besitzen sollen. Wenn $D \subseteq \mathbb{R}$ nach oben bzw. nach unten unbeschränkt ist, dann schreibt man $\sup D = +\infty$ *bzw.* $\inf D = -\infty$.

Also gelten $\sup \mathbb{N} = +\infty$ und $\inf \mathbb{Z} = -\infty$, wie man erwarten würde.

Definition 3.36. *Sei $(x_n)_{n\ge 1}$ reell. Man schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$) oder $x_n \to +\infty$ (bzw. $x_n \to -\infty$) für $n \to \infty$, wenn*

$$\forall K > 0 \quad \exists N_K \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N_K: \quad x_n \ge K \quad (\text{bzw. } x_n \le -K). \tag{3.10}$$

Man spricht hier von uneigentlicher Konvergenz.

Somit konvergiert $(x_n)_n$ gegen $+\infty$, wenn für jede Schranke $K > 0$ *alle* Folgenglieder ab einem Index über der Schranke liegen. Wir illustrieren diese Begriffe durch einfache Beobachtungen und Beispiele.

Bemerkung 3.37. a) Sei $(x_n)_{n\ge 1}$ reell mit $x_n \to +\infty$ ($x_n \to -\infty$). Dann gilt $x_n \ge 1$ (bzw. $x_n \le -1$) für alle $n \ge N_1$.

b) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ mit $\sup D = +\infty$ ($\inf D = -\infty$). Dann existieren Elemente x_n in D mit $x_n \to +\infty$ ($x_n \to -\infty$) für $n \to \infty$.

Beweis. Sei etwa $\sup D = +\infty$. Wähle $n \in \mathbb{N}$. Da n keine obere Schranke von D sein kann, gibt es ein Element $x_n > n$ von D. Für jedes $K > 0$ gilt also $x_n \ge K$ für alle $n \ge K$. Den zweiten Fall behandelt man genauso. □

c) Nach Definition 3.36 haben wir $x_n = n \to +\infty$ (mit $N_K \geq K$), $y_n = -n^2 \to -\infty$ (mit $N_K \geq \sqrt{K}$) und $u_n \to +\infty$ (mit $N_K \geq K$) für $n \to \infty$, wobei $u_n = n$ für gerade n und $u_n = n^3$ für ungerade.

d) Die Folgen $(x_n)_n = ((-1)^n)_n$ und $(y_n)_n = ((-1)^n n)_n$ konvergieren *nicht* uneigentlich, da $x_{2n+1}, y_{2n+1} \leq -1 < K$ und $x_{2n}, y_{2n} \geq 1 > -K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $K > 0$ gelte. Allerdings haben $(|y_n|)_n$ und $(y_{2n})_n$ wie in Teil c) den uneigentlichen Limes $+\infty$, sowie $y_{2n+1} \to -\infty$. ♢

Wir erweitern Teile von Satz 2.7 sowie Theorem 2.14 auf uneigentliche Konvergenz, wobei wir uns auf Kehrwerte konzentrieren. Man kann hier weitere verwandte Aussagen beweisen (siehe die Übungen). Wie wir in der nächsten Bemerkung (und den Übungen) sehen werden, sind aber viele Varianten des Satzes *falsch*.

Satz 3.38. *Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ reell.*

a) Es gelte $|x_n| \to +\infty$ für $n \to \infty$. Dann folgt $\frac{1}{x_n} \to 0$ für $n \to \infty$.

b) Es gelte $x_n \to 0$ für $n \to \infty$ und es gebe einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n > 0$ für alle $n \geq n_0$. Dann folgt $\frac{1}{x_n} \to +\infty$ für $n \to \infty$.

c) Es gelte $x_n \to 0$ für $n \to \infty$ und es gebe einen Index $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $x_n < 0$ für alle $n \geq n_1$. Dann folgt $\frac{1}{x_n} \to -\infty$ für $n \to \infty$.

d) Sei $(x_n)_n$ wachsend (fallend) und unbeschränkt nach oben (unten). Dann hat die Folge den uneigentlichen Grenzwert $+\infty$ ($-\infty$).

Beweis. a) Wegen der Äquivalenz von $|x_n^{-1}| \leq \varepsilon$ und $|x_n| \geq 1/\varepsilon$ passt (3.10) sehr gut zu (2.1). Um das zu präzisieren, sei $|x_n| \to +\infty$ für $n \to \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle eine Zahl $K > 0$ mit $\frac{1}{K} \leq \varepsilon$. Nach (3.10) gibt es dann so einen Index $N_K \in \mathbb{N}$, dass $|x_n| \geq K \geq 1/\varepsilon$ für alle $n \geq N_K$ gilt. Für diese n folgt dann $\left|\frac{1}{x_n}\right| \leq \frac{1}{K} \leq \varepsilon$ und damit a).

b) Sei $x_n \to 0$ für $n \to \infty$ und $x_n > 0$ für alle $n \geq n_0$. Sei $K > 0$. Wähle $\varepsilon := 1/K > 0$. Wir haben den Index $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ aus (2.1). Setze $N_K = \max\{N_\varepsilon, n_0\}$. Dies liefert $0 < x_n \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$. Für diese n ergibt sich dann $\frac{1}{x_n} \geq \frac{1}{\varepsilon} = K$ und damit die Behauptung b). Aussage c) zeigt man entsprechend.

d) Da $(x_n)_n$ unbeschränkt ist, gibt es wie in Bemerkung 3.37 für jede Schranke $K > 0$ einen Index $N_K \in \mathbb{N}$ mit $x_{N_K} \geq K$ ($x_{N_K} \leq -K$). Wegen der Monotonie folgt $x_n \geq x_{N_K} \geq K$ ($x_n \leq x_{N_K} \leq -K$) für alle $n \geq N_K$ und somit d). □

Seien $x_n \to x$ und $y_n \to +\infty$ oder $y_n \to -\infty$ für $n \to \infty$. Die Sätze 2.7 und 3.38 liefern dann den Grenzwert $\frac{x_n}{y_n} = x_n \frac{1}{y_n} \to 0$ für $n \to \infty$. Mit der Definition

$$\frac{x}{\pm\infty} := 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \tag{3.11}$$

erhält man die Aussage $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{\pm\infty} = 0$. Seien $x, y_n > 0$ und $y_n \to 0$ für $n \to \infty$ Wie in Satz 3.38 folgt der Limes $\frac{x}{y_n} \to +\infty$, den wir als $\frac{x}{0^+} = +\infty$ mit $x > 0$ schreiben.

Die folgenden Beispiele zeigen, dass man mit '$\pm\infty$' meist nicht so einfach wie oben rechnen kann. (Wie kommen darauf aber in Theorem 5.30 zurück.)

Bemerkung 3.39. a) Man benötigt die Vorzeichenbedingung in Satz 3.38 b) bzw. c): Im Falle $x_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$ für $n \to \infty$ divergiert $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\geq 1} = ((-1)^n n)_n$.

b) Wenn $x_n \to 0$ und z.B. $y_n \to \infty$ kann für $x_n y_n$ im Allgemeinen 'alles' passieren. Wir betrachten dazu die Limiten $x_n = \frac{1}{n} \to 0$, $u_n = n \to +\infty$, $v_n = n^2 \to +\infty$, $y_n = \sqrt{n} \to +\infty$, sowie $z_{2n} = u_n$ und $z_{2n+1} = y_n$ mit $z_n \to +\infty$, für $n \to \infty$. Hier gelten $x_n u_n = 1 \to 1$, $x_n v_n = n \to +\infty$, $x_n y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ für $n \to \infty$ und $(x_n z_n)_n$ divergiert. Entsprechendes gilt in den Fällen '$\infty - \infty$', '$\frac{\pm\infty}{+\infty}$', '$\frac{\pm\infty}{-\infty}$' und '$\frac{0}{0}$'. ◊

Wir nutzen nun die Elemente $\pm\infty$ aus, um die Begriffe des Limes superior und inferior auch für unbeschränkte Folgen zu definieren. Dazu sei $(x_n)_{n\geq 1}$ reell. Wie vor (2.6) definiert man $b_n = \sup_{j\geq n} x_j \searrow$ und $c_n = \inf_{j\geq n} x_j \nearrow$ für $n \in \mathbb{N}$ in $\overline{\mathbb{R}}$, vergleiche Definition 3.35.

Bemerkung 3.40. Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ reell.

a) Die Folge $(x_n)_n$ ist genau dann nach oben (bzw. unten) unbeschränkt, wenn $b_n = +\infty$ (bzw. $c_n = -\infty$) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Man setzt dann $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (bzw. $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty$).

b) Sei $(x_n)_n$ nach oben (bzw. unten) beschränkt. Wenn die Folge $(b_n)_n$ (bzw. $(c_n)_n$) nach unten (oben) beschränkt ist, konvergiert sie nach Theorem 2.14 und man kann wie in (2.7) bzw. in (2.8) den Limes superior bzw. inferior in $\mathbb{R}$ definieren. Seien nun $(b_n)_n$ (bzw. $(c_n)_n$) nach unten (oben) unbeschränkt. Satz 3.38 d) liefert die uneigentliche Konvergenz $b_n \to -\infty$ bzw. $c_n \to +\infty$ für $n \to \infty$. Wir definieren hier $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty$ (bzw. $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$).

In allen Fällen gibt es Teilfolgen $(x_{n_j})_j$ mit Grenzwert $\overline{\lim}\, x_n$ bzw. $\underline{\lim}\, x_n$. ◊

Bemerkung 3.41. a) Die Folge $(x_n)_n = (0, -1, 0, -2, 0, \dots)$ hat den Limes superior 0 und den Limes inferior $-\infty$.

b) Mittels Bemerkung 3.40 kann man im Quotienten- und Wurzelkriterium (bei gleichen Aussagen und Beweisen) die Beschränktheitsvoraussetzungen weglassen.

c) Wegen den Anmerkungen bei (3.11) hat eine Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ den Konvergenzradius

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, +\infty],$$

was $\rho = \frac{1}{+\infty} = 0$ und $\rho = \frac{1}{0^+} = +\infty$ beinhaltet. Theorem 3.29 gilt dann weiterhin.

d) Reihen $\sum_{j\geq 0} a_j$ mit $a_j \geq 0$ konvergieren stets zumindest uneigentlich: Bei beschränkten Partialsummen $(s_n)_n$ liefert Satz 3.4 die Konvergenz in $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Da $(s_n)_n$ wächst, folgt im unbeschränkten Fall aus Satz 3.38 d) die uneigentliche Konvergenz

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j = +\infty. \qquad \Diamond$$

KAPITEL 4

Stetige Funktionen

In der strukturell orientierten Mathematik versieht man zunächst Mengen mit 'Strukturen' (z.B. die algebraischen Verknüpfungen eines Vektorraums, eine Ordnungsrelation oder Konvergenz) und betrachtet dann Abbildungen zwischen solchen Mengen, die die zu Grunde liegende Struktur 'respektieren' und damit zu ihr passen (etwa lineare Abbildungen auf Vektorräumen). In dieser Vorlesung behandeln wir Konvergenz fast nur in den einfachsten Fällen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$; erst in Analysis 2 werden Grenzwerte in einem sehr allgemeinen Rahmen systematisch eingeführt und untersucht (wobei sich aber die einfacheren Aussagen kaum ändern).

Funktionen, die die Konvergenz erhalten, heißen *stetig*. Diese Eigenschaft wird es im zweiten Abschnitt erlauben, (zumal im Reellen) weitgehende qualitative Aussagen über das Bild einer Funktion zu machen, die wir im letzten Abschnitt auf exp, sin und cos anwenden. Zu Beginn diskutieren wir die grundlegenden Begriffe und Eigenschaften. In diesem Kapitel sei D stets eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{C}$.

4.1. Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

Als Vorbereitung besprechen wir Grenzwerte einer Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, um überhaupt davon reden zu können, dass f Konvergenz erhalte. Zuerst definieren wir die Punkte $z \in \mathbb{C}$, bei denen ein Grenzwert für f sinnvoll erklärt werden kann.

DEFINITION 4.1. *Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$. Eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ heißt* Häufungspunkt *von D, wenn es eine Folge $(z_n)_{n\geq 1}$ in $D \setminus \{z\}$ gibt, die gegen z konvergiert. Wenn $z \in D$ kein Häufungspunkt von D ist, so ist z in D* isoliert.

Sei speziell $D \subseteq \mathbb{R}$. Wir nennen dann $+\infty = \infty$ (bzw. $-\infty$) einen uneigentlichen Häufungspunkt *von D, wenn D nach oben (bzw. nach unten) unbeschränkt ist.*

Im Hinblick auf Definition 4.3 betrachten wir oben nur Approximationen durch $z_n \neq z$. Wir diskutieren und illustrieren diese Begriffe ein wenig.

BEMERKUNG 4.2. a) In Definition 4.1 ist $z \in \mathbb{C}$ auch ein Häufungspunkt der Folge $(z_n)_{n\geq 1}$ im Sinne von Definition 2.19. Wenn ein Punkt $z \in D$ isoliert ist, dann ist er zwar ein Häufungspunkt der konstante Folge $(z)_n$, aber keiner der Menge D.

b) Nach Satz 2.9 liegt jeder Häufungspunkt einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ auch in $\mathbb{R}$.

c) Ein Punkt $z \in D$ ist genau dann isoliert, wenn es so einen Radius $r > 0$ gibt, dass $\overline{B}(z, r) \cap D = \{z\}$ gilt. Dazu bemerken wir, dass $z \in D$ genau dann nicht isoliert ist, wenn eine Folge $(z_n)_{n\geq 1}$ in $D \setminus \{z\}$ gegen z konvergiert. In diesem Fall ist der Schnitt $D_r := \overline{B}(z,r) \cap D \setminus \{z\}$ für alle $r > 0$ nichtleer. Umgekehrt liefert diese Bedingung für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl z_n in $D \setminus \{z\}$ mit $|z - z_n| \leq 1/n$, sodass $(z_n)_n$ gegen z strebt.

d) Sei ∞ (bzw. $-\infty$) ein uneigentlicher Häufungspunkt einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}$. Entsprechend zum ersten Fall in Definition 4.1 gibt es dann eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in D mit $x_n \to \infty$ (bzw. $x_n \to -\infty$) für $n \to \infty$, siehe Bemerkung 3.37.

e) Die Zahlen 0 und $\frac{1}{2}$ sind Häufungspunkte von $(0,1]$ (wähle etwa $x_n = \frac{1}{n} \to 0$ bzw. $x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \to \frac{1}{2}$ für $n \to \infty$), 2 ist es nicht (da $|x - 2| \geq 1$ für alle $x \in (0,1]$ gilt). Weiter ist in $D = B(0,1) \cup \{-2\}$ der Punkt -2 isoliert (mit z.B. $r = \frac{1}{2}$). Ebenso sind alle Zahlen in $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$ isoliert. Hingegen sind alle $z \in \overline{B}(0,1)$ Häufungspunkte von D, da $z_n = (1 - \frac{1}{n})z \in B(0,1)$ für $n \to \infty$ gegen z streben. $\Diamond$

Wir führen nun Grenzwerte von Funktionen auf die Folgenkonvergenz zurück.

Definition 4.3. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$, z_0 ein Häufungspunkt von D und $w_0 \in \mathbb{C}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$* konvergiert *gegen den* Grenzwert *w_0 für $z \to z_0$, wenn*

$$\textit{für } \textbf{jede} \textit{ Folge } (z_n)_n \textit{ in } D\setminus\{z_0\} \textit{ mit } z_n \to z_0 \textit{ gilt: } \; f(z_n) \to w_0 \quad \textit{für } n \to \infty. \tag{4.1}$$

(Wir betonen, dass dies für jede solche Folge $(z_n)_n$ gelten mss.) Man schreibt dann

$$w_0 = \lim_{z\to z_0} f(z) \qquad \textit{oder} \qquad f(z) \to w_0 \quad \textit{für } z \to z_0.$$

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Wenn man in (4.1) zusätzlich $z_n < z_0$ (bzw. $z_n > z_0$) für alle $n \in \mathbb{N}$ fordert, so spricht man vom links- *(bzw.* rechts-*)*seitigen Grenzwert *und schreibt $w_0 = \lim_{z\to z_0^-} f(z)$ (bzw. $\lim_{z\to z_0^+} f(z)$). Sei ∞ (bzw. $-\infty$) ein uneigentlicher Häufungspunkt von D. Dann definiert man den Grenzwert $f(z) \to w_0$ für $z \to \infty$ (bzw. $z \to -\infty$) wie in (4.1) mit $\pm\infty$ statt z_0.*

Man hat diese Begriffe so gewählt, dass für $z_0 \in D$ der Funktionswert $f(z_0)$ beim Grenzwert von $f(z)$ für $z \to z_0$ oder $z \to z_0^{\pm}$ keine Rolle spielt. Die Konvergenzen in den folgenden Beispiele ergeben sich leicht aus den Resultaten des zweiten Kapitels.

Beispiel 4.4. a) Seien $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $f(z) = (z^2 - 3)/(2|z|^2 + 1)$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann konvergiert $f(z) \to (z_0^2 - 3)/(2|z_0|^2 + 1)$ für $z \to z_0$. Für die 'Einschränkung' $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = (x^2 - 3)/(2x^2 + 1)$, gilt ferner $f(x) \to \frac{1}{2}$ für $x \to \pm\infty$.

Beweis. Seien $z_n \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ mit $z_n \to z_0$ für $n \to \infty$ **beliebig** gewählt. Nach den Sätzen 2.7 und 2.9 konvergiert

$$f(z_n) = \frac{z_n^2 - 3}{2|z_n|^2 + 1} \longrightarrow \frac{z_0^2 - 3}{2|z_0|^2 + 1}$$

für $n \to \infty$. Für reelle $x_n \to \pm\infty$ liefert Satz 3.38 den Grenzwert $1/x_n \to 0$ für $n \to \infty$. Aus Satz 2.7 folgern wir dann

$$f(x_n) = \frac{1 - 3x_n^{-2}}{2 + x_n^{-2}} \longrightarrow \frac{1}{2}, \qquad n \to \infty. \qquad \square$$

b) Sei $f : [0, 2) \to \mathbb{R}$; $f(x) = \sqrt{x}$. Dann strebt $f(x)$ gegen $\sqrt{2}$ für $x \to 2$, da aus $[0, 2) \ni x_n \to 2$ für $n \to \infty$ laut einer Übung **stets** $\sqrt{x_n} \to \sqrt{2}$ folgt.

c) Seien $A \subseteq M$ nichtleere Mengen. Die *charakteristische Funktion* von A ist

$$\mathbb{1}_A : M \to \mathbb{R}; \quad \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in M \setminus A, \end{cases}$$

wobei $\mathbb{1} := \mathbb{1}_M$. Sei speziell $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann existiert $\lim_{x\to 0} f(x)$ nicht, aber es existieren $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$. (Hier ist $f(0) = 0$.)

Beweis. Sei $x_n > 0$ **beliebig** mit $x_n \to 0$ für $n \to \infty$. Dann strebt $f(x_n) = 1$ gegen 1, was $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ zeigt. Genauso behandelt man den Fall $x \to 0^-$. Sei ferner $y_n = (-1)^n/n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $(y_n)_n$ für $n \to \infty$ gegen 0, aber $f(y_n)$ ist für gerade n gleich 1 und für ungerade gleich 0. Also divergiert $(f(y_n))_n$ und der Grenzwert von f für $x \to 0$ existiert nicht. $\square$

d) Für $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{x}$, existiert $\lim_{x\to 0} f(x)$ nicht, da z.B. $(f(1/n))_n = (n)_n$ divergiert. $\Diamond$

Wir verwenden die Bezeichnung ‘Kugel’ für Kreisscheiben $\overline{B}(z_0, r)$ und Intervalle $[x_0 - r, x_0 + r]$, sowie deren offenen Varianten. Es ist oft nützlich Begriffe, die über Folgen definiert wurden, auch mittels Kugeln zu charakterisieren. Dies geschieht hier für die Konvergenz einer Funktion f gegen w_0 für $z \to z_0$: Für **jeden** Radius ε im Bild findet man eine δ_ε-Kugel um z_0, auf der f nur um ε von w_0 abweicht.

Satz 4.5. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$, z_0 ein Häufungspunkt von D, $f : D \to \mathbb{C}$ und $w_0 \in \mathbb{C}$.*

a) Genau dann existiert $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall\, z \in D \text{ mit } 0 < |z - z_0| \le \delta_\varepsilon : \quad |f(z) - w_0| \le \varepsilon. \tag{4.2}$$

b) Sei speziell $D \subseteq \mathbb{R}$. Genau dann existiert $\lim_{z\to z_0^+} f(z) = w_0$, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall\, z \in D \text{ mit } z_0 < z \le z_0 + \delta_\varepsilon : \quad |f(z) - w_0| \le \varepsilon. \tag{4.3}$$

Für den linksseitigen Limes ersetze hier ‘$z_0 < z \le z_0 + \delta_\varepsilon$’ durch ‘$z_0 - \delta_\varepsilon \le z < z_0$’.

c) Sei ∞ (bzw. $-\infty$) ein uneigentlicher Häufungspunkt von $D \subseteq \mathbb{R}$. Genau dann existiert $\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$ (bzw. $\lim_{z\to-\infty} f(z) = w_0$), wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, K_\varepsilon > 0 \quad \forall\, z \in D \text{ mit } z \ge K_\varepsilon \ (z \le -K_\varepsilon) : \quad |f(z) - w_0| \le \varepsilon. \tag{4.4}$$

Beweis. Die Notwendigkeit der ε-δ-Bedingungen folgt fast direkt aus den Definitionen. Die andere Implikation zeigt man am bequemsten per Kontraposition, da die negierte ε-δ-Bedingung leicht eine Folge $z_n \to z_0$ mit $f(z_n) \not\to w_0$ liefert.

a) 1) Es gelte (4.2). Seien $z_n \in D \setminus \{z_0\}$ beliebig gewählt mit $z_n \to z_0$ für $n \to \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir haben den Radius $\delta_\varepsilon > 0$ aus (4.2). Aufgrund der Konvergenz von $(z_n)_{n\ge 1}$ existiert ein Startindex $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $0 < |z_n - z_0| \le \delta_\varepsilon$ für alle $n \ge N_\varepsilon$. Aus (4.2) folgt dann $|f(z_n) - w_0| \le \varepsilon$ und damit $f(z_n) \to w_0$ für $n \to \infty$. Somit konvergiert $f(z)$ für $z \to z_0$ gegen w_0.

2) Es gelte (4.2) nicht. Dann erhalten wir einen Radius $\varepsilon_0 > 0$, für den es für jedes $n \in \mathbb{N}$ so eine Zahl $z_n \in D$ mit $0 < |z_n - z_0| \le \frac{1}{n}$ gibt, dass $|f(z_n) - w_0| > \varepsilon_0$ gilt. Also strebt z_n für $n \to \infty$ gegen z_0, aber $f(z_n)$ nicht gegen w_0. Demnach hat $f(z)$ für $z \to z_0$ nicht den Grenzwert w_0.

b) und c) zeigt man genauso. Wir geben die Details für c) im Falle $+\infty$ an.

1) Es gelte (4.4). Seien $z_n \in D$ beliebig gewählt mit $z_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir haben die Schranke $K_\varepsilon > 0$ aus (4.2). Wegen der uneigentlichen Konvergenz von $(z_n)_n$ gibt es einen Index $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $z_n \ge K_\varepsilon$ für alle $n \ge N_\varepsilon$.. Aus (4.2) folgt dann $|f(z_n) - w_0| \le \varepsilon$ und damit $f(z) \to w_0$ für $z \to \infty$.

2) Es gelte (4.4) nicht. Dann erhalten wir einen Radius $\varepsilon_0 > 0$, für den es für jedes $n \in \mathbb{N}$ so eine Zahl $z_n \in D$ mit $z_n \ge n$ gibt, dass $|f(z_n) - w_0| > \varepsilon_0$ gilt. Also strebt z_n für $n \to \infty$ gegen ∞, aber $f(z_n)$ nicht gegen w_0. Folglich hat $f(z)$ nicht den Grenzwert w_0 für $z \to \infty$. □

Wie in Bemerkung 2.6 kann man in (4.2) und ähnlichen Bedingungen ε und δ_ε durch $c_1\varepsilon$ und $c_2\delta_\varepsilon$ mit Konstanten $c_j > 0$ ersetzen.

Da Konvergenz über Folgen definiert worden ist, implizieren die Sätze aus Abschnitt 2.1 leicht eine Reihe von Grenzwertaussagen für Funktionen. Die erste Aussage in e) und ihr Beweis sind dabei typische Anwendungen von Satz 4.5, der ‘lokale’ Aussagen auf (kleinen) Kugeln liefert.

Satz 4.6. *Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$, z_0 ein Häufungspunkt von D oder (wenn $D \subseteq \mathbb{R}$) ein uneigentlicher Häufungspunkt von D, $f, g : D \to \mathbb{C}$ Funktionen und $u_0, v_0 \in \mathbb{C}$ derart, dass die Grenzwerte $u_0 = \lim_{z\to z_0} f(z)$ und $v_0 = \lim_{z\to z_0} g(z)$ existieren. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) Es existiert $\lim_{z\to z_0}(f(z) + g(z)) = u_0 + v_0$.

b) Es existiert $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = u_0 v_0$.

c) Es existiert $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = |u_0|$.

d) Es gibt $\lim_{z\to z_0} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} u_0$, $\lim_{z\to z_0} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} u_0$ und $\lim_{z\to z_0} \overline{f(z)} = \overline{u_0}$.

e) Es sei zusätzlich $u_0 \neq 0$. Dann gibt es so einen Radius $r > 0$, dass $|f(z)| \ge \frac{1}{2}|u_0| > 0$ für alle $z \in D$ mit $0 < |z - z_0| \le r$ (bzw. $z \ge r$ für $z_0 = \infty$ bzw. $z \le -r$ für $z_0 = -\infty$) gilt, und es gibt $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{u_0}$, wobei z wie eben gewählt wird.

f) Es seien auch $f, g : D \to \mathbb{R}$ und $f(z) \le g(z)$ für alle $z \in D$. Dann folgt $u_0 \le v_0$.

Analoge Aussagen gelten für rechts- und linksseitige Grenzwerte falls $D \subseteq \mathbb{R}$.

Beweis. Wir zeigen exemplarisch einige Aussagen.

a) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt. Seien $z_n \in D \setminus \{z_0\}$ beliebig mit $z_n \to z_0$ für $n \to \infty$. Laut Voraussetzung konvergieren $f(z_n) \to u_0$ und $g(z_n) \to v_0$. Satz 2.7 liefert dann $f(z_n) + g(z_n) \to u_0 + v_0$ und damit $f(z) + g(z) \to u_0 + v_0$ für $z \to z_0$.

b) Sei ∞ ein uneigentlicher Häufungspunkt von $D \subseteq \mathbb{R}$. Seien $z_n \in D$ beliebig mit $z_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Da $f(z_n) \to u_0$ und $g(z_n) \to v_0$ nach Voraussetzung, zeigt Satz 2.7 den Limes $f(z_n)g(z_n) \to u_0 v_0$. Es folgt $f(z)g(z) \to u_0 v_0$ für $z \to \infty$.

e) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von D. Für den ersten Teil wählen wir $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}|u_0|$. Nach c) und Satz 4.5 gibt es einen Radius $r := \delta_{\varepsilon_0} > 0$ derart, dass für alle $z \in D$ mit $0 < |z - z_0| \le r$ die Abschätzung

$$\tfrac{1}{2}|u_0| \ge \big|\,|f(z)| - |u_0|\,\big| \ge |u_0| - |f(z)|$$

gilt. Diese Ungleichung liefert wie gewünscht $|f(z)| \ge \frac{1}{2}|u_0|$. □

Gelegentlich betrachten wir auch uneigentliche Konvergenz der Bilder $f(z) \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 4.7. Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und z_0 ein Häufungspunkt von D oder (wenn $D \subseteq \mathbb{R}$) ein uneigentlicher Häufungspunkt. Man schreibt $f(z) \to \infty$ für $z \to z_0$, wenn $f(z_n) \to \infty$ für jede Folge $(z_n)_n$ in $D \setminus \{z_0\}$ mit $z_n \to z_0$ für $n \to \infty$ gilt.

Wie in Satz 4.5, kann man diese uneigentliche Konvergenz für $z_0 \in \mathbb{C}$ durch die Bedingung

$$\forall\, K > 0 \quad \exists\, \delta_K > 0 \quad \forall\, z \in D \;\text{ mit }\; 0 < |z - z_0| \le \delta_K : \quad f(z) \ge K. \tag{4.5}$$

charakterisieren, und für $z_0 = \infty$ (bzw. $z_0 = -\infty$) durch

$$\forall\, K > 0 \quad \exists\, L_K > 0 \quad \forall\, z \in D \;\text{ mit }\; z \ge L_K \;(z \le -L_K) : \quad f(z) \ge K. \tag{4.6}$$

Entsprechend geht man für $f(z) \to -\infty$ vor.

Hier lassen sich wie in Satz 3.38 gewisse Grenzwertaussagen zeigen. (Man könnte weitere wie auf Übungsblatt 10 herleiten, man beachte aber die Gegenbeispiele dort und in Bemerkung 3.39.)

a) Sei $|f(z)| \to \infty$ für $z \to z_0$. Dann gibt es einen Radius $r > 0$ wie in Satz 4.6 e) und wir erhalten $1/f(z) \to 0$ für $z \to z_0$ und $z \in D \setminus \{z_0\}$ mit $|z - z_0| \le r$ (bzw. $z \ge r$ für $z_0 = \infty$ bzw. $z \le -r$ für $z_0 = -\infty$).

b) Sei $f(z) \to 0$ für $z \to z_0$ und $f(z) > 0$ (bzw. $f(z) < 0$) für alle $z \in D$. Dann strebt $1/f(z)$ für $z \to z_0$ gegen ∞ (bzw. $-\infty$). ◊

Wir definieren nun einen der zentralen Begriffe der Analysis. Er besagt, dass eine Funktion die Folgenkonvergenz (also die Grundeigenschaft der Analysis) erhält.

Definition 4.8. *Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in D$ und $f : D \to \mathbb{C}$. Die Funktion f heißt* stetig in z_0, *wenn*

für **jede** *Folge $(z_n)_n$ in $D \setminus \{z_0\}$ mit $z_n \to z_0$ auch $f(z_n) \to f(z_0)$ für $n \to \infty$ gilt.*

Wenn f in jedem $z_0 \in D$ stetig ist, dann heißt f stetig (auf D). *Man schreibt $C(D) = \{f : D \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist stetig}\}$ und $C(D, \mathbb{R}) = \{f : D \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$.*

Bemerkung 4.9. Seien $f : D \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$. Wenn z_0 ein Häufungspunkt von D ist, dann ist gemäß Definition 4.3 die Stetigkeit von f an z_0 äquivalent zu

$$\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Wenn z_0 isoliert in D ist, dann gibt es keine Folge $(z_n)_{n \ge 1}$ wie in Definition 4.8. Dies verstehen wir so, dass f in isolierten Stellen z_0 immer stetig ist.

Wenn f bei $z_0 \in D$ stetig ist, konvergiert also $f(z_n) \to f(z_0)$ für alle $(z_n)_n$ in D mit $z_n \to z_0$. (Für isolierte z_0 muss dabei $z_n = z_0$ ab einen Index n_0 gelten.) $\Diamond$

Wir prüfen in einigen Beispielen die Stetigkeit direkt nach.

Beispiel 4.10. a) Sei $c \in \mathbb{R}$ fest. Dann sind die Funktionen $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = c$ und $g(z) = z$ stetig, denn wir erhalten $f(z_n) - f(z_0) = 0$ und $g(z_n) - g(z_0) = z_n - z_0 \to 0$ für $n \to \infty$ und jede Folge $(z_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{C}$ mit $z_n \to z_0$.

b) Die Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \sqrt{x}$, ist stetig.

Beweis. Sei $x_n \to x_0$ in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ für $n \to \infty$. Sei zuerst $x_0 > 0$. Dann gibt es wie in Satz 2.7 einen Index $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \geq x_0/4 > 0$ für alle $n \geq N$. Für solche n folgt

$$|f(x_n) - f(x_0)| = \left| \left(\sqrt{x_n} - \sqrt{x_0}\right) \frac{\sqrt{x_n} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x_0}} \right| = \frac{|x_n - x_0|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x_0}} \leq \frac{|x_n - x_0|}{\frac{1}{2}\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} \longrightarrow 0.$$

Für $x_0 = 0$ versagt dieser Schluss offenbar, und wir gehen direkter vor. Sei $\varepsilon > 0$. Setze $\eta = \varepsilon^2 > 0$. Dann gibt es eine natürliche Zahl N_η mit $x_n \leq \eta$ und damit $\sqrt{x_n} \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N_\eta =: N_\varepsilon$. Somit ist f auch bei $x_0 = 0$ stetig. $\square$

c) Die Funktion $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in jedem $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig und in $x = 0$ unstetig. Für $x \neq 0$ sieht man dass wie in a); für $x = 0$ zeigt Beispiel 4.4 die Nichtexistenz des Grenzwerts $\lim_{x\to 0} f(x)$. Auch die Funktion $g = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} + \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist bei $x = 0$ unstetig. Hier konvergiert $f(x) = 1$ für $x \to 0$ gegen 1 (wobei $x \neq 0$), aber es gilt $f(0) = 0$.

d) Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{x}$, ist stetig: Laut Satz 2.7 folgt aus $x_n \to x_0$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stets die Konvergenz von $1/x_n$ gegen $1/x_0$ für $n \to \infty$.

e) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$ und $f(x) = 1$ für $x \leq 0$ gegeben. Die Funktion ist in $x = 0$ unstetig, da für $x_n = 1/n \to 0$ die Folge $(f(x_n))_{n\geq 1} = (n)_n$ divergiert. Hier gilt $f(x) = 1 = f(0)$ für $x < 0$. $\Diamond$

Um die Rechenregeln für Stetigkeit zu formulieren, führen wir eine Reihe von Operationen für Funktionen ein.

Definition 4.11. *Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Man definiert die Funktionen $f + g$, αf, fg, $|f|$, $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $\overline{f}$ von D nach $\mathbb{C}$ sowie $1/f : \hat{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \neq 0\} \to \mathbb{C}$ (wobei $f \neq 0$) punktweise, also z.B. durch $f + g : D \to \mathbb{C}$; $(f + g)(z) = f(z) + g(z)$. Wir schreiben auch 0 für die Nullabbildung $D \to \mathbb{C}$; $z \mapsto 0$.*

Sei $M \subseteq D$. Das Bild *von M unter f ist durch $f(M) = \{w \in \mathbb{C} \mid \exists z \in D$ mit $f(z) = w\}$ gegeben. Sei ferner $D_1 \subseteq \mathbb{C}$ eine Obermenge von $f(D)$ und $h : D_1 \to \mathbb{C}$. Die* Komposition *von h und f ist die Abbildung $h \circ f : D \to \mathbb{C}$; $(h \circ f)(z) = h(f(z))$, vergleiche Definition 1.21.*

Diese Operationen erhalten die Stetigkeit aufgrund schon bekannter Resultate. Der nächste Satz erlaubt es oft, Stetigkeit komplizierter Funktionen zu folgern, indem man sie aus einfacheren zusammensetzt.

Satz 4.12. *Es seien* $D \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in D$ *und* $\alpha \in \mathbb{C}$, *sowie* $f, g : D \to \mathbb{C}$ *stetig in* z_0 *und* $h : f(D) \to \mathbb{C}$ *stetig in* $f(z_0)$. *Dann sind auch die Funktionen* $f + g$, αf, fg, $|f|$, $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $\overline{f}$, $h \circ f : D \to \mathbb{C}$ *stetig in* z_0. *Wenn* $f(z_0) \neq 0$, *dann gibt es so einen Radius* $r > 0$, *dass* $f(z) \neq 0$ *für alle* $z \in \tilde{D} := D \cap \overline{B}(z_0, r)$ *gilt. Die Funktion* $1/f : \tilde{D} \to \mathbb{C}$ *ist in* z_0 *stetig. Insbesondere ist* $C(D)$ *ein Vektorraum.*[1]

Beweis. Sei $z_n \to z_0$ in D für $n \to \infty$. Nach Voraussetzung erhalten wir $f(z_n) \to f(z_0)$ und $g(z_n) \to g(z_0)$, und daraus $h(f(z_n)) \to h(f(z_0))$. Alle Aussagen folgen dann aus aus Satz 4.6 und Bemerkung 4.9. □

Beispiel 4.13. a) Nach Satz 4.12 und Beispiel 4.10 sind Polynome stetig auf $\mathbb{C}$.

b) Rationale Funktionen $f = p/q$ sind auf $D := \{z \in \mathbb{C} \,|\, q(z) \neq 0\}$ stetig. Hierbei sind p und q Polynome mit $q \neq 0$. Diese Aussage folgt aus a) und Satz 4.12.

c) Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$; $f(z) = \sqrt{1 + 2|z|}$, ist stetig.

Beweis. Wir schreiben $f = w \circ \ell \circ b$ als Komposition der Abbildungen $b : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$; $b(z) = |z|$, $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\ell(x) = 1 + 2x$, und $w : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$; $w(y) = \sqrt{y}$. Diese sind nach Satz 4.12, Teil a) und Beispiel 4.10 stetig, und es gilt $\ell(|z|) \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Also folgt die Stetigkeit von f aus Satz 4.12. □

Der nächste Hauptsatz sichert insbesondere die Stetigkeit von exp, sin und cos.

Theorem 4.14. *Es sei* $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $\rho > 0$. *Dann ist* $f : B(0, \rho) \to \mathbb{C}$; $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, *stetig, wobei* $B(0, \infty) := \mathbb{C}$ *ist.*

Dieses Theorem wird in Korollar 4.44 bewiesen. Vorher verwenden wir es nur am Rande in Beispielen.

Der folgende Satz charakterisiert Stetigkeit in einem Punkt z_0 dadurch, dass es für jede Kugel $\overline{B}$ um den Bildpunkt $f(z_0)$ eine Kugel $\overline{B}_0$ um z_0 im Urbildbereich gibt, die durch f in $\overline{B}$ hinein abgebildet wird. Dadurch wird das Abbildungsverhalten einer stetigen Funktion f genauer als durch Definition 4.8 beschrieben. Diese *ε-δ-Charakterisierung* wird in Analysis 2 vertieft.

Satz 4.15. *Seien* $D \subseteq \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ *und* $z_0 \in D$. *Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

a) f *ist stetig in* z_0.
b) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall\, z \in D \cap \overline{B}(z_0, \delta_\varepsilon) : \quad |f(z) - f(z_0)| \leq \varepsilon$.
c) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0 : \quad f(D \cap \overline{B}(z_0, \delta_\varepsilon)) \subseteq \overline{B}(f(z_0), \varepsilon)$.

Beweis. Die Äquivalenz der Aussagen a) und b) ist eine Konsequenz von Satz 4.5 und (für isolierte z_0) den Bemerkungen 4.2 und 4.9, während die von b) und c) aus den Definitionen von $f(M)$ und von $\overline{B}(z_0, \delta_\varepsilon)$ folgt. □

Folglich ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ genau dann stetig auf D, wenn sie

$$\forall\, z_0 \in D,\ \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_{z_0,\varepsilon} > 0 \quad \forall\, z \in D \cap \overline{B}(z_0, \delta_{z_0,\varepsilon}) : \quad |f(z) - f(z_0)| \leq \varepsilon \tag{4.7}$$

[1]Diesen Begriff definiert man in der Linearen Algebra.

erfüllt. Hier kann der Radius $\delta_{z_0,\varepsilon}$ sehr wohl von z_0 abhängen, siehe Beispiel 4.17. Etwa bei der Konstruktion des Integrals in Analysis 2 müssen wir so ein Verhalten aber ausschließen. Das führt uns auf den folgenden Begriff.

Definition 4.16. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt* gleichmäßig stetig, *wenn*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall\, z, w \in D \text{ mit } |z - w| \le \delta_\varepsilon \quad \text{gilt} \quad |f(z) - f(w)| \le \varepsilon. \tag{4.8}$$

Im Vergleich zu (4.7) sind '$\forall\, w \in D$' und '$\exists\, \delta_\varepsilon > 0$' in (4.8) vertauscht worden. Das verstärkt die Eigenschaft, d.h., eine gleichmäßig stetige Funktion ist auch stetig auf D. Wir präsentieren gleich zwei typische Beispiele stetiger, aber nicht gleichmäßig stetiger Funktionen. In solchen Fällen kann man in (4.7) diese Quantoren nicht vertauschen. Theorem 4.19 liefert aber leicht nachzuprüfende Bedingungen, unter denen eine stetige Funktion automatisch gleichmäßig stetig ist.

Beispiel 4.17. a) Die stetige Funktion $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{x}$, ist nicht gleichmäßig stetig.

Beweis. Sei $\delta > 0$ beliebig. Wähle $x \in (0, 1)$ mit $x \le 2\delta$ und $y = \frac{x}{2} \in (0, 1)$. Dann gelten $|x - y| = \frac{x}{2} \le \delta$ und $|f(x) - f(y)| = \frac{1}{x} > 1$. Also ist (4.8) verletzt. □

b) Die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$, ist nicht gleichmäßig stetig.

Beweis. Sei $\delta > 0$ beliebig. Wähle $x = \frac{1}{\delta} + \delta$ und $y = \frac{1}{\delta}$ in $\mathbb{R}$. Wir erhalten $|x - y| = \delta$ und $|f(x) - f(y)| = 2 + \delta^2 > 2$. Dies widerspricht (4.8) mit $\varepsilon = 2$. □

4.2. Hauptsätze über stetige Funktionen

Der nächste Begriff spielt in den folgenden Sätzen eine wichtige Rolle. Er besagt, dass Grenzwerte nicht aus einer Menge herausführen können, und wird in Analysis 2 genauer untersucht.

Definition 4.18. *Eine Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt* abgeschlossen, *wenn aus $z_n \in D$ für $n \in \mathbb{N}$ und $z_n \to z$ in $\mathbb{C}$ für $n \to \infty$ stets $z \in D$ folgt.*

Abgeschlossene Intervalle wie $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \ge a\}$ und Kugeln $\overline{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| \le r\}$ sind wegen der Sätze 2.10 und 2.9 auch im Sinne von Definition 4.18 abgeschlossen. Die Menge $D = (0, 1]$ ist nicht abgeschlossen, da $\frac{1}{n} \in D$ gegen $0 \notin D$ strebt. Zunächst geben wir einfache Bedingungen für gleichmäßige Stetigkeit an. Dies beruht wie anderes in diesem Abschnitt auf dem Satz von Bolzano–Weierstraß, der benötigte Konvergenzeigenschaften in beschränkten Mengen liefert, z.B. um einen Widerspruch in einem indirekten Beweis zu erzielen.

Theorem 4.19. *Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen und beschränkt, sowie $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Wir nehmen an, f wäre nicht gleichmäßig stetig. Dann erhalten wir aus (4.8) einen Radius $\varepsilon_0 > 0$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ Zahlen $z_n, w_n \in D$ mit $|z_n - w_n| \le 1/n$ derart, dass $|f(z_n) - f(w_n)| > \varepsilon_0$ ist. Wegen der Beschränktheit von D

liefert Theorem 2.24 Teilfolgen $(z_{n_l})_l$ und $(w_{n_{l_j}})_j$ mit Grenzwerten z und w. Da D abgeschlossen ist, liegen z und w auch in D. Aus der Abschätzung

$$|z-w| \leq |z-z_{n_{l_j}}| + |z_{n_{l_j}} - w_{n_{l_j}}| + |w_{n_{l_j}} - w| \leq |z-z_{n_{l_j}}| + \frac{1}{n_{l_j}} + |w_{n_{l_j}} - w|$$

folgt im Grenzwert $j \to \infty$, dass $|z-w| = 0$ und somit z gleich w ist. Die Stetigkeit von f impliziert nun die Konvergenz von $f(z_{n_{l_j}}) - f(w_{n_{l_j}})$ gegen $f(z) - f(w) = 0$ für $j \to \infty$. Dies widerspricht aber der obigen Ungleichung $|f(z_n) - f(w_n)| > \varepsilon_0$ für alle n, sodass f gleichmäßig stetig ist. □

Also sind Polynome, exp, sin, cos und rationale Funktionen p/q auf abgeschlossenen Kugeln D in $\mathbb{C}$ bzw. in $D_0 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, q(z) \neq 0\}$ und die Wurzelfunktion auf Intervallen $D = [a,b] \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ gleichmäßig stetig. (Diese Funktionen sind laut des vorherigen Abschnitts sogar auf $\mathbb{C}$, D_0 bzw. $\mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig und damit auch auf den abgeschlossenen und beschränkten Mengen D.) Beispiel 4.17 zeigt, dass man in Theorem 4.19 nicht auf die Voraussetzungen an D verzichten kann.

Wir werden im nächsten Satz unter anderen sehen, dass gleichmäßig stetige Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ Grenzwerte bei Häufungspunkten $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ von D haben. In diesem Fall ist es sinnvoll, die Funktion f auf einen größeren Definitionsbereich (hier $\tilde{D} = D \cup \{z_0\}$) auszudehnen. Primär im Hinblick auf spätere Semester formulieren wir die entsprechenden Begriffe allgemeiner als wir sie aktuell benötigen.

Definition 4.20. *Es seien $D \subseteq \tilde{D} \subseteq \mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$. Man nennt jede Funktion $\tilde{f} : \tilde{D} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \tilde{f}(z)$ für alle $z \in D$ eine* Fortsetzung *von f (auf $\tilde{D}$). Weiter heißt dann f* Einschränkung *von $\tilde{f}$ (auf D) und man schreibt $f = \tilde{f}\restriction_{\tilde{D}}$.*

Bemerkung 4.21. Wir betrachten im Folgenden vor allem den Fall $\tilde{D} = D \cup \{z_0\}$ für einen Häufungspunkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ von D. Die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ besitze in dieser Situation den Grenzwert $f(z) \to w_0$ für $z \to z_0$. Dann ist ihre Fortsetzung

$$\tilde{f} : \tilde{D} \to \mathbb{C}, \qquad \tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ w_0, & z = z_0, \end{cases}$$

in z_0 stetig. Sie ist auf $\tilde{D}$ stetig, wenn f auf D stetig ist. ◊

Wir geben zuerst zwei einfache Beispiele an.

Beispiel 4.22. a) Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Dann wird f durch

$$\tilde{f}(x) = \left.\begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}, & x \neq 1, \\ 2, & x = 1, \end{cases}\right\} = x+1$$

stetig in $x = 1$ fortgesetzt.

b) Sei $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{x}$, und $g : D \to \mathbb{R}$; $g(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$, sind in $x = 0$ nicht stetig fortsetzbar, da ihre Grenzwerte für $x \to 0$

nicht existieren. (Siehe Beispiel 4.4.) Eine unstetige Fortsetzung von f wäre etwa die Abbildung $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\tilde{f}(x) = \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ und $\tilde{f}(0) = 1$. $\Diamond$

Als nächstes sehen wir, dass stetige Fortsetzbarkeit und gleichmäßige Stetigkeit eng zusammenhängen.

Satz 4.23. *Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ ein Häufungspunkt von D, $\tilde{D} := D \cup \{z_0\}$ und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig.*

a) Sei f gleichmäßig stetig. Dann hat f genau eine gleichmäßige stetige Fortsetzung $\tilde{f} : \tilde{D} \to \mathbb{C}$.

b) Sei $\tilde{D}$ abgeschlossen und beschränkt und f habe eine stetige Fortsetzung $\tilde{f} : \tilde{D} \to \mathbb{C}$. Dann ist f auf D gleichmäßig stetig.

Beweis. a) Sei f gleichmäßig stetig. Wir konstruieren zuerst mittels Cauchyfolgen den Grenzwert von $f(z)$ für $z \to z_0$ und zeigen dann die gleichmäßige Stetigkeit der wie in Bemerkung 4.21 erklärten Fortsetzung $\tilde{f}$.

1) Da z_0 ein Häufungspunkt ist, existieren $z_n \in D$ mit $z_n \to z_0$ für $n \to \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir haben den Radius $\delta_\varepsilon > 0$ aus (4.8). Wegen der Folgenkonvergenz gibt es einen Index $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|z_n - z_0| \leq \frac{1}{2}\delta_\varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$. Damit berechnen wir

$$|z_n - z_m| \leq |z_n - z_0| + |z_0 - z_m| \leq \delta_\varepsilon$$

für alle $n, m \geq N_\varepsilon$. Für diese n und m impliziert (4.8) die Ungleichung

$$|f(z_n) - f(z_m)| \leq \varepsilon,$$

sodass $(f(z_n))_{n\geq 1}$ eine Cauchyfolge ist. (In dieser Ungleichung laufen n *und* m gegen ∞, sodass man wirklich gleichmäßige Stetigkeit benötigt; vergleiche Beispiel 4.17.) Theorem 2.27 liefert nun den Limes $f(z_n) \to w_0$ für $n \to \infty$. Mit $m \to \infty$ folgt $|f(z_n) - w_0| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$ aus der abgesetzten Ungleichung.

2) Der Limes w_0 in Schritt 1) könnte von $(z_n)_n$ abhängen. Um dies ausschließen, betrachten wir auch $u_n \in D$ mit $u_n \to z_0$ für $n \to \infty$. Es gibt einen Index $\tilde{N}_\varepsilon \geq N_\varepsilon$ mit $|u_n - z_0| \leq \frac{1}{2}\delta_\varepsilon$ für alle $n \geq \tilde{N}_\varepsilon$. Sei $n \geq \tilde{N}_\varepsilon$. Mit Schritt 1) folgt

$$|u_n - z_n| \leq |u_n - z_0| + |z_0 - z_n| \leq \delta_\varepsilon.$$

Somit liefert (4.8) die Abschätzung $|f(u_n) - f(z_n)| \leq \varepsilon$. Wir schließen daraus und aus 1), dass auch

$$|f(u_n) - w_0| \leq |f(u_n) - f(z_n)| + |f(z_n) - w_0| \leq 2\varepsilon$$

für alle $n \geq \tilde{N}_\varepsilon$ gilt. Also konvergiert $f(z)$ für $z \to z_0$ gegen w_0.

3) Wir definieren die stetige Fortsetzung $\tilde{f} : \tilde{D} \to \mathbb{C}$ wie in Bemerkung 4.21. Sie ist eindeutig bestimmt, da $f(z) \to w_0$ für $z \to z_0$ gelten muss. Um ihre gleichmäßige Stetigkeit zu beweisen, verwenden wir für gegebenes $\varepsilon > 0$ den Abstand $\delta_\varepsilon > 0$ aus (4.8) für f. Seien $z, w \in \tilde{D}$ mit $|z - w| \leq \frac{1}{2}\delta_\varepsilon$.

Für $z, w \in D$ folgt sofort $|\tilde{f}(z) - \tilde{f}(w)| = |f(z) - f(w)| \leq \varepsilon$ aus (4.8). Für $z = w = z_0$ gilt offenkundig $\tilde{f}(z) - \tilde{f}(w) = 0$. Im verbeibenden Fall seien etwa

$z = z_0$ und $w \in D$. Um wieder (4.8) auszunutzen, wählen wir wie in Schritt 1) eine Zahl $u \in D$ mit $|u - z_0| \le \frac{1}{2}\delta_\varepsilon$ und $|f(u) - w_0| \le \varepsilon$. Damit erhalten wir

$$|u - w| \le |u - z_0| + |z_0 - w| \le \delta_\varepsilon,$$

sodass $|f(u) - f(w)| \le \varepsilon$ aus (4.8) folgt. Zusammen ergibt sich in diesem Fall

$$|\tilde{f}(z_0) - \tilde{f}(w)| \le |w_0 - f(u)| + |f(u) - f(w)| \le 2\varepsilon.$$

b) Die Funktion $\tilde{f}$ ist nach den Voraussetzungen in b) und Theorem 4.19 gleichmäßig stetig auf $\tilde{D}$ und damit auch ihre Einschränkung f auf D. □

Wir untersuchen nun allgemeine Eigenschaften der Bilder stetiger $f : D \to \mathbb{R}$. Zuerst zeigen wir, dass für abgeschlossenes und beschränktes D die Funktion f beschränkt ist und ihr Minimum und Maximum annimmt. Dabei nennen wir f (*nach oben* bzw. *unten*) *beschränkt*, wenn dies auf ihr Bild $f(D) = \{f(z) \,|\, z \in D\}$ zutrifft. Der folgende *Satz vom Maximum* wird mit einem analogen Beweis in Analysis 2 deutlich verallgemeinert werden. In dieser Form ist er dann eines der grundlegenden Resultate der Analysis und ihrer Anwendungen.

THEOREM 4.24. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen und beschränkt, sowie $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es* Maximal- *bzw.* Minimalstellen *$z_\pm \in D$ mit $f(z_+) = \max\{f(z) \,|\, z \in D\} =: \max_D f$ und $f(z_-) = \min\{f(z) \,|\, z \in D\} =: \min_D f$. Insbesondere ist $|f(z)| \le \max\{|f(z_+)|, |f(z_-)|\}$ für alle $z \in D$; f ist also beschränkt.*

BEWEIS. Wir betrachten nur Maxima. Minima kann man mittels der Funktion $-f$ und Bemerkung 1.15 e) behandeln. Zuerst gewinnen wir ein Supremum des Bildes von f und zeigen dann, dass es im Bild von f liegt.

1) Wir nehmen zuerst an, f wäre nicht nach oben beschränkt. Somit existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl $z_n \in D$ mit $f(z_n) \ge n$. Aufgrund der Beschränktheit von D liefert Theorem 2.24 eine Teilfolge $(z_{n_j})_j$ mit Grenzwert z_0. Da D abgeschlossen ist, liegt auch z_0 in D. Die Stetigkeit von f impliziert nun, dass $f(z_{n_j}) \to f(z_0)$ für $j \to \infty$ gilt, was der Annahme widerspricht. Somit ist f nach oben beschränkt und Definition 1.17 liefert die reelle Zahl $y_+ := \sup_{z \in D} f(z)$.

2) Nach Satz 1.18 gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Zahl $u_k \in D$ mit $y_+ - 1/k < f(u_k) \le y_+$. Satz 2.10 zeigt dann, dass $f(u_k)$ für $k \to \infty$ gegen y_+ strebt. Wie in Schritt 1) erhalten wir ferner eine Teilfolge (u_{k_l}), die gegen einen Punkt $z_+ \in D$ konvergiert. Da f stetig ist, folgt $f(z_+) = \lim_{l \to \infty} f(u_{k_l}) = y_+$. □

Man schreibt hier auch $z_+ = \arg\max_D f$ und $z_- = \arg\min_D f$. Für $D \subseteq \mathbb{R}$ werden die Zahlen $z_\pm$ in Abschnitt 5.2 in gewissen Fällen berechnet. Dort und im Folgenden diskutieren wir auch die Eindeutigkeit. In der nächsten Folgerung verwandelt das obige Theorem punktweise Abschätzungen auf D in globale. Beide Resultate kann man auch auf die Funktion $|f|$ für ein stetiges $f : D \to \mathbb{C}$ anwenden, wenn D abgeschlossen und beschränkt ist. Wir betonen, dass diese Eigenschaften uns wie in Theorem 4.19 Gleichmäßigkeit schenken.

Korollar 4.25. *Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen und beschränkt, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $f(z) > 0$ für alle $z \in D$. Dann gilt $f(z) \geq f(z_-) > 0$ für alle $z \in D$ und die Zahl $z_- \in D$ aus Theorem 4.24.*

Die obigen Aussagen sind im Allgemeinen auf unbeschränkten oder nicht abgeschlossenen Definitionsbereichen D falsch.

Beispiel 4.26. Die Funktionen $f : (0,1] \to \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{x}$, und $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$; $g(x) = x$, sind stetig aber unbeschränkt. Weiter ist $h : [1,\infty) \to \mathbb{R}$; $h(x) = \frac{1}{x}$, stetig und erfüllt $h(x) > 0$ für alle $x \in [1,\infty)$. Trotzdem ist $\inf_{x\geq 1} h(x) = 0$. Auch $\tilde{g} : (0,1] \to \mathbb{R}$; $\tilde{g}(x) = x$, ist stetig mit Infimum 0, obwohl $\tilde{g}(x) > 0$ für $x > 0$ gilt. ◊

In den folgenden Sätzen beschränken wir uns auf reelle Funktionen, und nutzen die Ordnungstruktur wesentlich auch im Urbild aus. Funktionen können Lücken im Bild aufweisen. Das kann bei Unstetigkeiten geschehen, wie z.B. bei $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, oder wenn D keine Intervall ist, wie bei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$. Wir sehen aber gleich, dass für stetige Funktionen f auf Intervallen das Bild wieder ein Intervall ist und somit alleine durch die Endpunkte bestimmt wird. Dies erlaubt es z.B. alle $y \in \mathbb{R}$ zu finden, für die die Gleichung $y = f(x)$ eine Lösung x besitzt. Im folgenden *Zwischenwertsatz* betrachten wir zuerst den einfachsten Fall abgeschlossener und beschränkter Intervalle $[a,b]$.

Theorem 4.27. *Sei $f : I := [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann erhalten wir $f([a,b]) = [\min_I f, \max_I f] =: J$. Also gibt es für jedes $y \in J$ ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = y$.*

Beweis. Nach Theorem 4.24 existieren Zahlen $x_\pm \in I$ mit $f(x_-) = \min_I f$ und $f(x_+) = \max_I f$. Offenbar ist $f(I)$ in J enthalten. Sei nun umgekehrt $y_0 \in J$. Wir konstruieren ein Urbild von y_0 unter f durch das 'Zweiteilungsverfahren'.

Es gilt $f(x_-) \leq y_0 \leq f(x_+)$. Sei $x_- \leq x_+$. (Andernfalls betrachte $-f$.) Wir definieren $a_1 := x_-$, $b_1 := x_+$ und den Mittelwert $c_1 := (a_1 + b_1)/2$. Wenn $f(c_1) \geq y_0$ ist, liegt y_0 in $[f(x_-), f(c_1)]$. Somit wählen wir hier für das nächste Intervall die Randpunkte $a_2 := a_1$ und $b_2 := c_1$. Im Falle $f(c_1) < y_0$ setzen wir analog $a_2 := c_1$ und $b_2 := b_1$. Es gelten somit in beiden Fällen $a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1$, $b_2 - a_2 = (b_1 - a_1)/2$ und $f(a_2) \leq y_0 \leq f(b_2)$. Iterativ erhalten wir auf diese Weise für jedes $n \in \mathbb{N}$ Zahlen mit

$$a_1 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b_1, \quad b_n - a_n = 2^{1-n}(b_1 - a_1), \quad f(a_n) \leq y_0 \leq f(b_n).$$

Wegen der Monotonie und Beschränktheit liefert Theorem 2.14 die Grenzwerte $a_n \to \alpha$ und $b_n \to \beta$ in $[a_1, b_1] \subseteq [a,b]$ für $n \to \infty$. Aus der abgesetzten Gleichung folgt dann $\beta - \alpha = 0$ und damit $\alpha = \beta =: x_0$. Da f stetig ist, impliziert Satz 2.10 schließlich $y_0 = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$. □

Korollar 4.28 (Nullstellensatz). *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a)f(b) \leq 0$. Dann gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = 0$.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $f(a) \leq 0 \leq f(b)$ oder $f(b) \leq 0 \leq f(a)$, woraus die Ungleichungen $\min_{[a,b]} f \leq 0 \leq \max_{[a,b]} f$ folgen. Theorem 4.27 zeigt dann die Behauptung. $\square$

Wir verallgemeinern nun den Zwischenwertsatz auf beliebige Intervalle. Für $A_j \subseteq M$ mit j aus einer Menge J haben wir Vereinigungs- und Schnittmenge

$$\bigcup_{j\in J} A_j := \big\{x \in M \,|\, \exists\, i \in J : x \in A_i\big\}, \qquad \bigcap_{j\in J} A_j := \big\{x \in M \,|\, \forall\, j \in J : x \in A_j\big\}.$$

Korollar 4.29 (Intervallsatz). *Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I)$ ein Intervall.*

Beweis. Man findet Zahlen $a_{n+1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n+1}$ mit $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$, z.B. $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = n$ für $I = \mathbb{R}_+$. Nach Theorem 4.27 ist $J_n = f([a_n, b_n])$ für alle $n \in \mathbb{N}$ von der Form $[m_n, M_n]$ mit fallenden m_n und wachsenden M_n. Weiter gilt

$$f(I) = \Big\{f(x) \,\Big|\, x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]\Big\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big\{f(x) \,|\, x \in [a_n, b_n]\big\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n.$$

Somit ist $f(I)$ ein Intervall mit den Randpunkten $\inf_n m_n$ und $\sup_n M_n$ in $\overline{\mathbb{R}}$. $\square$

Wir nutzen nun die obigen Sätze aus, um das Bild einer Potenzfunktion zu bestimmen und eine nichtlineare Gleichung zu lösen. Dies gelingt hier sehr einfach und ist (für reelle Funktionen) durchaus typisch. Allerdings findet man keine 'geschlossene Formel' für diese Lösung, was in der Tat nur selten gelingt. Man kann aber weitere Eigenschaften der Lösung studieren (wie unten ihre Eindeutigkeit) oder versuchen, sie zu approximieren (wie etwa in Theorem 5.42).

Beispiel 4.30. a) Sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^k$, für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $f(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Beweis. Nach Beispiel 4.13 ist f stetig. Also ist $f(\mathbb{R}_{\geq 0})$ ein Intervall nach Korollar 4.29. Weiter gelten $f(0) = 0$, $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$ und $f(n) = n^k \to \infty$ für $n \to \infty$. Daraus folgt $f(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$. $\square$

b) Es gibt ein $x \in (0, 1)$ mit $\exp(-x) = x$.
Beweis. Wir verwenden die stetige Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$; $f(x) = x - \exp(-x)$. Da $f(0) = -1 < 0$ und $f(1) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} > 0$ sind, liefert Korollar 4.28 die Aussage. $\square$

Injektive Funktionen f besitzen genau ein Lösung der Gleichung $f(x) = y$ für ein gegebenes y in ihrem Bild. Insbesondere sind Null- oder Maximalstellen eindeutig bestimmt, und f besitzt auf ihrem Bild eine Umkehrfunktion. Die nun behandelten strikt monotonen Funktionen sind injektiv. Umgekehrt ist laut Bemerkung 4.33 eine injektive stetige Funkton $F : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall schon strikt monoton.

Definition 4.31. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt* (strikt) wachsend, *wenn $f(x) \leq f(y)$ ($f(x) < f(y)$) für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt, und* (strikt) fallend, *wenn $f(x) \geq f(y)$ ($f(x) > f(y)$) für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt. Weiter ist f* (strikt) monoton, *wenn f (strikt) wächst oder (strikt) fällt.*

Man schreibt gelegentlich $f \nearrow$ ($f \uparrow$) für (strikt) wachsende f und $f \searrow$ ($f \downarrow$) für (strikt) fallende f. Wir illustrieren die Begriffe mit elementaren Beispielen.

Beispiel 4.32. Es seien $D_+ = \mathbb{R}_+$, $D_- = \mathbb{R}_-$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$. Dann fällt f strikt auf D_+ und auf D_-, da $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ für $0 < x < y$ bzw. $x < y < 0$ gilt. Hingegen ist auf D wegen $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ für $x < 0 < y$ nicht monoton. Ferner wächst $g = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, aber nicht strikt, während $h : [0,2] \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = x$ für $x \in [0,1)$ und $h(x) = x+1$ für $x \in [1,2]$ strikt wächst. Die Funktionen g und h sind unstetig, vergleiche Beispiel 4.10. $\Diamond$

Wir diskutieren einfache, aber wichtige Eigenschaften monotoner Funktionen.

Bemerkung 4.33. Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$.

a) Die Funktion f ist genau dann (strikt) wachsend, wenn $-f$ (strikt) fällt.

b) Sei f strikt monoton. Dann ist die Funktion f injektiv, sodass sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : \tilde{D} := f(D) \to \mathbb{R}$; $f^{-1}(y) = x$, besitzt (wobei $f(x) = y$). Dabei gilt $f^{-1}(\tilde{D}) = D$. Somit hat hier die Gleichung $f(x) = y$ für gegebenes $y \in f(D)$ genau eine Lösung, nämlich $x = f^{-1}(y) \in D$. Ferner wächst (bzw. fällt) f^{-1} strikt, wenn f strikt wächst (bzw. fällt).

Beweis. Wir müssen nur die letzte Behauptung zeigen. Sei f strikt wachsend. Wähle $y_1, y_2 \in f(D)$ mit $y_1 < y_2$. Dann existieren $x_j \in D$ mit $f(x_j) = y_j$ für $j \in \{1,2\}$. Wir nehmen an, es gälte $x_1 \geq x_2$. Da f wächst, folgt dann der Widerspruch $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$. Also wächst f^{-1} strikt. Man behandelt strikt fallende Funktionen entsprechend. $\square$

c) Eine injektive stetige Funktion auf einem Intervall I ist schon strikt monoton. (In Beispiel 4.32 ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, stetig und injektiv, aber nicht monoton.)

Beweis. Wenn f nicht strikt monoton wäre, gäbe es zum Beispiel Zahlen $x_1 < x_2 < x_3$ in I mit $f(x_1) \leq f(x_2)$ und $f(x_2) \geq f(x_3)$. (Den anderen Fall behandelt man analog.) Wegen Injektivität gelten hier '$<$' und '$>$'. Also gibt es eine Zahl y zwischen $\max\{f(x_1), f(x_3)\}$ und $f(x_2)$. Der Zwischenwertsatz auf $[x_1, x_2]$ bzw. $[x_2, x_3]$ liefert nun Zahlen $x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < x_3$ mit $f(\xi_1) = y = f(\xi_2)$. Dies widerspricht der Injektivität von f. $\square$

d) Im Allgemeinen erbt die Umkehrfunktion nicht die Stetigkeit von f. Seien zum Beispiel $D = [0,1) \cup [2,3]$ und $y = f(x) = x$ für $x \in [0,1)$ und $y = f(x) = x - 1$ für $x \in [2,3]$. Dann ist f strikt wachsend und stetig, aber $f^{-1} : [0,2] \to \mathbb{R}$ ist unstetig, da $x = f^{-1}(y) = y$ für $y \in [0,1)$ und $x = f^{-1}(y) = y + 1$ für $y \in [1,2]$ gelten. $\Diamond$

Wir zeigen nun, dass auf Intervallen I die Umkehrfunktion eines strikt monotonen $f : I \to \mathbb{R}$ stetig ist, ohne dass man dies für f fordern müsste.

Theorem 4.34. *Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ strikt wachsend (bzw. fallend). Dann ist $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ strikt wachsend (bzw. fallend) und stetig.*

Beweis. Nach Bemerkung 4.33 ist nur die Stetigkeit zu zeigen. Sei etwa f strikt wachsend. (Sonst betrachte $-f$.)

Sei $y_0 \in f(I)$. Dann existiert eine Zahl x_0 in I mit $f(x_0) = y_0$. Wir nehmen zunächst an, dass x_0 kein Randpunkt von I ist. Dann existiert ein $r > 0$ mit $[x_0 - r, x_0 + r] \subseteq I$. Sei $\varepsilon \in (0, r]$. Da f strikt wächst, gelten die Ungleichungen $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) = y_0 < f(x_0 + \varepsilon)$. Es gibt also ein $\delta_\varepsilon > 0$ mit

$$f(x_0 - \varepsilon) \leq y_0 - \delta_\varepsilon < y_0 + \delta_\varepsilon \leq f(x_0 + \varepsilon).$$

Sei nun $y \in f(I)$ mit $|y - y_0| \leq \delta_\varepsilon$. Dann liegt y in $[f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)]$. Da auch f^{-1} wächst, erhalten wir

$$x_0 - \varepsilon = f^{-1}(f(x_0 - \varepsilon)) \leq f^{-1}(y) \leq f^{-1}(f(x_0 + \varepsilon)) = x_0 + \varepsilon.$$

Aus diesen Abschätzungen folgt

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |f^{-1}(y) - x_0| \leq \varepsilon$$

für alle $y \in f(I)$ mit $|y - y_0| \leq \delta_\varepsilon$. Satz 4.15 zeigt nun die Stetigkeit.

Es sei x_0 der linke Randpunkt von I. Wegen der Monotonie ist dann auch y_0 das Minimum von $f(I)$. Man ersetzt nun oben $x_0 - r$ und $x_0 - \varepsilon$ durch x_0, sowie $y_0 - \delta_\varepsilon$ durch y_0. Das Resultat folgt dann genauso. Entsprechend behandelt man einen rechten Randpunkt. $\square$

Wir diskutieren ein zentrales Beispiel, andere folgen in Abschnitt 4.4.

Beispiel 4.35. Seien $k \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^k$. Diese Funktion ist nach Satz 1.29 strikt wachsend und hat nach Beispiel 4.30 das Bild $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Theorem 4.34 besagt nun, dass f eine strikt wachsende und stetige Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ besitzt. Nach Lemma 1.27 gilt $f^{-1}(y) = \sqrt[k]{y}$. $\Diamond$

Wir besprechen noch das Verhalten von Monotonie unter Kompositionen.

Bemerkung 4.36. Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : \tilde{D} = f(D) \to \mathbb{R}$. Wenn beide Funktionen f und g wachsen (bzw. fallen), dann wächst $h := g \circ f : D \to \mathbb{R}$. Wenn eine der beiden wächst und die andere fällt, dann fällt h. Diese Ausagen bleiben wahr, wenn man durchweg ‘strikt’ einfügt.

Wir zeigen exemplarisch die beiden Behauptungen für strikt fallende f. Für $x < y$ in D gilt dann $f(y) < f(x)$. Für strikt wachsende g folgt somit $g(f(y)) < g(f(x))$, sodass h strikt fällt. Wenn g strikt fällt, ergibt sich $g(f(y)) > g(f(x))$, und h wächst strikt. $\Diamond$

Diese Aussagen sind in vielen Abschätzungen von Nutzen. Für ein typisches Bespiel wachse f und nehme Werte in $(1, \infty)$ an. Dann fällt die Funktion $h : x \mapsto (1 - \frac{1}{f(x)})^{-1}$, da die Abbildungen $y \mapsto 1/y$ auf $\mathbb{R}_+$ und $u \mapsto -u$ fallen, wobei die erstere doppelt in mehrfachen Komposition h auftritt.

4.3. Gleichmäßige Konvergenz

Wir beweisen in diesem Abschnitt insbesondere Theorem 4.14, also die Stetigkeit von Potenzreihen $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$. Ihre Partialsummen $s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ sind als

Polynome auf $\mathbb{C}$ stetig, und sie konvergieren für jedes feste $z \in B(0,\rho)$ für $n \to \infty$ gegen $f(z)$. Man könnte nun vermuten, dass diese beiden Eigenschaften alleine schon die Stetigkeit von f liefern. Dem ist aber nicht so, wie das nächste Beispiel zeigt. Das zweite widerlegt eine analoge Vermutung zur Beschränkheit.

Beispiel 4.37. a) Die Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$; $f_n(x) = x^n$, sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig. Weiter existiert der Grenzwert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für jedes feste $x \in [0,1]$. Trotzdem ist $f = \mathbb{1}_{[0,1)} : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x \in [0,1)$ und $f(1) = 1$ unstetig in 1. Für die Punkte $x_n = 2^{-\frac{1}{n}} \in (0,1)$ gilt hierbei $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2}$ für allen $n \in \mathbb{N}$. Somit konvergiert f_n nicht 'gleichzeitig' in allen Punkten der Folge $(x_n)_n$ für $n \to \infty$ gegen f.

b) Für festes $n \in \mathbb{N}$ sind die Funktionen $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$; $f_n(x) = n$ für $0 < x \le \frac{1}{n}$ und $f_n(x) = 1/x$ für $x > \frac{1}{n}$, stetig und beschränkt. Der Grenzwert $f(x) = \frac{1}{x} = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ist aber unbeschränkt auf $\mathbb{R}_+$. Hier gilt sogar $f_n(\frac{1}{n}) = n \to \infty$. ◊

In der nächsten Definition formalisieren wir zunächst die oben auftretende Konvergenz und führen dann eine stärkere Eigenschaft ein.

Definition 4.38. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f, f_n : D \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$.*

a) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\ge1}$ konvergiert punktweise *(auf D) gegen f, wenn für jedes $z \in D$ die Aussage $f_n(z) \to f(z)$ für $n \to \infty$ gilt, also wenn*

$$\forall\, z \in D \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_{\varepsilon,z} \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \ge N_{\varepsilon,z} : \quad |f_n(z) - f(z)| \le \varepsilon. \tag{4.9}$$

Man schreibt dann $f_n \to f$ (pktw.) für $n \to \infty$.

b) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\ge1}$ konvergiert gleichmäßig *(auf D) gegen f, wenn*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \ge N_\varepsilon \quad \forall\, z \in D : \quad |f_n(z) - f(z)| \le \varepsilon. \tag{4.10}$$

Dies besagt gerade, dass

$$\|f_n - f\|_{\infty,D} = \|f_n - f\|_\infty := \sup_{z\in D} |f_n(z) - f(z)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Wir schreiben dann $f_n \to f$ (glm.) für $n \to \infty$.

Den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz werden wir in Analysis 2 in eine umfassende Theorie einbetten und detaillierter untersuchen. Das Adjektiv 'gleichmäßig' besagt üblicherweise, dass man einen Allquantor nach rechts an einem Existenzquantor vorbeiziehen kann, sodass die Existenzaussage unabhängig von der Allaussage wird. (Oben hängt N_ε nicht mehr von $z \in D$ ab.) Man beachte, dass ansonsten gleichmäßige Konvergenz nichts mit gleichmäßiger Stetigkeit zu tun hat! Wir formulieren ein 'Majorantenkriterium' für die gleichmäßige Konvergenz und wenden es in Beispielen an.

Bemerkung 4.39. Seien $f_n, f : D \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$. Es gebe eine Nullfolge $(a_n)_{n\ge1}$ mit $|f_n(z) - f(z)| \le a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$. Dann folgt $\|f_n - f\|_\infty \le a_n$ und somit konvergiert f_n gleichmäßig gegen f für $n \to \infty$. ◊

Beispiel 4.40. a) Seien $b \in (0,1)$, $f_n : [0,b] \to \mathbb{R}$; $f_n(x) = x^n$, für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $0 \le f_n(x) \le b^n$ und damit $\|f_n\|_\infty \le b^n \to 0$ für $n \to \infty$. Somit strebt f_n auf $[0,b]$ gleichmäßig gegen $f = 0$. Auf $[0,1)$ konvergiert f_n wegen Beispiel 4.37 nicht gleichmäßig.

b) Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = |x|$, und $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \sqrt{x^2 + n^{-2}}$, für $n \in \mathbb{N}$. Hier gilt $f_n(x) \to \sqrt{x^2} = |x|$ für $n \to \infty$ und jedes feste $x \in \mathbb{R}$. Aus den Ungleichungen $x^2 \le x^2 + \frac{1}{n^2} \le (|x| + \frac{1}{n})^2$ erhalten wir $|x| \le \sqrt{x^2 + n^{-2}} \le |x| + \frac{1}{n}$ und somit $\|f_n - f\|_\infty \le \frac{1}{n}$. Also strebt f_n auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen f. ◊

Im nächsten Hauptsatz zeigt, dass gleichmäßige Konvergenz (im Gegensatz zur punktweisen Konvergenz) Stetigkeit und Beschränktheit erhält. Das '3ε-Argument' zur Stetigkeit ist dabei von fundamentaler Bedeutung in der Analysis, um Eigenschaften von 'guten' Funktionen auf Grenzwerte zu übertragen. Wir nehmen an, dass die stetigen Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{C}$ konvergieren. Seien $z_j \to z_0$ in D und $\varepsilon > 0$. Um $f(z_j) - f(z_0)$ mittels $f_n(z_j) - f_n(z_0)$ zu kontrollieren, schreibt man

$$f(z_j) - f(z_0) = f(z_j) - f_n(z_j) + f_n(z_j) - f_n(z_0) + f_n(z_0) - f(z_0).$$

Für *festes* $n \in \mathbb{N}$ strebt nach Voraussetzung $f_n(z_j) - f_n(z_0)$ für $j \to \infty$ gegen 0, ist also für genügend große j kleiner als ε. Um dies auszunutzen, muss man die anderen beiden Differenzen auf der rechten Seite *gleichmäßig in* $j \in \mathbb{N}$ abschätzen. Dabei ist der Term $f(z_j) - f_n(z_j)$ problematisch, da hier noch j läuft. Die Voraussetzung (4.10) erlaubt uns aber gerade, diese Differenzen für große n gleichmäßig in j abzuschätzen. Wir können also zuerst einen großen Index $n =: N$ fixieren und erhalten dann für alle genügend großen j die Ungleichung $|f(z_j) - f(z_0)| \le 3\varepsilon$.

Theorem 4.41. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f, f_n : D \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass die Funktionen f_n für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen f konvergieren.*

a) Sei jedes f_n beschränkt. Dann ist f beschränkt.

b) Sei jedes f_n stetig. Dann ist f stetig.

Teil b) dieses Theorem erlaubt es, die z- und n-Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{z\to z_0} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = f(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \lim_{n\to\infty} f_n(z)$$

zu vertauschen. Hier wird die dritte Gleichung durch das Theorem bewiesen; die anderen Identitäten folgen aus den Voraussetzungen. Wenn nur punktweise Konvergenz vorliegt, kann ein solches Vertauschen zu falschen Resultaten führen, wie die obigen Beispiele belegen.

Beweis von Theorem 4.41. a) Sei $\varepsilon = 1$. Es gilt dann (4.10) mit dem Index $N_1 \in \mathbb{N}$. Aus (4.10) und der vorausgesetzten Beschränktheit von f_{N_1} schließen wir

$$|f(z)| \le |f(z) - f_{N_1}(z)| + |f_{N_1}(z)| \le 1 + \|f_{N_1}\|_\infty =: M < \infty$$

für alle $z \in D$. Damit ist a) gezeigt.

b) Es seien $z_j, z_0 \in D$ mit $z_j \to z_0$ für $j \to \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir fixieren die natürliche Zahl $N := N_\varepsilon$ aus (4.10). Da f_N stetig ist, gibt es einen Index $J_\varepsilon \in \mathbb{N}$ derart, dass $|f_N(z_j) - f_N(z_0)| \le \varepsilon$ für alle $j \ge J_\varepsilon$ gilt. Sei $j \ge J_\varepsilon$. Aus (4.10) und der Abschätzung für f_N folgen die Ungleichungen

$$|f(z_j) - f(z_0)| \le |f(z_j) - f_N(z_j)| + |f_N(z_j) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| \le 3\varepsilon. \qquad \square$$

Für Reihen benötigen wir die folgenden Begriffe.

Definition 4.42. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f_k : D \to \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Wir betrachten die Partialsummen $s_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$ für $z \in D$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Die Folge $(s_n)_{n\ge 0}$ heißt* Funktionenreihe *$\sum_k f_k$ auf D.*

a) Für jedes $z \in D$ konvergiere $(s_n(z))_n$ (absolut). Dann konvergiert $\sum_k f_k$ (absolut) punktweise.

b) Die Funktionenfolge $(s_n)_n$ konvergiere auf D gleichmäßig. Dann konvergiert $\sum_k f_k$ gleichmäßig.

Auch hier gibt es ein *Majorantenkriterium*, das auf *Weierstraß* zurückgeht.

Satz 4.43. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f_k : D \to \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Wenn $\sum_{k\ge 0} \|f_k\|_\infty$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{k\ge 0} f_k$ gleichmäßig und absolut.*

Beweis. Seien $z \in D$ und $k, n \in \mathbb{N}_0$. Wegen der Ungleichung $|f_k(z)| \le \|f_k\|_\infty$ folgt die absolute Konvergenz aus Satz 3.12. Ferner liefert Bemerkung 3.11, dass

$$\Big|\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) - \sum_{k=0}^{n} f_k(z)\Big| = \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)\Big| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty =: a_n.$$

Da nach Voraussetzung a_n gegen 0 strebt, zeigt Bemerkung 4.39 den Satz. $\square$

Wir beweisen nun Theorem 4.14.

Korollar 4.44. *Sei $f : B(0,\rho) \to \mathbb{C}$; $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$, eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$ (wobei $B(0,\infty) = \mathbb{C}$). Sei $r \in (0,\rho)$. Dann konvergiert die Potenzreihe auf $B(0,\rho)$ absolut und gleichmäßig auf $\overline{B}(0,r)$. Somit ist f auf $B(0,\rho)$ stetig.*

Beweis. Seien $|z| < r < \rho$. Nach Theorem 3.29 konvergiert die Reihe $\sum_n a_n z^n$ absolut gegen $f(z)$. Setze $f_k(z) = a_k z^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Offenbar gilt

$$\|f_k\|_{\infty,\overline{B}(0,r)} = \sup_{|z|\le r} |a_k|\,|z|^k \le |a_k|\,r^k.$$

Wir erhalten sogar Gleichheit, da man in Supremum $z = r$ wählen kann. Mit Satz 2.30 und der Definition 3.28 von ρ schließen wir

$$\varlimsup_{k\to\infty} \|f_k\|_{\infty,\overline{B}(0,r)}^{\frac{1}{k}} = \varlimsup_{k\to\infty} r\,\sqrt[k]{|a_k|} = \tfrac{r}{\rho} < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium Satz 3.16 konvergiert $\sum_k \|f_k\|_{\infty,\overline{B}(0,r)}$ und somit die Potenzreihe gleichmäßig auf $\overline{B}(0,r)$ laut Satz 4.43. Wegen Theorem 4.41 ist dann f stetig auf $\overline{B}(0,r)$ und somit bei z. Da $r < \rho$ beliebig ist, folgt die Aussage. $\square$

Das folgende Beispiel zeigt, dass eine Potenzreihe im Allgemeinen nicht gleichmäßig auf dem ganzen Konvergenzkreis $B(0,\rho)$ konvergiert.

Beispiel 4.45. Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ hat den Konvergenzradius $\rho = 1$, siehe Beispiel 3.30. Für $z \in B(0,1)$ liefert Beispiel 0.2 den Ausdruck

$$d_n(z) := \Big|\frac{1}{1-z} - \sum_{k=0}^{n} z^k\Big| = \Big|\frac{1}{1-z} - \frac{1-z^{n+1}}{1-z}\Big| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|}.$$

für den Reihenrest. Für $n \in \mathbb{N}$ wählen wir $x_n = 1 - \frac{1}{n+1} \in (0,1)$ und erhalten

$$d_n(x_n) = \frac{x_n^{n+1}}{1-x_n} = (n+1)\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)^{n+1}.$$

Nach einer Übung strebt der letzte Faktor gegen $1/\mathrm{e}$ und damit $d_n(x_n)$ gegen ∞ für $n \to \infty$, sodass die Potenzreihe auf $B(0,1)$ nicht gleichmäßig konvergiert. $\Diamond$

4.4. Die Exponentialfunktion und ihre (reelle) Verwandtschaft

Auf der Grundlage der in diesem Kapitel entwickelten Theorie untersuchen wir nun eine Reihe der zentralen (reellen) Funktionen in der Analysis. Wir beginnen mit der Exponentialfunktion und wiederholen ihre Definition

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots, \qquad x \in \mathbb{R},$$

aus Beispiel 3.25. Diese Potenzreihe impliziert die Ungleichungen

$$\exp(0) = 1 < 1 + x < \exp(x) < \exp(y)$$

für alle $y > x > 0$. Mittels der Gleichung $\exp(-r) = 1/\exp(r)$ für $r \in \mathbb{R}$, siehe Beispiel 3.25, erhalten wir daraus

$$0 < \exp(-y) < \exp(-x) < \frac{1}{1+x} < 1$$

für alle $-y < -x < 0$. Aus diesen Relationen und Korollar 4.29 folgen die Aussagen

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \quad \text{wächst strikt}, \qquad \lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0, \quad (4.11)$$
$$\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+, \qquad \exp(x) > 1 \iff x > 0, \qquad \exp(0) = 1, \qquad \exp(1) = \mathrm{e}.$$

Insbesondere ist $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ bijektiv, und stetig nach Theorem 4.14. Bemerkung 4.33 erlaubt nun die folgende wichtige Definition.

Definition 4.46. *Die Umkehrfunktion von* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *ist der (natürliche) Logarithmus* $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

Also ist $x = \ln y$ die eindeutig bestimmte reelle Zahl mit $\exp(x) = y$ für gegebenes $y > 0$. Laut Theorem 4.34 und (4.11) besitzt der Logarithmus die Eigenschaften

$$\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad \text{ist strikt wachsend, stetig und bijektiv}, \quad \ln(1) = 0, \quad \ln(\mathrm{e}) = 1,$$

$$\lim_{y\to\infty} \ln y = \infty, \qquad \lim_{y\to 0^+} \ln y = -\infty, \qquad \ln y > 0 \iff y > 1. \tag{4.12}$$

Mit Hilfe der Exponentialfunktion und des Logarithmus können wir nun allgemeine Potenzen effizienter als in Definition 1.28 einführen.

Definition 4.47. *Für* $x \in \mathbb{R}$ *und* $a > 0$ *definiert man die* Potenz $a^x := \exp(x \ln a)$. *Speziell gilt* $\mathrm{e}^x = \exp(x)$, *und wir schreiben auch* $\mathrm{e}^z := \exp(z)$ *für* $z \in \mathbb{C}$.

In a^x heißen a *Basis* und x *Exponent.* Als Verkettung stetiger Funktionen sind nach Satz 4.12 die Abbildungen $a \mapsto a^x$ auf $\mathbb{R}_+$ und $x \mapsto a^x$ auf $\mathbb{R}$ stetig. Mittels (4.11), (4.12) und Bemerkung 4.36 sieht man ferner, dass

$$\begin{aligned} &\text{die Funktion} \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \longmapsto a^x, \quad &&\begin{cases} \text{strikt wächst,} & \text{wenn } a > 1, \\ \text{strikt fällt,} & \text{wenn } a < 1, \end{cases} \\ &\text{und die Funktion} \quad \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R};\ a \longmapsto a^x, \quad &&\begin{cases} \text{strikt wächst,} & \text{wenn } x > 0, \\ \text{strikt fällt,} & \text{wenn } x < 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Wir können nur die *Potenz-* und *Logarithmusgesetze* beweisen.

Bemerkung 4.48. Es seien $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Wir setzen $u = \ln a$ und $v = \ln b$, sodass $a = \mathrm{e}^u$ und $b = \mathrm{e}^v$ gelten. Das Exponentialgesetz in Beispiel 3.25 und die Definitionen 4.46 und 4.47 implizieren dann die folgenden Aussagen.

a) $\ln(ab) = \ln(\mathrm{e}^u \mathrm{e}^v) = \ln e^{u+v} = u + v = \ln a + \ln b$.

b) $\ln(a^x) = \ln \mathrm{e}^{x \ln a} = x \ln a$.

c) $a^x b^x = \mathrm{e}^{x \ln a}\, \mathrm{e}^{x \ln b} = \exp\big(x(\ln a + \ln b)\big) = \mathrm{e}^{x \ln(ab)} = (ab)^x$.

d) $a^x a^y = \mathrm{e}^{x \ln a} \mathrm{e}^{y \ln a} = \exp\big((x + y) \ln a\big) = a^{x+y}$.

e) $(a^x)^y = \exp(y \ln a^x) = \mathrm{e}^{xy \ln a} = a^{xy}$.

f) Sei $x = m/n \in \mathbb{Q}$ für $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Ähnlich wie in Beispiel 3.25 zeigt man mittels des Exponentialgesetzes, dass Definition 4.47 und Definition 1.28 von a^x zusammenfallen.

g) Sei $a \neq 1$. Nach b) gilt genau dann $y = a^x > 0$, wenn $\ln y = x \ln a$ oder äquivalent $x = \ln y / \ln a \in \mathbb{R}$ sind. Somit ist die Umkehrfunktion von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$; $x \mapsto y = a^x$, durch $\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R};\ y \mapsto x = \frac{1}{\ln a} \ln y$, gegeben. ◊

Wir diskutieren nun in mehreren Schritten Monotonieverhalten, Periodizität und Nullstellen der *trigonometrischen Funktionen* sin, cos und tan. Weiter stellen wir den Zusammenhang zur Elementargeometrie her.

1) Sinus und Kosinus wurden in Beispiel 3.32 durch ihre Potenzreihen

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \qquad \text{und} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

definiert. Diese Darstellungen implizieren nach (3.7) und Satz 3.33, dass

$$\sin 0 = 0, \qquad \cos 0 = 1, \qquad \sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \cos x,$$
$$\sin x = \operatorname{Im} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \quad \cos x = \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad |\sin(x)|,\ |\cos(x)| \le 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten. Für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in (0,2]$ erhalten wir ferner

$$\frac{x^k}{k!} - \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} = x^k \, \frac{(k+2)(k+1) - x^2}{(k+2)!} \ge x^k \, \frac{6-4}{(k+2)!} > 0.$$

Damit und den obigen Potenzreihen folgen für alle $x \in (0,2]$ die Ungleichungen

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots > 0, \tag{4.14}$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}. \tag{4.15}$$

2) Seien $0 \le x < y \le 2$. Korollar 3.34 und (4.14) zeigen die Abschätzung

$$\cos y - \cos x = -2 \sin\big(\tfrac{1}{2}(y+x)\big) \sin\big(\tfrac{1}{2}(y-x)\big) < 0.$$

Also ist cos auf $[0,2]$ strikt fallend. Wir haben ferner $\cos 0 = 1$ und nach (4.15) auch $\cos 2 < -\frac{1}{3}$. Somit zeigt der Nullstellensatz Korollar 4.28, dass es (genau) eine Zahl $\hat{x} \in (0,2)$ mit $\cos \hat{x} = 0$ gibt. Wir definieren damit

$$\pi := 2\hat{x} \approx 3{,}1415.$$

Also gelten $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ und $\cos x > 0$ für alle $x \in [0, \frac{\pi}{2})$, sowie $\cos\big([0, \frac{\pi}{2}]\big) = [0,1]$ nach dem Zwischenwertsatz Theorem 4.27.

3) Schritt 1) liefert die Gleichung $\sin x = |\sin x| = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, und damit $\sin \frac{\pi}{2} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi}{2}} = 1$. Mit Teil 2), (4.13), Bemerkung 4.36 und Theorem 4.27 folgern wir $\sin\big([0, \frac{\pi}{2}]\big) = [0,1]$ und dass sin auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ strikt wächst.

4) Wir nutzen nun wesentlich die komplexe Exponentialfunktion aus. Aus den Schritten 2) und 3) ergibt sich $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + \mathrm{i} \sin \frac{\pi}{2} = \mathrm{i}$ und mit Beispiel 3.25 weiter $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}})^{-1} = -\mathrm{i}$. Das Exponentialgesetz in Beispiel 3.25 zeigt dann

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}k\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \cdot \ldots \cdot \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = (\pm \mathrm{i})^k \tag{4.16}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ (mit einem k-fachen Produkt) und damit speziell

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \pm \mathrm{i}, \qquad \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi} = -1, \qquad \mathrm{e}^{\pm \frac{3\pi \mathrm{i}}{2}} = \mp \mathrm{i}, \qquad \mathrm{e}^{\pm 2\pi \mathrm{i}} = 1.$$

5) Seien $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$. Wieder mit dem Exponentialgesetz berechnen wir

$$\exp(\mathrm{i}(x + 2\pi k)) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \big(\exp(2\pi \mathrm{i})\big)^k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}.$$

Indem wir den Real- und Imaginärteil nehmen, erhalten wir

$$\cos(x + 2\pi k) = \cos x \quad \text{und} \quad \sin(x + 2\pi k) = \sin x, \tag{4.17}$$

sodass Kosinus und Sinus 2π-*periodisch* auf $\mathbb{R}$ sind. Ähnlich folgen mit (4.16)

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x \pm \pi)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \quad \text{und} \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x \pm \frac{\pi}{2})} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \pm \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \pm(\mathrm{i} \cos x - \sin x)$$

und damit die *Verschiebungsformeln*

$$\begin{aligned} \cos(x \pm \pi) &= -\cos x, \quad \sin(x \pm \pi) = -\sin x, \\ \cos\left(x \pm \tfrac{\pi}{2}\right) &= \mp \sin x, \quad \sin\left(x \pm \tfrac{\pi}{2}\right) = \pm \cos x \end{aligned} \tag{4.18}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit liefert eine Verschiebung des Schaubilds des Kosinus um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts gerade das des Sinus, und man erhält das Schaubilds des Kosinus aus dem Sinus durch eine Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach links. Generell ist $x \mapsto f(x + x_0)$ gegenüber f um $x_0 \geq 0$ nach links verschoben, und $x \mapsto f(x - x_0)$ nach rechts.

Aus dem Verhalten auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, (3.7), (4.17) und (4.18) folgern wir die gewünschten Eigenschaften von sin und cos.

Satz 4.49. *Sei $k \in \mathbb{Z}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) Sinus wächst strikt auf $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ mit Bild $[-1, 1]$ und fällt strikt auf $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$. Das Maximum 1 nimmt sin *genau bei $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ an und das Minimum -1 genau bei $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.*

b) Sinus hat genau die Nullstellen $x = k\pi$, und ist positiv auf $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$ und negativ auf $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$.

c) Kosinus fällt strikt auf $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$ mit Bild $[-1, 1]$ und wächst strikt auf $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2\pi k]$. Das Maximum 1 nimmt cos *genau bei $x = 2k\pi$ an und das Minimum -1 genau bei $x = \pi + 2k\pi$.*

d) Kosinus hat genau die Nullstellen $\frac{\pi}{2} + k\pi$, und ist positiv auf $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ und negativ auf $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$.

e) Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ ein Element des Einheitskreises. Dann gibt es genau eine Zahl $x \in [0, 2\pi)$ mit $z = e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Somit entspricht x dem Winkel, den die x-Achse im Gegenuhrzeigersinn mit z einschließt. Für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ bilden 0, z und $\cos x$ *ein Dreieck mit rechtem Winkel bei* $\cos x$ *und den Seitenlängen 1 der Hypotenuse,* $\cos x$ *der Ankathede und* $\sin x$ *der Gegenkathede.*

Beweis. Die Aussagen c) und d) folgen aus a) und b) mittels (4.18), und wegen (4.17) reicht es $k = 0$ zu betrachten.

a) Sei $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$. Nach (4.18) ist $\sin x = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, so dass sin hier nach Teil 2) strikt wächst und das Bild $[-1, 0]$ hat. Zusammen mit 3) ist die erste Behauptung in a) gezeigt. Für $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ gilt ähnlich $\sin x = -\sin(x - \pi)$, was striktes Fallen impliziert. Aus dem Gesagten folgt auch, dass $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ und $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ gelten und $\sin x$ für andere $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ in $(-1, 1)$ liegt.

b) Nach Teil a) hat sin in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ nur die Nullstelle $x = 0$, und wegen (4.18) auf $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ nur $x = \pi$. Die Vorzeichen des Sinus ergeben sich dann auch aus a).

e) Nach c) gibt es genau eine Zahl $x_1 \in [0, \pi]$ mit $\cos x_1 = \operatorname{Re} z \in [-1, 1]$. Falls $z \notin \mathbb{R}$ und damit $x_1 \in (0, \pi)$, hat diese Gleichung eine weitere Lösung x_2 in $(\pi, 2\pi)$. Wir wählen $x = x_1$ für $\operatorname{Im} z \geq 0$ und $x = x_2$ für $\operatorname{Im} z < 0$. Weiter gilt $|\operatorname{Im} z| = \sqrt{1 - (\operatorname{Re} z)^2} = \sqrt{1 - \cos^2 x} = |\sin x|$. Wegen b) und der Wahl von x erhalten wir dann $\operatorname{Im} z = \sin x$. $\square$

Wir geben noch einige spezielle Funktionswerte von Sinus und Kosinus an:

$$\sin\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{1}{2},\ \ \sin\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{1}{\sqrt{2}},\ \ \sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\sqrt{3}}{2},\ \ \cos\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{1}{\sqrt{2}},\ \ \cos\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2}. \tag{4.19}$$

Wegen $\cos^2 + \sin^2 = 1$, reicht es cos zu betrachten. Ähnlich wie oben erhalten wir

$$\mathrm{i} = \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \left(\cos\tfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{6}\right)^3 = \cos^3\tfrac{\pi}{6} + 3\mathrm{i}\cos^2\tfrac{\pi}{6}\,\sin\tfrac{\pi}{6} - 3\cos\tfrac{\pi}{6}\,\sin^2\tfrac{\pi}{6} - \mathrm{i}\sin^3\tfrac{\pi}{6}.$$

Wenn wir den Realteil nehmen und durch $\cos\frac{\pi}{6} > 0$ dividieren (siehe Satz 4.49), folgen die Gleichungen

$$\cos^2\tfrac{\pi}{6} = 3\sin^2\tfrac{\pi}{6} = 3 - 3\cos^2\tfrac{\pi}{6} \qquad \text{und somit} \quad \cos^2\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{3}{4},$$

sodass $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt. Die anderen Behauptungen zeigt man entsprechend, wobei man von $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ bzw. $-1 = \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ ausgeht.

Wir definieren zwei weitere, abgeleitete Winkelfunktionen.

Definition 4.50. *Der* Tangens *ist durch* $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ *für* $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *und der* Kotangens *durch* $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$ *für* $x \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ *gegeben.*

Bemerkung 4.51. Nach Satz 4.12 und (4.18) sind tan und cot auf ihren Definitionsbereichen stetig und π-periodisch, und ferner gilt die Verschiebungsformel

$$\cot x = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{-\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = -\tan\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right),$$

sodass wir uns auf den Tangens konzentrieren können. Aus (4.19) ergeben sich die speziellen Funktionswerte

$$\tan\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{1}{\sqrt{3}},\quad \tan\tfrac{\pi}{4} = 1,\quad \tan\tfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}. \tag{4.20}$$

Sei $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Dann gilt $\tan(-x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$. Weiter folgen aus Satz 4.49 für $0 \le x < y < \frac{\pi}{2}$ die Ungleichungen

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} < \frac{\sin y}{\cos x} < \frac{\sin y}{\cos y} = \tan y.$$

Mittels $\tan x = -\tan(-x)$ und Bemerkung 4.36 schließen wir, dass tan auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ strikt wächst, und wegen der π-Periodizität auf jedem Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Zudem liefern Bemerkung 4.7 und Satz 4.49 die uneigentliche Konvergenz

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \longrightarrow \pm\infty \qquad \text{für} \quad x \to \left(\tfrac{\pi}{2} + k\pi\right)^{\mp}.$$

Nach dem Intervallsatz Korollar 4.29 ist demnach $\tan : \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \to \mathbb{R}$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ strikt wachsend und bijektiv. $\diamondsuit$

Satz 4.49 und Bemerkung 4.51 erlauben uns die folgende Definition.

Definition 4.52. *Die Umkehrfunktionen von*

$$\sin : \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \to [-1,1], \quad \cos : [0,\pi] \to [-1,1] \quad \textit{und} \quad \tan : \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

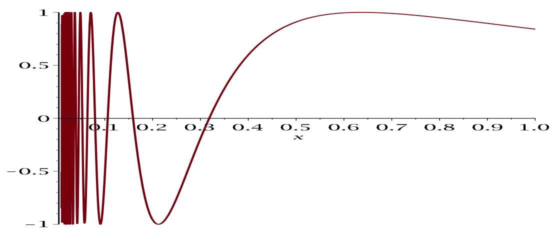
sind die Arcusfunktionen

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right], \quad \arccos : [-1,1] \to [0,\pi] \quad \textit{und} \quad \arctan : \mathbb{R} \to \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right).$$

Gemäß Theorem 4.34, Satz 4.49 und Bemerkung 4.51 sind arcsin und arctan strikt wachsend und arccos strikt fallend, und sie sind stetig und bijektiv.

Wir nutzen den Arcussinus aus, um ein (einfaches!) Beispiel dramatischer Divergenz anzugeben, die auf ‘unendlicher Oszillation’ beruht.

Beispiel 4.53. Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$; $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Diese Funktion hat keine stetige Fortsetzung in 0. Genauer gesagt, gibt es für jedes $y \in [-1,1]$ die positive Nullfolge $(x_n)_n = ((2\pi n + \arcsin y)^{-1})_n$ mit $f(x_n) = y$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das folgende Schaubild zeigt den Verlauf von f für $x \in [0.02, 1]$. $\Diamond$



KAPITEL 5

Differentialrechnung

Stets sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, das mehr als einen Punkt enthält. In diesem Kapitel werden Ableitungen von Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ definiert, diskutiert und angewendet. Die Ableitung von f in $x_0 \in I$ liefert dabei gerade die Steigung der Tangente an den *Graphen* $\mathrm{gr}(f) = \{(x, f(x)) \,|\, x \in I\}$ von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

Wie in Bemerkung 5.8 notiert, lassen sich die grundlegende Definition (5.1) und die ersten Aussagen leicht auf komplexe Funktionen verallgemeinern. In der weiteren Theorie der Differentialrechnung unterscheiden sich reelle und komplexe Analysis aber gravierend; die letztere wird im zweiten Studienjahr behandelt.

5.1. Definition und Ableitungsregeln

Die Ableitung ist der Grenzwert des *Differenzenquotienten* $D_f(x, x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für $x \to x_0$. Er ist für $x \in I \setminus \{x_0\}$ definiert und gibt die Steigung der *Sekante* $s_x(t) = f(x_0) + D_f(x, x_0)(t - x_0)$, $t \in \mathbb{R}$, an (also der Geraden durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$). Diese sollte gegen die Tangente an f bei x_0 streben.

Definition 5.1. *Sei $x_0 \in I$. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt* in x_0 differenzierbar, *wenn der Grenzwert*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =: f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0) \quad (5.1)$$

existiert. Die Zahl $f'(x_0)$ bezeichnet man dabei als Ableitung *von f in x_0. Wenn f in allen $x_0 \in I$ differenzierbar ist, dann nennt man f* differenzierbar auf I *und die Funktion*

$$f' : I \to \mathbb{R}; \qquad x \mapsto f'(x),$$

ist die Ableitung *von f. Wenn f' auf I differenzierbar ist, definiert man (falls existent) die zweite Ableitung in x_0 durch $f''(x_0) := (f')'(x_0)$ und iterativ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die* n–te Ableitung *in x_0 durch*

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0).$$

Wenn diese für alle $x_0 \in I$ existiert, erhält man die n–te Ableitung $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ auf I. Analog erklärt man die rechts- *bzw.* linksseitigen Ableitungen *in x_0 durch*

$$\frac{\mathrm{d}^\pm f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{x\to x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (5.2)$$

(soweit sie existieren). Man setzt auch $f^{(0)} = f$.

Gelegentlich (vor allem in Beispielen) verwenden wir diese Begriffe auch für Funktionen, die auf Vereinigungen von Intervallen (z.B. auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$) definiert sind. Die folgenden Sätze wendet man dann auf die Teilintervalle separat an, was meist nicht zu Problemen führt. (Vergleiche aber Beispiel 4.32.) Man beachte, dass beim Differenzenquotienten im Grenzwert $x \to x_0$ der Nenner verschwindet, sodass auch der Zähler 'mindestens so schnell wie $x - x_0$' gegen 0 gehen muss.

Wenn $x_0 = \min I$ ist, dann sind die Limiten in (5.1) und (5.2) (mit $^+$) gleichwertig und wir haben $f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}^+ f}{\mathrm{d}x}(x_0)$. Die linksseitige Ableitung in x_0 ist nicht definiert. Entsprechendes gilt für $x_0 = \max I$. Man erhält Varianten der folgenden Rechenregeln für halbseitige Ableitungen somit, wenn man f auf $I \cap [x_0, \infty)$ bzw. $I \cap (-\infty, x_0]$ einschränkt. Sei x_0 kein Randpunkt. Auf Grund einer Übung ist dann f genau dann in x_0 differenzierbar, wenn die halbseitigen Ableitungen existieren und gleich sind, und dann gilt $f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}^+ f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.

Wir diskutieren zwei Motivationen für den Begriff der Ableitung.

Bemerkung 5.2. a) Sei f in x_0 differenzierbar und sei $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ für $x \in \mathbb{R}$ die *Tangente* an $\mathrm{gr}(f)$ bei x_0. Sei $g(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$ für $x \in \mathbb{R}$ und ein $a \neq f'(x_0)$ eine andere Gerade durch $(x_0, f(x_0))$. Für $x \to x_0$ konvergieren

$$\Big|\frac{f(x) - g(x)}{x - x_0}\Big| = \Big|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a\Big| \longrightarrow |f'(x_0) - a| > 0,$$
$$\Big|\frac{f(x) - t(x)}{x - x_0}\Big| = \Big|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\Big| \longrightarrow |f'(x_0) - f'(x_0)| = 0.$$

Satz 4.5 mit $\varepsilon := |f'(x_0) - a|/3$ liefert nun so einen Abstand $\delta > 0$, dass

$$\Big|\frac{f(x) - g(x)}{x - x_0}\Big| \geq |f'(x_0) - a| - \varepsilon = 2\varepsilon > \varepsilon > \Big|\frac{f(x) - t(x)}{x - x_0}\Big|$$

für alle $x \in I$ mit $0 < |x - x_0| \leq \delta$ gilt. Für diese x folgt also $|f(x) - g(x)| > |f(x) - t(x)|$, sodass die Tangente die beste lineare Approximation an f in der Nähe von x_0 ist.

b) Sei $u(t)$ der Wert einer Größe (z.B. Stoffmenge oder Ort) zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ und sei $h \neq 0$. Dann ist $\frac{1}{h}(u(t + h) - u(t))$ die mittlere Änderung von u im Intervall $[t, t + h]$, bzw. $[t + h, t]$. Somit ist $u'(t)$ die momentane Änderungsgeschwindigkeit der Größe u zur Zeit t (soweit existent). Auf dieser und ähnlichen Interpretationen beruht die Bedeutung der Ableitung in den Anwendungen. $\Diamond$

Bevor wir die grundlegenden Eigenschaften der Ableitung herleiten, besprechen wir einige Beispiele, die man ohne weitere Theorie behandeln kann.

Beispiel 5.3. a) Es seien $m, a \in \mathbb{R}$ fest gegeben und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = mx + a$. Dann existiert $f'(x) = m$ für alle $x \in \mathbb{R}$, da der Differenzenquotient durch

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{x + h - x} = \frac{m(x + h) + a - mx - a}{h} = m$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $h \neq 0$ bestimmt ist.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = |x|$. Dann existieren die halbseitigen Ableitungen $\frac{\mathrm{d}^{\pm} f}{\mathrm{d}x}(0) = \pm 1$. Da sie ungleich sind, ist f im 'Knick' 0 nicht differenzierbar. Dies folgt aus der Gleichung

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1, & x > 0, \\ \frac{-x}{x} = -1, & x < 0. \end{cases}$$

c) Sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \sqrt{x}$. Dann existiert $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ für $x > 0$, aber f ist bei der 'Spitze' 0 nicht differenzierbar.

Beweis. Seien $x_0 > 0$ und $x \geq 0$ mit $x \neq x_0$. Dann gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{x - x_0}{x - x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}.$$

Im Grenzwert $x \to x_0$ erhalten wir die Ableitung $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. Für $x_0 = 0$ divergiert aber wegen Bemerkung 4.7 der Differenzenquotient

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \longrightarrow \infty \qquad \text{für } x \to 0^+. \qquad \square$$

Zunächst zeigen wir, dass Differenzierbarkeit eine stärkere Eigenschaft als Stetigkeit ist. Umgekehrt sind die Funktionen in Beispiel 5.3 b) und c) zwar stetig, aber in 0 nicht differenzierbar; siehe auch das drastische Beispiel 5.16.

Satz 5.4. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ in einem $x_0 \in I$ differenzierbar. Dann ist f in x_0 stetig.*

Beweis. Sei $x \in I \backslash \{x_0\}$. Die Differenzierbarkeit von f und Satz 4.6 implizieren

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \longrightarrow f'(x_0) \cdot 0 = 0, \qquad x \to x_0. \qquad \square$$

Der nächste Satz beschreibt, wie die Ableitung zur algebraischen Struktur von $\mathbb{R}$ passt, was etwas komplexer als in den bisherigen Kapiteln ist. Hierzu formt man (ähnlich wie in Satz 2.7) die Differenzenquotienten so um, dass die Grenzwertaussagen aus Satz 4.6 angewendet werden können.

Satz 5.5. *Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ in einem $x_0 \in I$ differenzierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) Es existiert $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$. (Linearität)

b) Es existiert $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$. (Produktregel)

c) Wenn zusätzlich $g(x_0) \neq 0$ ist, dann existieren

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2},$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}. \qquad \text{(Quotientenregel)}$$

Beweis. Es seien $x \in I \setminus \{x_0\}$ mit $x \to x_0$. Aufgrund der Voraussetzung und Satz 5.4 strebt dann $g(x)$ gegen $g(x_0)$. Diese Beobachtung, die Annahmen und Satz 4.6 implizieren die in a) und b) behaupteten Limiten

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha f(x) + \beta g(x) - (\alpha f(x_0) + \beta g(x_0))}{x - x_0} &= \alpha\, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \beta\, \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&\longrightarrow\ \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0), \\
\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\, g(x) + f(x_0)\, \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&\longrightarrow\ f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).
\end{aligned}$$

Sei nun $g(x_0) \neq 0$. Gemäß Satz 4.6 gibt es dann so einen Radius $r > 0$, dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| \leq r$ gilt. Wie oben erhalten wir damit den ersten Teil von c) mit der Rechnung

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}{g(x)g(x_0)} \ \longrightarrow\ -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Mit Aussage b) folgt daraus auch der zweite Teil von c). □

Zusammen mit Beispiel 5.3 erlauben es die obigen Regeln, Polynome und rationale Funktionen abzuleiten.

Beispiel 5.6. a) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f_n(x) = x^n$. Dann besitzt f_n die Ableitung $f_n' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f_n'(x) = nx^{n-1}$.

Beweis. Beispiel 5.3 a) behandelt den Fall $n = 1$. Die Aussage gelte für ein $n \in \mathbb{N}$. Wegen $f_{n+1}(x) = f_n(x)x$ liefert dann die Produktregel Satz 5.5 b) die Ableitung $f_{n+1}'(x) = nx^{n-1}x + x^n \cdot 1 = (n + 1)x^n$. Die Aussage folgt induktiv. □

b) Seien p und $q \neq 0$ Polynome, wobei $p(x) = a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0$ für feste Koeffizienten $a_j \in \mathbb{R}$ ist. Gemäß a) und Satz 5.5 sind dann $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f = \frac{p}{q} : \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dabei gilt $p'(x) = na_n x^{n-1} + \cdots + a_1$. ♢

In den Sätzen 5.7 und 5.10 folgen die *Ketten-* bzw. *Umkehrregel* zur Ableitung von Zusammensetzungen und Inversen von Funktionen. Es sei betont, dass diese und die obigen Ableitungsregeln von zentraler Bedeutung für die Analysis und ihre Anwendungen sind.

Satz 5.7. *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ und $g : J \to \mathbb{R}$ in $f(x_0)$ differenzierbar, wobei J ein Intervall mit $f(I) \subseteq J$ sei. Dann ist die Funktion $h = g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar mit der Ableitung*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Beweis. Seien $x_n \in I \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Gemäß Voraussetzung und Satz 5.4 strebt $(f(x_n))_n$ gegen $f(x_0)$. Die Annahmen und Satz 4.6 implizieren

$$\begin{aligned}\frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x_n - x_0} &= \begin{cases} 0, & f(x_n) = f(x_0), \\ \frac{g(f(x_n))-g(f(x_0))}{f(x_n)-f(x_0)} \, \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}, & f(x_n) \neq f(x_0), \end{cases} \\ &\longrightarrow g'(f(x_0))f'(x_0), \qquad n \to \infty.\end{aligned}$$

Beim Grenzwert haben wir dabei verwendet, dass $f'(x_0) = 0$ gilt, wenn der erste Fall unendlich oft auftritt, also $f(x_{n_j})$ gleich $f(x_0)$ für eine Teilfolge $(x_{n_j})_j$ ist. □

Bemerkung 5.8. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ für (z.B.) $D = \mathbb{C}$ oder $D = B(z_0, r)$. Man definiert $f'(z)$ für $z \in D$ wie in (5.1). Die obigen Aussagen und ihre Beweise gelten dann entsprechend. Auch Theorem 5.12 unten bleibt gültig, wenn auch mit einer Beweisvariante. Satz 5.10 muss allerdings im Komplexen modifiziert werden. ♢

Bei der Anwendung der Ketten- und Produktregel muss man zunächst Abbildungen finden, aus denen die gegebene Funktion zusammengesetzt ist und deren Ableitungen man kennt.

Beispiel 5.9. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$, ist differenzierbar mit $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Wir haben $f = w \circ p$ für die Funktionen $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $y = p(x) = 1 + x^2$, und $w : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$; $w(y) = \sqrt{y}$, wobei $p(\mathbb{R}) = [1, \infty) \subseteq \mathbb{R}_+$. Diese besitzen die Ableitungen $p'(x) = 2x$ und $w'(y) = (2\sqrt{y})^{-1}$ nach den Beispielen 5.6 bzw. 5.3. Gemäß der Kettenregel Satz 5.7 ist dann f für $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{p(x)}} \, p'(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \, . \qquad \square$$

Wir berechnen die Ableitung der Umkehrfunktion injektiver $f : I \to \mathbb{R}$ an einer Stelle x_0 mit $f'(x_0) \neq 0$. Da wir zusätzlich die Stetigkeit von f annehmen, ist f laut Bemerkung 4.33 schon strikt monoton.

Satz 5.10. *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ strikt monoton und stetig, sowie differenzierbar in einem $x_0 \in I$, wobei $f'(x_0) \neq 0$ gelte. Dann ist die Umkehrfunktion $g = f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ in $y_0 \coloneqq f(x_0)$ differenzierbar und es gilt*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beweis. Aufgrund der Stetigkeit von f ist $f(I)$ nach Korollar 4.29 ein Intervall. Sei $y = f(x) \in f(I) \setminus \{y_0\}$ mit $y \to y_0$. Da f strikt monoton ist, existiert die stetige und injektive Umkehrabbildung $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ gemäß Theorem 4.34. Daraus folgt die Konvergenz $x = f^{-1}(y) \to x_0 = f^{-1}(y_0)$ und dass $x \neq x_0$ ist. Wegen $f'(x_0) \neq 0$, liefert Satz 4.6 schließlich

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \longrightarrow \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \, . \qquad \square$$

Man beachte, dass man in der Umkehrregel f^{-1} in f' einsetzt. Wir geben ein typisches Beispiel an, weitere folgen gleich.

Beispiel 5.11. Es sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^n$, für ein festes $n \in \mathbb{N}$. Nach Beispiel 4.35 existiert die Umkehrabbildung $w := f^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$; $y \mapsto y^{\frac{1}{n}}$. Für alle $y > 0$ ist die Funktion w differenzierbar mit $w'(y) = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}$.

Beweis. Seien $x > 0$ und $y = f(x) = x^n > 0$. Dann gilt $x = y^{1/n}$. Nach Beispiel 5.6 besitzt f die Ableitung $f'(x) = nx^{n-1} > 0$. Die Umkehrregel Satz 5.10 und die Potenzgesetze in Bemerkung 4.48 zeigen nun die Differenzierbarkeit von w und die Gleichung

$$w'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n}\, y^{\frac{1}{n}-1}. \qquad \square$$

Auf der Grundlage etwas tiefer liegender Resultate werden wir in Korollar 5.34 sehen, wie man Potenzreihen $\sum_n a_n x^n$ ableiten kann. Wir formulieren die resultierende Aussage schon jetzt, um weitere Bespiele behandeln zu können. Man differenziert einfach jeden Summanden $a_n x^n$ separat (wobei der nullte Term a_0 verschwindet). Die so entstehende Reihe konvergiert dann auf $(-\rho, \rho)$ gegen $f'(x)$.

Theorem 5.12. *Es sei $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann hat auch die Potenzreihe $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ den Konvergenzradius ρ. Weiter ist die Funktion $f : (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}$; $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, differenzierbar mit*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \text{für } \; x \in (-\rho, \rho).$$

Beispiel 5.13. a) Nach Theorem 5.12 sind $\exp, \sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dabei gelten $\exp' = \exp$, $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\ell(x) = ax$. Da $\mathrm{e}^{ax} = (\exp \circ \ell)(x)$, liefert Satz 5.7 die Ableitung $(\mathrm{e}^{ax})' = a\mathrm{e}^{ax}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gelten $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ und $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ nach den Beispielen 3.25 und 3.32. Mit Theorem 5.12 erhalten wir

$$\exp'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x,$$

$$\cos'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{(2n)!} x^{2n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1} = -\sin x.$$

Hier haben wir $k = n-1$ substituiert. Die Formel $\sin' = \cos$ zeigt man ähnlich. $\square$

b) Die Funktion $\tan = \frac{\sin}{\cos} : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$, siehe Definition 4.50, ist differenzierbar mit der Ableitung

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

wobei wir die Quotientenregel in Satz 5.5, Teil a) und Satz 3.33 benutzt haben.

c) Der Logarithmus $\ln = \exp^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ aus Definition 4.46 ist differenzierbar mit der Ableitung $\ln'(y) = \frac{1}{y}$ für $y > 0$.

Beweis. Sei $y = e^x > 0$ für $x = \ln y \in \mathbb{R}$. Wegen $\exp'(x) = e^x > 0$ laut Teil a), liefert die Umkehrregel Satz 5.10 die Ableitung $\ln'(y) = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$. $\square$

d) Gemäß Definition 4.47 sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, für ein festes $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann ist f differenzierbar mit $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ für alle $x > 0$.

Beweis. Wir schreiben $f = \exp \circ g$ für die Funktion $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$; $g(x) = \alpha \ln x$. Da $g'(x) = \frac{\alpha}{x}$ nach c) gilt, folgern wir aus der Kettenregel und den Potenzgesetzen, dass f die Ableitung $f'(x) = e^{\alpha \ln x} \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$ für $x > 0$ besitzt. $\square$

e) Der Arctustangens $\arctan = \tan^{-1} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist differenzierbar mit $\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$ für $y \in \mathbb{R}$. (Siehe Definition 4.52.)

Beweis. Wir haben genau dann $x = \arctan(y) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, wenn $y = \tan x \in \mathbb{R}$ ist. Teil b) zeigt $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = 1 + y^2 > 0$, sodass gemäß der Umkehrregel $\arctan'(y) = 1/\tan'(x) = 1/(1 + y^2)$ existiert. $\square$

Im folgenden Beispiel behandeln wir eine stückweise definierte Funktion mit überraschenden Eingenschaften.

Beispiel 5.14. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ist gemäß Produkt- und Kettenregel und Beispiel 5.13 differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit der Ableitung

$$f'(x) = 2x \cos \tfrac{1}{x} - x^2 \sin(\tfrac{1}{x}) \, (-\tfrac{1}{x^2}) = 2x \cos \tfrac{1}{x} + \sin \tfrac{1}{x}.$$

Auch bei $x = 0$ besitzt f die Ableitung $f'(0) = 0$, da

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \left| x \cos \tfrac{1}{x} \right| \leq |x| \longrightarrow 0$$

für $x \to 0$. Allerdings konvergiert $f'(x)$ für $x \to 0^+$ **nicht**, siehe Beispiel 4.53. Somit ist $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unstetig, und dies auf dramatische Weise. $\Diamond$

Die nächste Definition schließt solche unangenehmen Funktionen aus.

Definition 5.15. *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt* stetig differenzierbar, *wenn f auf I differenzierbar und f' auf I stetig ist. Entsprechend definiert man n–*fach stetig differenzierbare *Funktionen für $n \in \mathbb{N}$. Man schreibt $C^n(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \mid f$ ist n–mal stetig differenzierbar$\}$ und $C^\infty(I) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(I)$.*

Wir bemerken, dass $C^n(I)$ ein Vektorraum und die Abbildung $D : C^1(I) \to C(I)$; $Df = f'$, linear ist (siehe Sätze 5.5 und 4.12). Im nächsten wichtigen Beispiel konstruieren wir eine stetige, *nirgends differenzierbare* Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.[1]

[1] Der Beweis wurde in der Vorlesung ausgelassen.

Beispiel 5.16. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die 4^{-n}-periodische Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch $f_n(x) = x$ für $0 \le x \le \frac{1}{2}4^{-n}$ und $f_n(x) = 4^{-n} - x$ für $\frac{1}{2}4^{-n} < x \le 4^{-n}$ gegeben ist. Also ist f_n ein Zackenlinie mit Steigungen ± 1 auf Intervallen der Länge $\frac{1}{2}4^{-n}$. Da $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{2}4^{-n}$ ist, existiert die Funktionenreihe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, laut Satz 4.43, und sie ist wegen Theorem 4.41 stetig.

Sei nun $x \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist f_n zwischen x und $x + t_n$ linear mit Steigung 1 oder -1, wobei t_n entweder gleich $-\frac{1}{4}4^{-n}$ oder gleich $\frac{1}{4}4^{-n}$ ist. Sei $k \le n$. Die Funktionen f_k sind auch zwischen x und $x + t_n$ linear, sodass ihr Differenzenquotient $d_{k,n} = t_n^{-1}(f_k(x + t_n) - f_k(x))$ in $\{-1, 1\}$ liegt. Sei $k > n$. Dann hat f_k die Periode t_n und somit ist hier $d_{k,n} = 0$. Sei $p_n \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der positiven $d_{k,n}$. Damit erhalten wir

$$d_n := \tfrac{1}{t_n}(f(x + t_n) - f(x)) = \sum_{k=1}^{n} d_{k,n} = p_n - (n - p_n) = 2p_n - n.$$

Also hat $d_{n+1} - d_n = 2(p_{n+1} - p_n) - 1$ mindestens den Betrag 1 und $(d_n)_n$ kann nicht konvergieren, d.h., f ist bei x nicht differenzierbar. ♢

5.2. Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Ableitungen erlauben weitgehende Aussagen über das qualitative Verhalten von Funktionen, wobei die resultierenden Bedingungen oft vergleichsweise leicht nachzuprüfen sind. Da wir im Reellen arbeiten, können wir im Folgenden dafür wesentlich Monotonie und Positivität ausnutzen. Wir beginnen mit grundlegenden Definitionen, die wir etwas allgemeiner als hier nötig formulieren.

Definition 5.17. *Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Die Funktion f hat ein* lokales Maximum (Minimum) *in z_0, wenn es so einen Radius $r > 0$ gibt, dass $f(z_0) \ge f(z)$ (bzw. $f(z_0) \le f(z)$) für alle $z \in D \cap \overline{B}(z_0, r)$ gilt. In beiden Fällen spricht man von einem* lokalem Extremum*, und man nennt z_0* lokale Maximalstelle (Minimalstelle)*. Das Extremum heißt* global*, wenn die obigen Ungleichungen sogar für alle $z \in D$ gelten, und es heißt* strikt*, wenn diese mit '$>$' ('$<$') erfüllt sind.*

Man beachte, dass Maxima (jeglicher Art) von f den Minima von $-f$ entsprechen. Wir zeigen zuerst eine wichtige notwendige Bedingung für Extrema in einem offenen Intervall.

Satz 5.18. *Sei $-\infty \le a < b \le \infty$. Die differenzierbare Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ besitze ein lokales Extremum in $x_0 \in (a, b)$. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. Seien x_0 eine lokale Maximalstelle, $r > 0$ wie in Definition 5.17 und $\delta := \min\{x_0 - a, b - x_0, r\} > 0$, wobei $x_0 - (-\infty)$ und $\infty - x_0$ gleich ∞ gesetzt werden. Dann liegt $J := (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ in (a, b) und es gilt $f(x) \le f(x_0)$ für alle $x \in J$. Daraus folgen die Ungleichungen

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \ge 0, & x < x_0, \\ \le 0, & x > x_0, \end{cases}$$

für $x \in J \setminus \{x_0\}$. Im Grenzwert $x \to x_0^{\mp}$ liefert dann Satz 4.6 die beiden Relationen $f'(x_0) \geq 0$ und $f'(x_0) \leq 0$, woraus die Behauptung folgt.

Wenn x_0 eine lokale Minimalstelle ist, dann hat $-f$ ein lokales Maximum in x_0. Der erste Schritt zeigt dann $-f'(x_0) = 0$ und damit die Behauptung. □

Randextrema werden in den Übungen besprochen. Hier muss die Ableitung nicht verschwinden, z.B. bei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x$, mit dem globalen Minimum $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$.

Bemerkung 5.19. In Satz 5.18 ist die Implikation '$\Leftarrow$' im Allgemeinen falsch. So ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^3$, strikt wachsend und besitzt somit keine lokalen Extrema. Gleichwohl gilt $f'(0) = 0$. ◊

Das nächste Beispiel zeigt, wie das obige Resultat und der Satz von Maximum (Theorem 4.24) es oft ermöglichen, Extrema zu berechnen ohne höhere Ableitungen zu bemühen (vergleiche Korollar 5.25). Weiter kann Satz 5.18 sicherstellen, dass man alle Extremstellen gefunden hat.

Beispiel 5.20. Die Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$, hat das globale Maximum $\frac{1}{\mathrm{e}}$ und das globale Minimum 0. Diese werden nur bei $x_1 = 1$ bzw. $x_0 = 0$ angenommen. Es gibt keine weiteren lokalen Extrema. Ferner ist $f(\mathbb{R}_{\geq 0}) = [0, \frac{1}{\mathrm{e}}]$.

Beweis. Es gelten offenbar $f(0) = 0$ und $f(x) > 0$ für alle $x > 0$, sodass 0 das globale Minimum ist und nur bei $x_0 = 0$ angenommen wird.

Sei $x_1 \in \mathbb{R}_+$ eine andere lokale Extremstelle von f. Diese genügt nach Satz 5.18 der Gleichung $0 = f'(x_1) = \mathrm{e}^{-x_1} - x_1\mathrm{e}^{-x_1}$, woraus $x_1 = 1$ folgt. Wir sehen in Beispiel 5.31, dass $f(x)$ für $x \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Also gilt $f(x) < f(1) = \frac{1}{\mathrm{e}}$ für alle $x \geq b$ ab einer Stelle $b > 1$. Nach Theorem 4.24 besitzt f auf $[0, b]$ ein Maximum $m = f(\xi) \geq \frac{1}{\mathrm{e}}$. Gemäß der obigen Überlegungen ist dieses global und es gilt $\xi = 1$. Die letzte Aussage folgt dann aus dem Intervallsatz Korollar 4.29. □

Der folgende *Mittelwertsatz* basiert auf Theorem 4.24 und Satz 5.18. Er ist die Grundlage für viele der folgenden Resultate, indem er die Differenz von Funktionswerten mit der Ableitung direkt (ohne Grenzwert) verbindet. Man beachte aber, dass über die Zwischenstelle $\xi \in (a, b)$ nichts weiter bekannt ist.

Theorem 5.21. *Seien $a < b$ in $\mathbb{R}$ und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b). Dann existiert ein Punkt $\xi \in (a, b)$ mit*

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = f'(\xi)(g(b) - g(a)). \tag{5.3}$$

Für die Funktion $g(x) = x$ ergibt sich der Mittelwertsatz

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{5.4}$$

Im Falle $f(b) = f(a)$ erhalten wir $f'(\xi) = 0$ (Satz von Rolle). *Weiter folgt aus $\ell := \|f'\|_{\infty,(a,b)} < \infty$ die* Lipschitzstetigkeit $|f(x) - f(y)| \leq \ell|x - y|$ *für $x, y \in [a, b]$.*

Beweis. 1) Sei $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) mit $h(a) = h(b)$. Wenn h konstant ist, verschwindet h' natürlich auf ganz $[a, b]$. Sei h nicht konstant. Nach Theorem 4.24 hat h ein Maximum und ein Minimum auf $[a, b]$, wovon nun mindestens eines an einer Stelle $\xi \in (a, b)$ angenommen werden muss. Satz 5.18 impliziert dann die Behauptung $h'(\xi) = 0$ in diesem Fall.

2) Sei zuerst $g(a) = g(b)$. Dann existiert nach Schritt 1) ein $\xi \in (a, b)$ mit $g'(\xi) = 0$, sodass (5.3) gilt. Sei nun $g(a) \neq g(b)$. Wir reduzieren auch diesen Fall auf Teil 1). Dazu wollen wir g zu einer Funktion h wie in 1) modifizieren. Da die Bedingung $h(a) = h(b)$ eindimensional ist, kann man hoffen, dass ein Ansatz mit nur einem freien Parameter $c \in \mathbb{R}$ erfolgreich ist. Im Hinblick auf (5.3) modifizieren wir g mittels f zu der Funktion $h_c := f + cg$. Die gewünschte Gleichung $h_c(a) = h_c(b)$ ist äquivalent zu

$$f(a) + cg(a) = f(b) + cg(b) \iff c = \frac{f(b) - f(a)}{g(a) - g(b)}\,.$$

(Hier nutzen wir aus, dass $g(a) \neq g(b)$ ist und c vor g gesetzt wurde.) Für dieses c liefert Schritt 1) eine Stelle $\xi \in (a, b)$ mit

$$0 = h_c'(\xi) = f'(\xi) + \frac{f(b) - f(a)}{g(a) - g(b)}\, g'(\xi).$$

Eine Umformung ergibt (5.3). Die letzte Behauptung folgt durch Anwendung von (5.4) auf die Einschänkung von f auf $[x, y]$ bzw. $[y, x]$. □

Wir ergänzen Satz 2.31 zur einfachsten Version des *Banachschen Fixpunktssatzes.*

Bemerkung 5.22. Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine strikte Kontraktion (also $|f(x) - f(y)| \le q|x - y|$ für ein $q \in [0, 1)$ und alle $x, y \in [a, b]$), z.B. existiere die Ableitung mit $q := \|f'\|_\infty < 1$. Dann gibt es genau einen *Fixpunkt* $x_* \in [a, b]$ mit $f(x_*) = x_*$.

Beweis. Wähle $x_0 \in [a, b]$ und setze rekursiv $x_n = f(x_{n-1}) \in [a, b]$ für $n \in \mathbb{N}$. Laut Satz 2.31 und der Abgeschlossenheit von $[a, b]$ konvergiert $(x_n)_n$ gegen eine Zahl $x_* \in [a, b]$. Da f stetig ist, folgt $f(x_*) = x_*$ aus der Definition von x_n. Auch $y_* \in [a, b]$ erfülle $f(y_*) = y_*$. Dann liefert die Voraussetzung $|x_* - y_*| = |f(x_*) - f(y_*)| \le q|x_* - y_*|$ und damit $x_* = y_*$. □

Wie nach Satz 2.31 skizziert, kann die obige Rekursion ein diskretes dynamisches System darstellen. Das folgende Beispiel stammt von Fibonacci (ca. 1230), in biologischer Hinsicht enthält es offenbar zahlreiche unplausible Annahmen.

Beispiel 5.23. Seien $f_{-1} = f_0 = 1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \in \mathbb{N}$ die *Fibonacci-Zahlen.* Die Quotienten $x_n = f_n/f_{n-1}$ mit $x_1 = 2$ erfüllen dann $x_{n+1} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{x_n} =: g(x_n)$. Nach einer Übung liegt x_n in $[\frac{3}{2}, 2] =: I$. Auf I ist $|g'(x)| = x^{-2}$ durch $\frac{4}{9}$ beschränkt. Somit konvergiert $(x_n)_n$ gegen eine Zahl $x_* \in I$ mit $x_* = 1 + \frac{1}{x_*} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ wegen Bemerkung 5.22 und der Übung.

Diese Folge tritt häufig auf. Wir betrachten als Beispiel eine Population von Paaren von Kaninchen, die nach einem Monat geschlechtsreif werden und dann bei jedem Monatswechsel ein neues Paar Kaninchen zeugen, das nach einem Monat geboren wird. Seien a_n (b_n) die Anzahl der (nicht) geschlechtsreifen Kaninchenpaare im Monat $n \in \mathbb{N}$, sowie $a_0 = a_{-1} = 1$ und $b_0 = b_{-1} = 0$. Dann gelten $b_n = a_{n-1}$ und $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Durch Einsetzen erweist sich die Gesamtanzahl

$$f_n := a_n + b_n = a_{n-1} + b_{n-1} + a_{n-1} = a_{n-2} + b_{n-2} + b_{n-1} + a_{n-1} = f_{n-2} + f_{n-1}$$

als Fiboncci-Folge. Somit bestimmt der Quotient x_n den monatlichen relativen Zuwachs der Kaninchenpopulation. $\Diamond$

Das Vorzeichen von f' bestimmt das Monotonieverhalten von f, wie der folgende Satz zeigt. Mit I° bezeichnen wir das Intervall I ohne seine Randpunkte. Man beachte, dass I genau dann offen ist (siehe Definition 1.7), wenn es $I = I^\circ$ erfüllt.

Satz 5.24. *Für ein differenzierbares $f : I \to \mathbb{R}$ gelten die folgenden Aussagen.*

a) Die Funktion f wächst (fällt) genau dann, wenn $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) für alle $x \in I$ gilt. Also ist f genau dann konstant, wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$ gilt.

b) Sei $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) für alle $x \in I^\circ$. Dann wächst (fällt) f strikt.

c) Sei $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I^\circ$. Dann ist f injektiv.

Beweis. 1) Seien $x, y \in I$ mit $y > x$. Nach dem Mittelwertsatz Theorem 5.21 gibt es einen Punkt $\xi \in (x, y) \subseteq I^\circ$ mit $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x)$. Wegen $y - x > 0$, folgen daraus b), c), und die Implikation[2] '$\Leftarrow$' in a).

2) Sei $x \neq \max I$ und f wachse (falle). Nach Satz 4.6 gilt dann

$$f'(x) = \lim_{h \to 0^+} \tfrac{1}{h}(f(x + h) - f(x)) \geq 0 \quad (\leq 0).$$

Dies zeigt '$\Rightarrow$' in a). Für $x = \max I$ verwendet man den Limes mit $h \to 0^-$. $\square$

In Satz 5.24 b) und c) ist die Implikation '$\Leftarrow$' z.B. für die Funktion $f(x) = x^3$ aus Bemerkung 5.19 falsch. Wir folgern wichtige Kriterien für lokale Extrema, die nicht am Intervallrand liegen. Randextrema müssen getrennt behandelt werden.

Korollar 5.25. *Seien I offen, $x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) Wenn es so ein $r > 0$ gibt, dass $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq I$, $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$) für alle $x \in (x_0 - r, x_0]$ und $f'(x) \leq 0$ (bzw. $f'(x) \geq 0$) für alle $x \in [x_0, x_0 + r)$ gelten, dann besitzt f bei x_0 ein lokales Maximum (bzw. Minimum).

b) Es sei f zweimal differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ (bzw. $f''(x_0) > 0$). Dann hat f bei x_0 ein striktes lokales Maximum (bzw. Minimum).

Beweis. Wir beweisen die Aussagen für Minima. (Maxima behandelt man, indem man $-f$ betrachtet.)

a) Nach Voraussetzung und Satz 5.24 a) gelten für alle $x_0 - r < x_1 \leq x_0 \leq x_2 < x_0 + r$ die Ungleichungen $f(x_1) \geq f(x_0)$ und $f(x_0) \leq f(x_2)$. Also ist $f(x_0)$ ein lokales Minimum.

[2] Hierbei reicht es die Bedingungen an f' für $x \in I^\circ$ zu stellen.

b) Sei $\varepsilon = f''(x_0)/2 > 0$. Die Annahmen und Satz 4.5 liefern so einen Radius $\delta > 0$, dass $J := (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ in I liegt und

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} = \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq f''(x_0) - \varepsilon = \frac{f''(x_0)}{2} > 0$$

für alle $x \in J \setminus \{x_0\}$ gelten. Somit fällt f strikt auf $(x_0 - \delta, x_0]$ und wächst strikt auf $[x_0, x_0 + \delta)$ gemäß Satz 5.24 b). Wie in a) folgt nun die Behauptung. □

Bemerkung 5.26. a) Wenn in Korollar 5.25 die Gleichungen $0 = f'(x_0) = f''(x_0)$ gelten, dann ist keine allgemeine Aussage möglich. Man betrachte dazu die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^3$, und $g_\pm : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $g_\pm(x) = \pm x^4$, deren erste und zweite Ableitungen bei $x = 0$ verschwinden. Hierbei hat f keine lokale Extremstelle, g_+ bei 0 ein striktes globales Minimum und g_- bei 0 ein striktes globales Maximum. Die Abbildungen $g_\pm$ belegen auch, dass in Korollar 5.25 b) die Implikation '$\Leftarrow$' im Allgemeinen falsch ist.

b) Das folgende einfache Beispiel illustriert die Rolle der Randextrema (die in den obigen Ergebnissen nicht behandelt werden).

Sei $f : [-3, 2] \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^3 - 3x$. Diese Funktion hat die Ableitungen $f'(x) = 3x^2 - 3$ und $f''(x) = 6x$. Daraus ergeben sich die folgenden Aussagen.

1) Genau dann gilt $f'(x) = 0$, wenn $x^2 = 1$, also $x = \pm 1$, ist.

2) Wir haben $f''(-1) = -6 < 0$ und $f''(1) = 6 > 0$.

Korollar 5.25 zeigt nun, dass $f(-1) = 2$ ein striktes lokales Maximum ist und $f(1) = -2$ ein striktes lokales Minimum. Ferner hat f wegen 1) und Satz 5.18 auf $(-3, 2)$ keine weiteren lokalen Extrema.

Nach Theorem 4.24 hat f ein globales Maximum und ein globales Minimum. Wenn sie bei $\xi \in (-3, 2)$ angenommen werden, muss ξ gemäß der obigen Überlegung gleich -1 oder 1 sein. An den Intervallrändern gelten ferner $f(-3) = -18$ und $f(2) = 2$. Somit ist $f(-3) = -18$ das globale Minimum und $f(-1) = f(2) = 2$ das globale Maximum, welche nur an diesen Stellen angenommen werden.

Weiter ist f' auf $(-3, -1) \cup (1, 2)$ positiv und auf $(-1, 1)$ negativ. Wegen Satz 5.24 wächst es also strikt auf $[-3, -1]$ und auf $[1, 2]$, und fällt strikt auf $[-1, 1]$. ◇

Wir diskutieren nun Eigenschaften, in denen sich etwa die auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ strikt wachsenden Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ unterscheiden.

Definition 5.27. *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt* konvex *(*konkav*), wenn sie*

$$\forall\, x, y \in I \quad \forall\, t \in [0, 1] : \quad f((1-t)x + ty) \underset{(\geq)}{\leq} (1-t)f(x) + tf(y)$$

erfüllt. Man nennt $\xi = (1-t)x + ty = x + t(y - x)$ Konvexkombination.

Solche f kann man also in Konvexkombinationen hineinziehen und erhält zumindest eine Unleichung. (Bei einem linearen f hat man Gleichheit.) Ferner liegt der Graph einer konvexen Funktion f über $[x, y]$ unterhalb der Strecke zwischen $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$, wobei $x < y$ sei. Man beachte, dass $[x, y] = \{(1-t)x +$

$ty \,|\, t \in [0,1]\}$ gilt. (Für gegebenes $z \in [x,y]$ wähle man $t = (z-x)/(y-x)$.) Eine Funktion f ist genau dann konkav, wenn $-f$ konvex ist.

Für alle $m, a \in \mathbb{R}$ ist die affine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = mx + a$, konvex und konkav. Die Funktion $g(x) = |x|$ ist konvex auf $\mathbb{R}$ (aber nicht differenzierbar in 0), da $|(1-t)x + ty| \le (1-t)|x| + t|y|$ gilt.

Man kann diese beide Eigenschaften bequem durch die zweite Ableitung charakterisieren, falls diese existiert.

Satz 5.28. *Für eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ gelten die folgenden Aussagen.*

a) f ist genau dann konvex (bzw. konkav), wenn f' wächst (bzw. fällt).

b) Sei f zusätzlich zweimal differenzierbar. Dann ist f genau dann konvex (bzw. konkav), wenn $f''(x) \ge 0$ (bzw. $f''(x) \le 0$) für alle $x \in I$ gilt.

Beweis. Nach Satz 5.24 folgt Aussage b) aus a). Um a) zu zeigen, seien $x, y \in I$ mit $x < y$, $t \in (0,1)$ und $\xi := (1-t)x + ty \in (x,y)$. Wir betrachten nur den konvexen Fall, den konkaven behandelt man mit $-f$.

1) Es wachse f'. Theorem 5.21 liefert dann Punkte $u \in (x,\xi)$ und $v \in (\xi, y)$ mit

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{t(y-x)} = \frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x} = f'(u) \le f'(v) = \frac{f(y)-f(\xi)}{y-\xi} = \frac{f(y)-f(\xi)}{(1-t)(y-x)},$$

wobei die Ungleichung $u \le v$ einging. Mittels $y > x$ und $t \in (0,1)$, folgern wir die Relation $(1-t)(f(\xi)-f(x)) \le t(f(y)-f(\xi))$, woraus sich die Konvexität ergibt.

2) Es nun f konvex. Da $t(y-x) > 0$ gilt, erhalten wir daraus die Abschätzung

$$\begin{aligned}\frac{f(x+t(y-x))-f(x)}{t(y-x)} = \frac{f((1-t)x+ty)-f(x)}{t(y-x)} &\le \frac{(1-t)f(x)+tf(y)-f(x)}{t(y-x)}\\ &= \frac{f(y)-f(x)}{y-x} =: D.\end{aligned}$$

Im Grenzwert $t \to 0^+$ impliziert diese Ungleichung mit Satz 4.6, dass $f'(x) \le D$ gilt. Entsprechend zeigt man die untere Schranke

$$\frac{f(y+(1-t)(x-y))-f(y)}{(1-t)(x-y)} \ge D$$

und damit $f'(y) \ge D$ im Limes $t \to 1^-$. Also wächst f'. □

Mittels der obigen Charakterisierung, untersuchen wir einige Funktionen auf Konvexität oder Konkavität, und leiten damit Ungleichungen her.

Beispiel 5.29. a) Die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}; f(x) = x^\alpha$, ist für $\alpha \in (-\infty, 0] \cup [1,\infty)$ konvex und für $\alpha \in [0,1]$ konkav. Dies folgt aus Satz 5.28 und den Ungleichungen

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \begin{cases} \ge 0, & \alpha \in (-\infty,0] \cup [1,\infty), \\ \le 0, & \alpha \in [0,1], \end{cases} \qquad \text{für } \; x > 0.$$

b) Sei $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$; $f(x) = \sin(x)$. Da $\sin'' = -\sin \leq 0$ auf $[0, \pi]$ gilt, ist f konkav. Seien $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ und $t := \frac{2x}{\pi} \in (0, 1)$. Mit $x = (1-t)0 + t\frac{\pi}{2}$ folgt dann die Ungleichung $\sin x \geq (1-t)\sin 0 + t \sin\frac{\pi}{2} = \frac{2x}{\pi}$.

c) Für alle $x, y > 0$ und $p \in (1, \infty)$ gilt

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{p'}y^{p'}, \qquad \text{(Youngsche Ungleichung)}$$

wobei $p' := \frac{p}{p-1}$ und somit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ sind.

Beweis. Der Logarithmus $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist nach Satz 5.28 konkav, da $\ln'(x) = 1/x$ und $\ln''(x) = -x^{-2} < 0$ für $x > 0$ gelten. Mit $t := \frac{1}{p'} \in (0, 1)$ (also $(1-t) = \frac{1}{p}$) und Bemerkung 4.48 folgt damit

$$\ln\left(\tfrac{1}{p}\, x^p + \tfrac{1}{p'}\, y^{p'}\right) \geq \tfrac{1}{p}\ln(x^p) + \tfrac{1}{p'}\ln(y^{p'}) = \ln x + \ln y.$$

Wenn wir hierauf exp anwenden, erhalten wir die gewünschte Ungleichung

$$\tfrac{1}{p}\, x^p + \tfrac{1}{p'}\, y^p \geq \exp(\ln x + \ln y) = xy. \qquad \square$$

Die folgende *L'Hospitalsche Regel* erlaubt es oft, Grenzwerte vom Typ '$\frac{0}{0}$' oder '$\frac{\infty}{\infty}$' zu berechnen. Wenn dabei die Voraussetzung B) vorliegt und f beschränkt ist, folgt übrigens $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$ für $x \to b^-$ schon aus Bemerkung 4.7.

Theorem 5.30. *Es seien $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Es existiere entweder*

A) $\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) = 0$, oder

B) $\lim_{x\to b^-} g(x) \in \{-\infty, \infty\}$ (im uneigentlichen Sinne).

Ferner existiere $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ für ein $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ (im uneigentlichen Sinne für $\ell = \pm\infty$). Dann existiert $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ in $\overline{\mathbb{R}}$. (Entsprechendes gilt für $x \to a^+$.)

Beweis. Wir behandeln nur den Limes für $x \to b^-$, der für $x \to a^+$ kann analog untersucht werden. Da g' nirgends verschwindet, ist g nach Satz 5.24 injektiv und hat somit höchstens eine Nullstelle $x_0 \in (a, b)$. Wenn es keine Nullstelle geben sollte, setzen wir $x_0 = a$. Die Funktion f/g ist nun auf (x_0, b) definiert. Wir zeigen nun für f/g getrennt eine obere und eine untere Abschätzung, die dann den behaupteten Grenzwert implizieren.

1) Sei zuerst $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Seien $\ell_0 > \ell_1 > \ell$ beliebig gegeben. Aufgrund der Voraussetzung und Satz 4.5 bzw. Bemerkung 4.7, gibt es so eine Zahl $x_1 \in (x_0, b)$, dass die Ungleichung

$$\frac{f'(u)}{g'(u)} \leq \ell_1 \qquad \text{für alle } \; u \in [x_1, b)$$

gilt. Wir wählen $x \in [x_1, b)$ und betrachten $y \in (x, b)$. Theorem 5.21 liefert dann eine Stelle $\xi \in (x, y)$ mit

$$(f(y) - f(x))g'(\xi) = f'(\xi)(g(y) - g(x)).$$

Wegen der Vorüberlegung und der Annahme können wir dividieren und erhalten

$$\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \le \ell_1 < \ell_0, \tag{5.5}$$

da $\xi > x \ge x_1$. Wenn nun A) gilt, so ergibt sich schon

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to b^-} \frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} \le \ell_1 < \ell_0 \qquad \text{für alle } \ x \in [x_1, b). \tag{5.6}$$

Es gelte B). Dabei sei zuerst $\lim_{x\to b^-} g(x) = \infty$. Nach Bemerkung 4.7 gibt es dann so eine Zahl $x_2 \in (x, b)$, dass die Abschätzung $g(y) > \max\{0, g(x)\}$ für alle $y \in [x_2, b)$ erfüllt ist. Für $y \in [x_2, b)$ liefert damit (5.5) die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \ell_1 &\ge \frac{f(y)-f(x)}{g(y)} \frac{g(y)}{g(y)-g(x)}, \\ \frac{f(y)}{g(y)} &\le \frac{g(y)-g(x)}{g(y)}\ell_1 + \frac{f(x)}{g(y)} = \Big(1 - \frac{g(x)}{g(y)}\Big)\ell_1 + \frac{f(x)}{g(y)}. \end{aligned}$$

Gemäß der Annahme B) und Bemerkung 4.7, konvergiert die rechte Seite für $y \to b^-$ gegen ℓ_1. Wir finden also so eine Stelle $x_3 \in [x_2, b)$, dass

$$\frac{f(y)}{g(y)} \le \ell_0 \qquad \text{für alle } \ y \in [x_3, b) \tag{5.7}$$

gilt. Diese Aussage zeigt man entsprechend, wenn man $\lim_{x\to b^-} g(x) = -\infty$ annimmt. Sie folgt auch im Fall A) aus der Ungleichung (5.6). Wenn $\ell = -\infty$ ist, schließen wir aus (5.7) schon die Behauptung, da ℓ_0 beliebig gewählt werden kann (vergleiche Bemerkung 4.7).

2)[3] Sei nun $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Wähle $\ell_0' < \ell_1' < \ell$. Wie in Schritt 1) erhalten wir eine Zahl $x_1' \in (x_0, b)$ mit $\frac{f'(u)}{g'(u)} \ge \ell_1'$ für alle $u \in [x_1', b)$. Wir betrachten $x \in [x_1', b)$ und $y \in (x, b)$. Theorem 5.21 liefert eine Stelle $\xi' \in (x, y)$ mit

$$(f(y) - f(x))g'(\xi') = f'(\xi')(g(y) - g(x)),$$

woraus wie oben

$$\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} = \frac{f'(\xi')}{g'(\xi')} \ge \ell_1' > \ell_0'$$

folgt. Im Falle A) ergibt sich

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to b^-} \frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} \ge \ell_1' > \ell_0' \qquad \text{für alle } \ x \in [x_1', b).$$

Alternativ gelte $\lim_{x\to b^-} g(x) = \infty$, und somit $g(y) > \max\{0, g(x)\}$ für alle $y \in [x_2', b)$ und eine Stelle $x_2' \in (x, b)$. Für $y \in [x_2', b)$ schließen wir

$$\ell_1' \le \frac{f(y)-f(x)}{g(y)} \frac{g(y)}{g(y)-g(x)} \qquad \text{und} \qquad \frac{f(y)}{g(y)} \ge \Big(1 - \frac{g(x)}{g(y)}\Big)\ell_1' + \frac{f(x)}{g(y)}.$$

[3] In der Vorlesung wurde dieser Schritt stark abgekürzt.

Gemäß der Annahme strebt die rechte Seite für $y \to b^-$ gegen ℓ_1'. Analog behandelt man $g(x) \to -\infty$. Wir finden also insgesamt so eine Stelle $x_3' \in (x_0, b)$, dass

$$\frac{f(y)}{g(y)} \geq \ell_0' \qquad \text{für alle} \;\; y \in (x_3', b) \tag{5.8}$$

erfüllt ist. Diese Abschätzung liefert die Behauptung im Falle $\ell = \infty$ alleine.

Sei $\ell \in \mathbb{R}$. Für gegebenes $\varepsilon > 0$ kann man hier $\ell_0 = \ell + \varepsilon$ und $\ell_0' = \ell - \varepsilon$ wählen. Die Behauptung ergibt sich dann aus (5.7) und (5.8). □

Die nächsten Beispielen illustrieren, wie man die L'Hospitalsche Regel auch iteriert anwenden und wie den vorliegenden Term auf die Gestalt f/g für geeignete f und g bringen muss. Weiter läßt sich die Regel mit der Stetigkeit bekannter Funktionen kombinieren. Siehe auch die Übungen. In Hinblick auf Teil e) ist es wichtig, stets das Vorliegen der Fälle A) oder B) in Theorem 5.30 zu überprüfen.

Beispiel 5.31. a) Es existiert $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$. (Genauso gilt $\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\sin x} = 1$.)

Beweis. Hier wählt man $f, g : (0, \pi/2) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ und $g(x) = \sin x$. Dann gelten $g'(x) = \cos x > 0$ für $x \in (0, \pi/2)$, sowie $f(x) \to 0$ und $g(x) \to 0$ für $x \to 0^+$. Somit ist A) in Theorem 5.30 erfüllt. Ferner konvergiert

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{\cos x} \;\longrightarrow\; 1, \qquad x \to 0^+.$$

Also folgt die Behauptung aus der L'Hospitalschen Regel. □

b) Sei $\alpha > 0$ fest. Es existiert $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$.

Beweis. Es sei $g(x) = x^{-\alpha}$. Die L'Hospitalsche Regel zeigt von rechts nach links die Existenz der Limiten

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0.$$

Hier gilt B) in Theorem 5.30, da $g(x)$ und $g'(x)$ für $x \to 0^+$ uneigentlich gegen ∞ bzw. $-\infty$ streben. □

c) Mit der Stetigkeit von $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folgt aus b) die Existenz des Grenzwerts $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} \exp(x \ln x) = 1$.

d) Es existiert $\lim_{x\to\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung für $n = 2$; der allgemeine Fall folgt per Induktion. Eine zweimalige Anwendung der L'Hospitalschen Regel impliziert die Gleichungen

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^x} = 0,$$

wobei jeweils die Nenner für $x \to \infty$ uneigentlich gegen ∞ streben. □

e) Für die Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = \cos x$ gelten bei $a = 0$ weder A) noch B) in Theorem 5.30. Hier erhält man direkt $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$. L'Hospital würde das **falsche** Ergebnis $\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-\sin x} = -\infty$ liefern! ◇

5.3. Der Satz von Taylor und Potenzreihen

Im ersten Teil des Abschnitts werden wir Theorem 5.12 beweisen und Potenzreihen ableiten. Dazu zeigen wir zuerst einen allgemeinen Konvergenzsatz zum Vertauschen von Ableitung und n-Grenzwert bei Funktionenfolgen $(f_n)_n$. Danach diskutieren wir den Satz von Taylor, der mehrfach differenzierbare Funktionen besser als mit Tangenten approximiert (vergleiche Bemerkung 5.2).

Wir beginnen mit einfachen Beispielen, in denen (unendlich oft) differenzierbare Funktionen f_n gleichmäßig gegen eine Abbildung f konvergieren, und trotzdem ist diese nicht differenzierbar bzw. (f_n') konvergiert nicht gegen f'.

Beispiel 5.32. a) Seien $f_n, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f_n(x) = \sqrt{x^2 + n^{-2}}$, $f(x) = |x|$ für $n \in \mathbb{N}$. Laut Beispiel 4.40 strebt $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen f. Hier liegt f_n in $C^\infty(\mathbb{R})$ und f ist bei $x = 0$ nicht differenzierbar, siehe Beispiele 5.9 und 5.3. Dabei konvergiert

$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + n^{-2}}} \longrightarrow g(x) := \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

punktweise für $n \to \infty$. Wegen $f_n'(\frac{1}{n}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, strebt (f_n') nicht gleichmäßig gegen g.

b) Die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$, konvergieren für $n \to \infty$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen die (differenzierbare) Nullfunktion $f = 0$. Trotzdem divergiert z.B. $f_n'(0) = \sqrt{n}\cos(n0) = \sqrt{n}$ für $n \to \infty$. ◊

Der folgende Hauptsatz zeigt, dass der punktweise Limes f einer Folge differenzierbarer Funktionen $(f_n)_n$ auch differenzierbar ist, wenn (f_n') *gleichmäßig* gegen eine Abbildung g konvergiert und es gilt $f' = g$. Es ist hier also erlaubt, Limes und Ableitung zu vertauschen. Man kann dabei 'punktweise' und 'gleichmäßig' nicht vertauschen, wie Beispiel 5.32 a) belegt.

Theorem 5.33. *Gegeben seien Funktionen $f_n \in C^1([a,b])$ und $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ derart, dass $f_n \to f$ punktweise und $f_n' \to g$ gleichmäßig auf $[a,b]$ für $n \to \infty$ konvergieren. Dann liegt f in $C^1([a,b])$ und es gilt $f' = g$; wir erhalten also*

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x).$$

Beweis. Sei $x \in I$ fest gewählt. Wir werden direkt zeigen, dass $f'(x) = g(x)$ existiert. Dazu approximieren wir punktweise den Differenzenquotienten von f durch den von f_n. Der Mittelwertsatz erlaubt es dann den für $y \to 0$ verschwindenden Nenner $y - x$ zu beseitigen. Wir benötigen zwei Vorbereitungen zur Behandlung der auftretenden Terme.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Voraussetzung finden wir einen Index $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n' - g\|_\infty \le \varepsilon$ für alle $n \ge N_\varepsilon$. Ferner liefert Theorem 4.19 so einen Abstand $\delta_\varepsilon > 0$, dass alle $u, v \in I$ mit $|u - v| \le \delta_\varepsilon$ die Ungleichung $|g(u) - g(v)| \le \varepsilon$ erfüllen.

Betrachte $y \in I$ mit $|x-y| \le \delta_\varepsilon$. Nach Theorem 5.21 existiert eine Stelle $\xi_n = \xi_{n,x,y}$ zwischen x und y mit

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - g(x)\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_n(y)-f_n(x)}{y-x} - g(x)\right| = \lim_{n\to\infty}|f_n'(\xi_n) - g(x)|.$$

Dabei ist $|x-\xi_n| \le \delta_\varepsilon$. Um die Vorbereitungen zu benutzen, fügen wir $\pm g(\xi_n)$ ein und erhalten

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - g(x)\right| \le \varlimsup_{n\to\infty}\big(|f_n'(\xi_n) - g(\xi_n)| + |g(\xi_n) - g(x)|\big) \le 2\varepsilon. \qquad \square$$

Oben benötigt man wesentlich die gleichmäßige Konvergenz $f_n' \to g$ und die gleichmäßige Stetigkeit von g, da man keine weiteren Informationen über ξ_n hat. Nun folgt leicht die gewünschte Ableitungsregel für Potenzreihen in Theorem 5.12, das wir auch etwas ergänzen. Im Beweis und weiterhin schreiben wir gelegentlich $f(x) = \sum_{k\ge 0} a_k x^k$ für eine Potenzreihe. Wir denken dabei an die zugehörige Funktion $f : (-\rho,\rho) \to \mathbb{R}$; $f(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k$, im Falle eines Konvergenzradius $\rho > 0$.

Korollar 5.34. *Es sei $\sum_{k\ge 0} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann hat auch die Potenzreihe $\sum_{k\ge 1} k a_k x^{k-1}$ den Konvergenzradius ρ. Weiter ist die Funktion $f : (-\rho,\rho) \to \mathbb{R}$; $f(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k$, differenzierbar mit*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^\infty k a_k x^{k-1} \qquad \text{für } \ x \in (-\rho,\rho).$$

Außerdem liegt f in $C^\infty((-\rho,\rho))$ und $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Aus Satz 2.30 und einer Übung folgt zunächst die Gleichung

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k\,|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} \cdot \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1/\rho.$$

Somit hat die Potenzreihe $h(x) = \sum_{k\ge 1} k a_k x^k$ den Konvergenzradius ρ. Die Charakterisierung von ρ in Theorem 3.29 zeigt nun, dass auch $g(x) = h(x)/x = \sum_{k\ge 1} k a_k x^{k-1}$ den Konvergenzradius ρ besitzt.

Das Polynom $f_n : (-\rho,\rho) \to \mathbb{R}$; $f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, strebt für $n \to \infty$ punktweise gegen $f(x)$. Sei $|x| < r < \rho$. Korollar 4.44 impliziert, dass die Ableitung $f_n'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$ gleichmäßig auf $[-r,r]$ gegen $g(x) = \sum_{k=1}^\infty k a_k x^{k-1}$ konvergiert. Aus Theorem 5.33 schließen wir dann, dass f auf $(-r,r)$ (und damit auf $(-\rho,\rho)$) die Ableitung g hat. Dies kann man iterieren, sodass f unendlich oft differenzierbar ist. Dabei gilt etwa $f''(x) = \sum_{k=2}^\infty k(k-1)a_k x^{k-2}$ für $x \in (-\rho,\rho)$. Indem man $x = 0$ einsetzt, erhält man die letzte Behauptung. $\square$

Wir folgern nun leicht den wichtigen *Identitätssatz für Potenzreihen*. Diese sind schon gleich, wenn sie auf einem kleinen Intervall um 0 übereinstimmen. Für andere Funktionen ist das natürlich falsch. Der Korollar besagt insbesondere, dass die Koeffizienten einer Potenzreihe eindeutig bestimmt sind.

Korollar 5.35. *Es seien* $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *und* $g(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ *Potenzreihen mit Konvergenzradius* $\rho^f, \rho^g > 0$. *Es existiere so eine Zahl* $0 < \delta < \min\{\rho^f, \rho^g\}$, *dass* $f(x) = g(x)$ *für alle* $x \in (-\delta, \delta)$ *gilt. Dann folgen schon die Identitäten* $a_n = b_n$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}_0$, *sowie* $f(x) = g(x)$ *für* $|x| < \rho^f = \rho^g$.

Beweis. Nach Korollar 5.34 liegen f und g in $C^\infty((-\rho, \rho))$. Die Annahme impliziert dann die Gleichheit von $f^{(n)}(0)$ und $g^{(n)}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Somit folgt die Behauptung aus dem letzten Teil von Korollar 5.34. □

Nach Korollar 5.34 hat ein Polynom f vom Grad n die Darstellung $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Wie wollen nun mit diesem Ansatz jede n-mal stetig differenzierbare Funktion f in der Nähe eines Punktes x_0 durch ein Polynom vom Grad n approximieren. Dies führt auf die folgenden Begriffe.

Definition 5.36. *Seien* $n \in \mathbb{N}$, I *offen,* $x_0 \in I$ *und* $f : I \to \mathbb{R}$ n*–fach differenzierbar. Das* n-te Taylorpolynom *von* f *im* Entwicklungspunkt x_0 *wird durch*

$$T_{n,x_0} f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

für $x \in \mathbb{R}$ *definiert. Wir nennen* $R_{n,x_0} f := f - T_{n,x_0} f$ *das* n–te Taylor–Restglied *von* f *in* x_0. *Sei* f *in* x_0 *beliebig oft differenzierbar. Dann ist*

$$T_{x_0} f(x) := \sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

die Taylorreihe *von* f *im Entwicklungspunkt* x_0.

Bemerkung 5.37. Es gelten $T_{n,x_0} f(x_0) = f(x_0)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $T_{0,x_0} f(x) = f(x_0)$. Weiter ist $T_{1,x_0} f$ gerade die Tangente an f bei x_0. Wenn man $h = x - x_0$ setzt, wird aus einer Taylorreihe die Potenzreihe $\sum_{k\geq 0} a_k h^k$ mit $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. ◊

Der folgende bedeutende *Satz von Taylor* zeigt die gewünschte Approximationseigenschaft. Man hat keine weiteren Informationen über $\theta \in (0, 1)$, das von n und x abhängen kann. Man beachte, dass der Punkt $x_\theta = x_0 + \theta(x - x_0)$ zwischen x_0 und x liegt. Es gibt weitere Restgliedformeln, z.B. ersetzen wir in Analysis 2 die Auswertung von $f^{(n)}$ an der Zwischenstelle x_θ durch ein Integral über u.a. $f^{(n)}$.

Theorem 5.38. *Es seien* $n \in \mathbb{N}$, I *offen,* $x, x_0 \in I$ *und* $f : I \to \mathbb{R}$ n*–mal differenzierbar. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a) Es gibt so eine Zahl $\theta = \theta_{x,n} \in (0, 1)$, *dass das* $(n - 1)$*-te Restglied*

$$f(x) - T_{n-1,x_0} f(x) = R_{n-1,x_0} f(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big)(x - x_0)^n$$

erfüllt. (Lagrangesche Restgliedformel) *b) Es gebe zusätzlich ein $M_n \geq 0$ mit $|f^{(n)}(y)| \leq M_n$ für alle $y \in I$. Dann folgt*

$$|f(x) - T_{n,x_0} f(x)| = |R_{n,x_0} f(x)| \leq \frac{2M_n}{n!} |x - x_0|^n.$$

c) Sei $f \in C^n(I)$. Dann strebt $|x - x_0|^{-n} \, |R_{n,x_0} f(x)|$ für $x \to x_0$ gegen 0.

d) Wenn f in $C^\infty(I)$ liegt und $R_{n,x_0} f(x) \to 0$ für ein $x \in I$ und $n \to \infty$ gilt, dann konvergiert die Taylorreihe $T_{x_0} f(x)$ gegen $f(x)$.

Beweis. Wir wenden den Mittelwertsatz auf die differenzierbaren Funktionen

$$p(t) = (1-t)^n \quad \text{und} \quad g(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0 + t(x - x_0))}{k!} \, (x - x_0)^k \, (1-t)^k$$

für $t \in [0,1]$ an, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $x, x_0 \in I$ fest gewählt sind. Es gelten

$$g(0) = T_{n-1,x_0} f(x), \quad g(1) = f(x), \quad p(0) = 1, \quad p(1) = 0.$$

Theorem 5.21 liefert nun eine Zwischenstelle $\theta \in (0,1)$ mit

$$(g(1) - g(0)) p'(\theta) = (p(1) - p(0)) g'(\theta).$$

Da $p'(\theta) = -n(1-\theta)^{n-1} \neq 0$ ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(x) - T_{n-1,x_0} f(x) &= \frac{(1-\theta)^{1-n}}{n} \Bigg[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{k!} \, (x - x_0)^{k+1} \, (1-\theta)^k \\
&\qquad - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(k-1)!} \, (x - x_0)^k \, (1-\theta)^{k-1} \Bigg] \\
&= \frac{(1-\theta)^{1-n}}{n} \, \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n-1)!} \, (x - x_0)^n \, (1-\theta)^{n-1} \\
&= \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!} \, (x - x_0)^n,
\end{aligned}$$

sodass a) gezeigt ist. (Substituiere $j = k - 1$ in der zweiten Summe.) Mit der Beziehung

$$T_{n,x_0} f(x) = T_{n-1,x_0} f(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \, (x - x_0)^n$$

folgt aus a) die Gleichung

$$\begin{aligned}
|f(x) - T_{n,x_0} f(x)| &= \left| f(x) - T_{n-1,x_0} f(x) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \, (x - x_0)^n \right| \\
&= \frac{1}{n!} \left| f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0)) - f^{(n)}(x_0) \right| |x - x_0|^n.
\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Behauptungen b) und c). Die Aussage d) ist eine direkte Konsequenz von Definition 5.36. □

Der Satz von Taylor erlaubt es, glatte Funktionen in der Nähe von x_0 sehr gut durch Polynome zu approximieren. Ferner kann er helfen eine Reihendarstellung einer gegebenen C^∞-Funktion herzuleiten. Wir geben typische Beispiele an.

BEISPIEL 5.39. a) Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$ und $n = 5$. Dann gelten $f(0) = 0$, $f'(0) = \cos 0 = 1$, $f''(0) = -\sin 0 = 0$, $f^{(3)}(0) = -\cos 0 = -1$, $f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0$ und $f^{(5)} = \cos$. Daraus folgen $T_{4,0}f(x) = x - \frac{1}{6}x^3$ und $|f^{(5)}(x)| \le 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit liefert Theorem 5.38 a) die Abschätzung

$$|R_{4,0}f(x)| = \Big|\sin x - \Big(x - \frac{x^3}{6}\Big)\Big| \le \frac{|x|^5}{120} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

was für $|x| \le \frac{1}{10}$ auf $|R_{4,0}f(x)| \le 10^{-7}$ führt. Das (unbeschränkte) Taylorpolynom ist aber für größere $|x|$ eine sehr schlechte Approximation von sin.

b) (Logarithmusreihe) Es gelten

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \text{für } -1 < x \le 1 \quad \text{und somit} \quad \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

BEWEIS. Sei $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = \ln(1+x)$. Es gelten $f'(x) = (1+x)^{-1}$, $f''(x) = -(1+x)^{-2}$, $f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3}$ und induktiv

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \qquad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

für $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$. Sei nun $x \in [-1/2, 1]$ und $n \in \mathbb{N}$. Nach Theorem 5.38 gibt es eine Zahl $\theta \in (0,1)$ mit

$$\begin{aligned} |R_{n,0}f(x)| &= \frac{|f^{(n+1)}(\theta x)|\,|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{n!\,|x|^{n+1}}{(n+1)!\,|1+\theta x|^{n+1}} \\ &\le \left\{ \begin{matrix} \frac{x^{n+1}}{n+1}, & 0 \le x \le 1, \\ \frac{1}{n+1}\left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^{n+1}, & -\frac{1}{2} \le x < 0, \end{matrix} \right\} \le \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Im Grenzwert $n \to \infty$ folgt die Behauptung für $x \in [-1/2, 1]$. Der Fall $x \in (-1, -1/2)$ kann mit einer anderen Restgliedformel ähnlich gezeigt werden, siehe Abschnitt IV.3.9(d) in [1]. □

Die folgende Schreibweise erweist sich gerade in Anwendungen als nützlich.

DEFINITION 5.40. *Seien $n \in \mathbb{Z}$, $r > 0$ und $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$. Es gebe eine Konstante $c \ge 0$ mit $|f(x)| \le c|x|^n$ für alle $x \in (-r, r)$. Dann setzt man $f(x) = \mathcal{O}(|x|^n)$ für $x \to 0$. Falls sogar $\frac{|f(x)|}{|x|^n} \to 0$ für $x \to 0$ konvergiert, schreibt man $f(x) = o(|x|^n)$ für $x \to 0$. Die Fälle $x \to 0^\pm$ und $x \to \pm\infty$ behandelt man analog.*

Aus der obigen Definition folgt leicht $x^m \mathcal{O}(|x|^n) = \mathcal{O}(|x|^{m+n})$ für $x \to 0$ für alle $m, n \in \mathbb{Z}$, und ebenso für o. Sei $m < n$. Dann impliziert $f(x) = \mathcal{O}(|x|^n)$ auch

$f(x) = \mathcal{O}(|x|^m)$ für $x \to 0$, da $|x|^n \leq r^{n-m}|x|^m$ für $|x| \leq r$ gilt. In Theorem 5.38 a) folgt $R_{n,x_0}f(x) = \mathcal{O}(|x-x_0|^{n+1})$ für $x \to x_0$ und $f \in C^n((a,b))$, siehe die Übungen.

Wir illustrieren diese *Landausymbole* durch zwei Beispiele. Dabei diskutieren wir die *Binomialreihe* und eine Funktion f, die **unlgeich** ihrer Taylorreihe ist.

Beispiel 5.41. a) Mit Hilfe der obigen Regeln folgt aus Beispiel 5.39 a)

$$\begin{aligned} g(x) = (x + \tfrac{1}{x}) \sin x = (x + \tfrac{1}{x})\big(x - \tfrac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(|x|^5)\big) \\ &= x^2 - \tfrac{1}{6}x^4 + \mathcal{O}(|x|^6) + 1 - \tfrac{1}{6}x^2 + \mathcal{O}(|x|^4) \\ &= 1 + \tfrac{5}{6}x^2 + \mathcal{O}(|x|^4), \qquad x \to 0. \end{aligned}$$

b) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert man die *verallgemeinerten Binomialkoeffizienten*

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!} \qquad \text{und} \qquad \binom{\alpha}{0} := 1.$$

Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0$. Für $n > \alpha$ ist dann $\binom{\alpha}{n} = 0$, und für $\alpha \geq n$ stimmt die obige Definition mit der des Binomialkoeffizienten vor (0.1) überein. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad \text{für } x \in (-1,1). \tag{5.9}$$

Im Falle eine Polynoms mit $\alpha \in \mathbb{N}_0$ bricht diese Reihe ab und man erhält den binomischen Satz aus Beispiel 0.3. Wir geben zwei Zahlenbeispiele an:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \mathcal{O}(|x|^4), \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \mathcal{O}(|x|^4).$$

Die Aussage (5.9) wird etwa in Satz 22.7 von [**3**] bewiesen. Dabei folgt die Konvergenz der Reihe aus dem Quotientenkriterium Satz 3.14 und $|x| < 1$, da

$$\frac{\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}}{\binom{\alpha}{n}x^n} = x\,\frac{\alpha - n}{n+1} \;\longrightarrow\; -x$$

für $n \to \infty$ konvergiert. Um jedoch die behauptete Gleichung zu zeigen, benötigt man z.B. die Restglieddarstellung mittels des Integrals (vergleiche Analysis 2).

Wir diskutieren eine bekannte Anwendung aus der Physik. Sei c die Lichtgeschwindigkeit und $v \in (-c,c)$ die Geschwindigkeit eines Teilchens mit Masse $m > 0$. Dann hat das Teilchen die relativistische Energie

$$\begin{aligned} E(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} &= mc^2\Big(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \mathcal{O}\Big(\frac{v^6}{c^6}\Big)\Big) \\ &= mc^2 + \frac{m}{2}v^2 + \frac{3mv^4}{8c^2} + \mathcal{O}\Big(\frac{v^6}{c^4}\Big). \end{aligned}$$

Hier ist mc^2 die Ruheenergie, $\frac{m}{2}v^2$ die klassische kinetische Energie und $\frac{3mv^4}{8c^2}$ die ‘erste relativistische Korrektur’.

c) Sei $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ für $x > 0$ und $f(x) = 0$ für $x \le 0$. Induktiv beweist man, dass f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig oft differenzierbar ist und es für jedes $n \in \mathbb{N}$ so ein Polynom p_n gibt, dass $f^{(n)}(x) = p_n(1/x)f(x)$ für $x > 0$ gilt.

Bezüglich $x = 0$, liefert die Substitution $y = 1/x$ zunächst den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\infty} \mathrm{e}^{-y} = 0.$$

Somit ist f auf $\mathbb{R}$ stetig. Wir zeigen per Induktion, dass $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Es existiere dazu $f^{(n-1)}(0) = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Mittels Beispiel 5.31 folgern wir

$$\lim_{x\to 0^+} \tfrac{1}{x}\,(f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)) = \lim_{x\to 0^+} \tfrac{1}{x}\, p_{n-1}(\tfrac{1}{x})\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\infty} y\, p_{n-1}(y)\mathrm{e}^{-y} = 0.$$

Also liegt f in $C^\infty(\mathbb{R})$, und offenbar konvergiert $T_0 f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $x > 0$ ist aber der Reihenwert der Tayloreihe **ungleich** $f(x)$. $\diamondsuit$

Das obige Beispiel von Cauchy zeigt, dass es selbst für Funktionen f in $C^\infty(\mathbb{R})$ mit konvergenter Taylorreihe nicht klar ist, ob deren Grenzwert mit f übereinstimmt. Diese Frage klären wir erst im zweiten Studienjahr befriedigend.

Wir diskutieren eine Anwendung der bislang entwickelten Theorie in der numerischen Mathematik. Sei dazu $f \in C^2([a, b])$ mit $f(a)f(b) \le 0$. Nach dem Nullstellensatz Korollar 4.28 gibt es einen Punkt $x_* \in [a, b]$ mit $f(x_*) = 0$. Diese Nullstelle kann man aber oft nicht explizit angeben, sodass man sie zumindest mit iterativ berechenbaren Zahlen approximieren möchte.

Dazu nehmen wir an, wir hätten eine Approximation $x_n \in [a, b]$ gefunden. Wir definieren nun x_{n+1} als Nullstelle der Tangente t_n von f bei x_n, also durch

$$t_n(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \overset{!}{=} 0.$$

Wenn $f'(x_n) \ne 0$ ist, erhalten wir die Iterationsvorschrift des *Newton Verfahrens*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0. \tag{5.10}$$

Hier wird x_{n+1} durch in diesem Iterationsschritt bekannte Terme bestimmt.

Es ergeben sich aber sofort mehrere Fragen: Ist $f'(x_n) \ne 0$? Liegt x_{n+1} in $[a, b]$? Konvergiert das Verfahren – und wenn ja, wie schnell? Ist der Grenzwert eine Nullstelle von f, was geschieht im Falle mehrerer Nullstellen? Wie wählt man x_0, wann bricht man die Iteration ab? Wir beschränken uns hier auf einen einfachen Fall, in dem diese Schwierigkeiten gar nicht auftreten oder gelöst werden können.[4]

Theorem 5.42. *Es seien $a < b$ in $\mathbb{R}$ und $f \in C^2([a, b])$ mit $f(a)f(b) \le 0$ und $f'(x) \ne 0$ für alle $x \in [a, b]$. Weiter sei f konvex oder konkav. Wähle $x_0 = b$, wenn $f'(x) > 0$ und $f''(x) \ge 0$ oder wenn $f'(x) < 0$ und $f''(x) \le 0$ für alle $x \in [a, b]$ gelten. In den anderen Fällen wähle $x_0 = a$.*

[4]Der nächste Beweis und das abschließende Beispiel wurden in der Vorlesung ausgelassen.

Dann liegen die Punkte x_n *aus* (5.10) *für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *in* $[a,b]$ *und sie konvergieren gegen die einzige Nullstelle* x_* *von* f *in* $[a,b]$. *Setze weiter* $m = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)| > 0$ *und* $M = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| < \infty$. *Für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *genügt der Approximationsfehler dabei den Abschätzungen*

$$|x_{n+1} - x_*| \le \frac{M}{2m} |x_{n+1} - x_n|^2, \tag{5.11}$$

$$|x_{n+1} - x_*| \le \frac{M}{2m} |x_n - x_*|^2. \tag{5.12}$$

Beweis. Die Zahlen $M \ge 0$ und $m > 0$ existieren nach Theorem 4.24 und Korollar 4.25. Laut Korollar 4.28 und Satz 5.24 implizieren die Voraussetzungen, dass es genau eine Zahl $x_* \in [a,b]$ mit $f(x_*) = 0$ gibt. Wir betrachten nur den Fall, dass $f' > 0$ und $f'' \ge 0$ auf $[a,b]$ gelten; die anderen kann man analog behandeln. Aufgrund von Satz 5.24 und Bemerkung 4.33 wachsen dann die Funktionen f und f' auf $[a,b]$ und f^{-1} auf $f([a,b])$.

1) Wir behaupten zunächst, dass alle x_n in $[x_*, b]$ liegen und $(x_n)_n$ fällt. Wir haben $x_0 = b \in [x_*, b]$. Es gelte $x_n \in [x_*, b]$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Die Monotonie von f liefert somit die Ungleichung $f(x_n) \ge f(x_*) = 0$. Definition (5.10), die Ungleichung $f' > 0$ und die Induktionsvoraussetzung zeigen dann die obere Schranke

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \le x_n \le b.$$

Insbesondere fällt $(x_n)_n$, solange die Folge in $[x_*, b]$ bleibt. Um auch die Ungleichung $x_{n+1} \ge x_*$ herzuleiten, setzen wir

$$g(x) = f(x) - t_n(x) = f(x) - f(x_n) - f'(x_n)(x - x_n), \qquad x \in [a,b].$$

Für $x \in [a, x_n]$ ergibt sich $g'(x) = f'(x) - f'(x_n) \le 0$, sodass g auf $[a, x_n]$ fällt. Daraus und aus (5.10) folgen die Relationen

$$f(x_*) = 0 = g(x_n) \le g(x_{n+1}) = f(x_{n+1}) - f(x_n) - f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = f(x_{n+1}).$$

Da auch f^{-1} wächst, erhalten wir $x_{n+1} \ge x_*$ und damit die Zwischenbehauptung per Induktion.

2) Die fallende und nach unten beschränkte Folge $(x_n)_n$ konvergiert nach Theorem 2.14 gegen eine Zahl $y \ge x_*$. Wir können nun in (5.10) der Grenzwert $n \to \infty$ nehmen, was auf die Gleichung $y = y - f(y)/f'(y)$ führt. Also gelten $f(y) = 0$ und somit $y = x_*$.

3) Wenn $x_{n+1} = x_*$ ist, gilt natürlich (5.11). Es sei also $x_{n+1} > x_*$. Zunächst verwenden wir die Taylorentwicklung von f bei x_n. Gemäß Theorem 5.38 gilt für ein $\theta \in (0,1)$ die Gleichung

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{1}{2} f''\big(x_n + \theta(x_{n+1} - x_n)\big)(x_{n+1} - x_n)^2 \\ &= \frac{1}{2} f''\big(x_n + \theta(x_{n+1} - x_n)\big)(x_{n+1} - x_n)^2 \le \frac{M}{2}\,(x_{n+1} - x_n)^2, \end{aligned}$$

wobei wir auch (5.10) und die Voraussetzung verwendet haben. Andererseits liefert der Mittelwertsatz Theorem 5.21 eine Zwischenstelle $\xi \in (x_*, x_{n+1})$ mit

$$f(x_{n+1}) = f(x_{n+1}) - f(x_*) = f'(\xi)(x_{n+1} - x_*) \geq m(x_{n+1} - x_*).$$

Die beiden obigen Ungleichungen implizieren die Fehlerschranke (5.11).

Aus Theorem 5.38 erhalten wir auch eine Zahl $\tau \in (0,1)$ mit

$$0 = f(x_*) = f(x_n) + f'(x_n)(x_* - x_n) + \tfrac{1}{2} f''\big(x_n + \tau(x_* - x_n)\big)(x_* - x_n)^2.$$

Da $f'(x_n) \neq 0$ ist, ergibt sich

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + x_* - x_n = -\frac{f''(x_n + \tau(x_* - x_n))}{2f'(x_n)}\,(x_* - x_n)^2.$$

Mittels (5.10) folgern wir daraus (5.12) durch

$$|x_* - x_{n+1}| = \left| x_* - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right| \leq \frac{M}{2m} |x_n - x_*|^2.$$ □

Im letzten Beweisschritt sieht man, dass die Iteration (5.10) so gewählt wurde, dass der nullte und der erste Taylorterm verschwinden. Wegen der Ungleichung (5.12) spricht man von quadratischer Konvergenz des Newton-Verfahrens.

Das Heronverfahren aus Beispiel 2.15 ist ein Spezialfall mit $f : [0,b] \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2 - y$, für eine gegebene Zahl $y > 0$ und z.B. $b = \max\{1, y\}$. (Da man hier bei $x_0 = b$ startet, stört $f'(0) = 0$ nicht.)

Mit der Fehlerschranke (5.11) kann man den Fehler nach jedem Iterationsschritt durch bekannte Größen kontrollieren, was eine Abbruchbedingung bei einem vorgegebenen Maximalfehler ermöglicht. In Beispielen kann man versuchen, die Zahlen a und b so zu wählen, dass man möglichst kleine Konstanten M und $1/m$ erhält.

Beispiel 5.43. Man löse $x = \mathrm{e}^{-x}$ mit einem Fehler kleiner als $5 \cdot 10^{-7}$. Wir wählen dazu $f(x) = x - \mathrm{e}^{-x}$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann gelten $f'(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x} > 0$ und $f''(x) = -\mathrm{e}^{-x} < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist f auf $\mathbb{R}$ strikt wachsend und konkav. Weiter erhalten wir $f(x) < 0$ für alle $x \leq 0$ und $f(1) = 1 - 1/\mathrm{e} > 0$. Folglich ist Theorem 5.42 mit $a = 0$, $b = 1$ und $x_0 = 0$ anwendbar. Aus (5.10) ergibt sich die Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\mathrm{e}^{-x_n} - x_n}{\mathrm{e}^{-x_n} + 1}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$. Diese Zahlen konvergieren gegen die einzige Nullstelle x_* von f auf $\mathbb{R}$. Schließlich erhalten wir $f'(x) \geq 1 + 1/\mathrm{e} =: m$ und $|f''(x)| \leq 1 =: M$ für alle $x \in [0,1]$. Ungleichung (5.11) impliziert somit die Fehlerschranke

$$|x_{n+1} - x_*| \leq \frac{1}{2(1 + 1/\mathrm{e})}\,|x_{n+1} - x_n|^2$$

Wir berechnen $x_1 = 1/2$, $x_2 \approx 0{,}5663110$ und $x_3 \approx 0{,}5671432$. Daraus folgt $|x_3 - x_*| \leq \frac{1}{2} \cdot 6{,}925 \cdot 10^{-7}$, wie verlangt. ◊

Literaturverzeichnis

[1] H. Amann und J. Escher, *Analysis I.* Dritte Auflage. Birkhäuser, 2006.

[2] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, D. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel und R. Remmert, *Zahlen.* Dritte verbesserte Auflage. Springer, 1992.

[3] O. Forster, *Analysis 1.* Achte verbesserte Auflage. Vieweg & Sohn, 2006.

[4] K. Königsberger, *Analysis 1.* Sechste, durchgesehene Auflage. Springer, 2004.

[5] E. Landau, *Grundlagen der Analysis.* Dritte Auflage. Chelsea Publishing, 1960.

[6] W. Rudin, *Analysis.* Dritte Auflage. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2005.