

1. Fall: Gilt $x > 0$, so folgt aus (O·), dass $x^2 = x \cdot x > 0$.

2. Fall: Gilt $x < 0$, so folgt aus Satz 2.4 (i), dass $-x > 0$. Aus (a) (iii) und (O·) folgern wir dann

$$x^2 \stackrel{(a)(iii)}{=} (-x) \cdot (-x) \stackrel{(O\cdot)}{>} 0.$$

Insbesondere folgt für $x := 1 \neq 0$, dass $1 = 1^2 > 0$ ist.

(iii) Sei $x > 0$. Nach (ii) ist $(x^{-1})^2 > 0$ und daher folgt aus (O·), dass

$$x^{-1} \stackrel{(NE\cdot)}{=} 1 \cdot x^{-1} \stackrel{(IE\cdot)}{=} (x \cdot x^{-1}) \cdot x^{-1} \stackrel{(AG\cdot)}{=} x \cdot (x^{-1} \cdot x^{-1}) = x \cdot (x^{-1})^2 \stackrel{(O\cdot)}{>} 0.$$

Aufgabe 6 (K) (Rechenregeln in geordneten Körpern II)

(a) Es seien $a, c \in K$ und $b, d \in K \setminus \{0\}$. Leiten Sie aus den Körperaxiomen und den bisher bewiesenen Rechenregeln die folgenden Rechenregeln her.

$$(i) \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad (ii) \quad \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}, \quad (iii) \quad \frac{a}{b} \bigg/ \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}, \text{ wobei hier } c \neq 0.$$

(b) Es seien $a, b, c, d \in K$. Beweisen Sie:

(i) Wenn $0 > b > a$, dann gilt $0 > \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

(ii) Wenn $c > a > 0$ und $0 > d > b$, dann gilt $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

(iii) Wenn $b > 0$, $d > 0$ und $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, dann gelten $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6

(a) Es seien $a, c \in K$ und $b, d \in K \setminus \{0\}$. Wir benutzen im Folgenden die beiden in der Übung bewiesenen Regeln

$$(x^{-1})^{-1} = x \text{ und } (x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1} \quad \text{für alle } x, y \in K \setminus \{0\}. \quad (1)$$

(i) Es gilt

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \stackrel{\text{Def.}}{=} (ab^{-1}) \cdot (cd^{-1}) \stackrel{(AG\cdot)}{\stackrel{(KG\cdot)}{=}} (ac) \cdot (b^{-1}d^{-1}) \stackrel{(1)}{=} (ac) \cdot (bd)^{-1} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{ac}{bd}.$$

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} &\stackrel{\text{Def.}}{=} (ab^{-1}) \pm (cd^{-1}) \stackrel{(NE\cdot)}{=} (a \cdot 1 \cdot b^{-1}) \pm (c \cdot 1 \cdot d^{-1}) \\ &\stackrel{(IE\cdot)}{=} (a \cdot (d \cdot d^{-1}) \cdot b^{-1}) \pm (c \cdot (b \cdot b^{-1}) \cdot d^{-1}) \\ &\stackrel{(AG\cdot)}{\stackrel{(KG\cdot)}{=}} (ad) \cdot (d^{-1}b^{-1}) \pm (bc) \cdot (d^{-1}b^{-1}) \\ &\stackrel{(1)}{=} (ad)(bd)^{-1} \pm (bc)(bd)^{-1} \\ &\stackrel{(DG\cdot)}{=} (ad \pm bc) \cdot (bd)^{-1} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{ad \pm bc}{bd}. \end{aligned}$$

(iii) Sei zusätzlich $c \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \bigg/ \frac{c}{d} &\stackrel{\text{Def.}}{=} (ab^{-1})(cd^{-1})^{-1} \stackrel{(1)}{=} (ab^{-1})(c^{-1}(d^{-1})^{-1}) \\ &\stackrel{(1)}{=} (ab^{-1})(c^{-1}d) \stackrel{(AG\cdot)}{\stackrel{(KG\cdot)}{=}} (ad)(b^{-1}c^{-1}) \stackrel{(1)}{=} (ad)(bc)^{-1} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{ad}{bc}. \end{aligned}$$

- (b) (i) Wir erhalten unter Anwendung von Aufgabe 5 und Satz 2.4 aus der Vorlesung, dass

$$0 > b > a \xrightarrow{2.4(i)} -a > -b > 0 \xrightarrow[\cdot ((-a)(-b))^{-1}]{2.4(iii), A5(b)(iii)} \frac{1}{-b} > \frac{1}{-a} > 0 \xrightarrow{2.4(i)} 0 > \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

- (ii) Da nach Voraussetzung $0 > d > b$ gilt, folgt zunächst mit Aufgabe 6 (b) (i), dass $\frac{1}{d} < \frac{1}{b} < 0$. Mit Aufgabe 5, Satz 2.4 und der Transitivität (T) der Ordnungsrelation folgern wir

$$\left[c > a \text{ und } \frac{1}{d} < 0 \xrightarrow{A5(b)(i)} \frac{c}{d} < \frac{a}{d} \right] \text{ und } \left[a > 0 \text{ und } \frac{1}{d} < \frac{1}{b} \xrightarrow{2.4(iii)} \frac{a}{d} < \frac{a}{b} \right] \xrightarrow{(T)} \frac{c}{d} < \frac{a}{d} < \frac{a}{b}.$$

- (iii) Nach Voraussetzung ist $b, d > 0$ und daher nach Aufgabe 5 (b)(iii) auch $\frac{1}{b}, \frac{1}{d} > 0$. Ferner folgt aus $b, d > 0$ und Satz 2.4(ii), dass $b + d > 0$ ist, woraus mit Aufgabe 5 (b)(iii) auch $\frac{1}{b+d} > 0$ folgt. Weiter bemerken wir, dass

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \xrightarrow{2.4(iii)} ad = \frac{a}{b}bd < \frac{c}{d}bd = cb \xrightarrow{(O+)} a(b+d) = ab + ad < cb + ab = (a+c)b,$$

und folgern weiter

$$a(b+d) < (a+c)b \xrightarrow{2.4(iii)} \frac{a}{b} = a(b+d) \frac{1}{b} \frac{1}{b+d} < (a+c)b \frac{1}{b} \frac{1}{b+d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

Dies zeigt $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$. Andererseits $ad < cb \xrightarrow{(O+)} (a+c)d = ad + cd < cb + cd = c(b+d)$. Analog zu oben erhalten wir

$$(a+c)d < c(b+d) \xrightarrow{2.4(iii)} \frac{a+c}{b+d} = (a+c)d \frac{1}{d} \frac{1}{b+d} < c(b+d) \frac{1}{d} \frac{1}{b+d} = \frac{c}{d}.$$

Dies zeigt die andere Ungleichung $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Insgesamt erhalten wir wie gewünscht $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Aufgabe 7 (Minimum und Maximum, Betrag)

- (a) Zeigen Sie: Für alle $x, y \in K$ gelten

$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad \text{und} \quad \min\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

- (b) Zeigen Sie die *umgekehrte Dreiecksungleichung*: Für alle $x, y \in K$ gilt

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

- (c) Bestimmen Sie jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{Q}$, für die die folgenden Ungleichungen gelten.

$$(1) \quad |2x - 10| \leq 6, \quad (2) \quad |x + 2| > |x - 3|.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7

- (a) Falls $x \geq y$, dann ist $x - y \geq 0$, also $|x - y| = x - y$ und es gelten

$$\max\{x, y\} = x = \frac{(1+1)x}{1+1} = \frac{x + y + x - y}{1+1} = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

sowie

$$\min\{x, y\} = y = \frac{(1+1)y}{1+1} = \frac{x+y-(x-y)}{1+1} = \frac{x+y-|x-y|}{2}$$

Falls $x < y$, dann ist $x - y < 0$, also $|x - y| = y - x$ und es gelten

$$\max\{x, y\} = y = \frac{(1+1)y}{1+1} = \frac{x+y+(y-x)}{1+1} = \frac{x+y+|x-y|}{2}$$

sowie

$$\min\{x, y\} = x = \frac{(1+1)x}{1+1} = \frac{x+y-(y-x)}{1+1} = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

(b) Seien $x, y \in K$. Dann folgt aus der Dreiecksungleichung (Satz 2.6 (v))

$$|x| = |(x-y) + y| \leq |x-y| + |y| \xrightarrow{(O+)} |x| - |y| \leq |x-y| \quad \text{und analog} \quad (2)$$

$$|y| = |(y-x) + x| \leq |y-x| + |x| \xrightarrow{(O+)} -(|x| - |y|) \leq |x-y|. \quad (3)$$

Hieraus folgt $||x| - |y|| \leq |x - y|$: Denn ist $|x| \geq |y|$, so folgt

$$||x| - |y|| = |x| - |y| \stackrel{(2)}{\leq} |x - y|.$$

Anderenfalls ist $|x| < |y|$. Dann erhalten wir genauso

$$||x| - |y|| = -(|x| - |y|) \stackrel{(3)}{\leq} |x - y|.$$

Insgesamt erhalten wir also wie gewünscht $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

(c) (1) Nach Satz 2.6 (iii) ist $|2x-10| = |2||x-5| = 2|x-5|$, denn $2 > 0$. Somit ist $|2x-10| \leq 6$ genau dann, wenn $|x-5| \leq 6/2 = 3$. Im Fall $x \geq 5$ ist dann $x-5 = |x-5| \leq 3$ äquivalent zu $x \leq 5 + 3 = 8$, sodass die Ungleichung in diesem Fall genau dann erfüllt ist, wenn $5 \leq x \leq 8$ ist. Im Fall $x < 5$ ist $5-x = |x-5| \leq 3$ äquivalent zu $x \geq 5-3 = 2$, sodass die Ungleichung in diesem Fall genau dann erfüllt ist, wenn $2 \leq x < 5$ ist. Insgesamt wird also die Ungleichung $|2x-10| \leq 6$ genau dann von $x \in \mathbb{Q}$ gelöst, wenn $2 \leq x < 5$ oder $5 \leq x \leq 8$, d.h., wenn $2 \leq x \leq 8$ gilt. Die Lösungsmenge der Ungleichung ist also $\{x \in \mathbb{Q} : 2 \leq x \leq 8\}$.

(2) Falls $x+2 \geq 0$ und $x-3 \geq 0$ ($\iff x \geq 3$), gilt

$$x+2 = |x+2| > |x-3| = x-3 \quad \xLeftrightarrow{-x} \quad 2 > -3.$$

Das ist für alle $x \geq 3$ erfüllt.

Falls $x+2 \geq 0$ und $x-3 < 0$ ($\iff -2 \leq x < 3$), gilt

$$x+2 = |x+2| > |x-3| = 3-x \quad \xLeftrightarrow{+x-2} \quad 2x > 1 \quad \xLeftrightarrow{2^{-1}} \quad x > \frac{1}{2}.$$

Also ist in diesem Fall $-2 \leq x < 3$ und $x \geq \frac{1}{2}$, was äquivalent ist zu $\frac{1}{2} \leq x < 3$.

Der Fall $x+2 < 0$ und $x-3 \geq 0 \iff 3 \leq x < -2$ ist an sich widersprüchlich.

Falls $x+2 < 0$ und $x-3 < 0$ ($\iff x < -2$), gilt

$$-x-2 = |x+2| > |x-3| = 3-x \quad \xLeftrightarrow{+x+2} \quad 0 > 5.$$

Also ist die Ungleichung in diesem Fall nicht erfüllbar. Insgesamt ist die Ungleichung genau dann erfüllt, wenn $x \geq 3$ oder $\frac{1}{2} \leq x < 3$ ist, d.h., wenn $x \geq \frac{1}{2}$. Somit ist die Lösungsmenge der Ungleichung durch $\{x \in \mathbb{Q} : x \geq \frac{1}{2}\}$ gegeben.

Aufgabe 8 (K) (Betragsungleichungen, Ungleichungen)

- (a) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{Q}$, für die die Ungleichung $||x + 1| - 2| \leq x$ gelten.
- (b) (i) Zeigen Sie: Für alle $x, y \in K$ gelten die Ungleichungen

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 \leq \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

- (ii) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$. Zeigen Sie: Gilt $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, so folgt

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) \geq n^2.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 2$ für alle $x > 0$ und führen Sie anschließend einen Induktionsbeweis.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 8

- (a) *Fall 1:* $x + 1 \geq 0$:
Falls $x + 1 \geq 0$ ($\iff x \geq -1$), dann ist

$$|x - 1| = |x + 1 - 2| = ||x + 1| - 2| \leq x.$$

Wir unterscheiden im Folgenden wiederum zwei Fälle.

Fall 1 a): Wenn zusätzlich $x - 1 \geq 0$ ($\iff x \geq 1$), erhalten wir

$$x - 1 = ||x + 1| - 2| \leq x \quad \xLeftrightarrow{-x} \quad -1 \leq 0.$$

Somit ist die Ungleichung für alle $x \geq 1$ erfüllt.

Fall 1 b): Wenn andererseits zusätzlich $x - 1 < 0$ ($\iff x < 1$), erhalten wir

$$1 - x = ||x + 1| - 2| \leq x \quad \xLeftrightarrow{+x} \quad 1 \leq 2x \quad \xLeftrightarrow{2^{-1}} \quad \frac{1}{2} \leq x.$$

Also ist in diesem Fall die Ungleichung genau für alle $\frac{1}{2} \leq x < 1$ erfüllt.

Fall 2: $x + 1 < 0$:

Falls $x + 1 < 0$ ($\iff x < -1$), dann gilt

$$|x + 3| = |-x - 1 - 2| = ||x + 1| - 2| \leq x.$$

Wir unterscheiden im Folgenden wiederum zwei Fälle.

Fall 2 a): Wenn zusätzlich $x + 3 \geq 0$ ($\iff x \geq -3$), erhalten wir

$$x + 3 = ||x + 1| - 2| \leq x \quad \xLeftrightarrow{-x} \quad 3 \leq 0.$$

Das heißt in diesem Fall gibt es keine x , die die Ungleichung erfüllen.

Fall 2 b): Wenn andererseits zusätzlich $x + 3 < 0$ ($\iff x < -3$), erhalten wir

$$-x - 3 = ||x + 1| - 2| \leq x \quad \xLeftrightarrow{+x} \quad -3 \leq 2x \quad \xLeftrightarrow{2^{-1}} \quad -\frac{3}{2} \leq x.$$

Da also einerseits $x < -3$ und $x \geq -\frac{3}{2}$ sein muss, gibt es in diesem Fall keine x , die die Ungleichung lösen.

Insgesamt ist die Ungleichung genau für alle $x \in \mathbb{Q}$ mit $x \geq 1$ und $\frac{1}{2} \leq x < 1$, d.h., für $x \geq \frac{1}{2}$, gelöst. Damit ist die Lösungsmenge der Ungleichung durch $\{x \in \mathbb{Q}: x \geq \frac{1}{2}\}$ gegeben.

- (b) (i) Seien $x, y \in K$. Zunächst einmal bemerken wir, dass $2 \neq 0$ ist (warum genau?), sodass die Terme $\frac{x+y}{2}$ und $\frac{x^2+y^2}{2}$ wohldefiniert sind. Ist $x = y$, so sind die Ungleichungen trivial, da dann offensichtlich

$$x \cdot x = \left(\frac{x+x}{2} \right)^2 = \frac{x^2+x^2}{2}$$

gilt. Wir nehmen im Folgenden also $x \neq y$ an. Dann ist $x - y \neq 0$ und nach Aufgabe 5 (b)(ii) gilt dann $0 < (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$. Durch Addition bzw. Subtraktion von $2^2xy = 2xy + 2xy$ folgt mit (O+), dass diese Aussage äquivalent ist zu

$$2^2xy < x^2 - 2xy + 2xy + 2xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2.$$

Da $2 \neq 0$ gilt, ist $2^2 > 0$ nach Aufgabe 5 (b) (ii) und nach Aufgabe 5 (b) (iii) damit auch $(2^2)^{-1} > 0$. Nach Satz 2.4 (iii) (mit $a := 2^2$)⁻¹) ist daher obige Ungleichung äquivalent zu

$$xy < \frac{(x + y)^2}{2^2} = \left(\frac{x + y}{2} \right)^2.$$

Auf der anderen Seite folgern wir mit (O+) durch Addition bzw. Subtraktion von $x^2 + 2xy + y^2$, dass $x^2 - 2xy + y^2 > 0$ äquivalent ist zu

$$2(x^2 + y^2) = 2x^2 + 2y^2 > x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2.$$

Genau wie oben zeigt eine Anwendung von Satz 2.4 (iii) mit $(a := 2^2)^{-1}$ bzw. $a := 2^2$) dass diese Ungleichung äquivalent ist zu

$$\frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{2(x^2 + y^2)}{2^2} > \frac{(x + y)^2}{2^2} = \left(\frac{x + y}{2} \right)^2.$$

Insgesamt haben wir also gezeigt, dass $x \neq y$ tatsächlich sogar *äquivalent* ist zu den strikten Ungleichungen

$$xy < \left(\frac{x + y}{2} \right)^2 < \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

- (c) Wir zeigen zunächst die Aussage aus dem Hinweis: Für $x > 0$ gilt

$$\left(x + \frac{1}{x} \right) \geq 2 \quad \text{für alle } x > 0. \quad (4)$$

Diese Aussage folgt z.B. aus Aufgabe 8 (b) (i), wenn wir $y := 1$ setzen. Dann folgt nämlich

$$x = x \cdot 1 \stackrel{(b)(i)}{\leq} \frac{x^2 + 1^2}{2} = x \cdot \frac{\left(x + \frac{1}{x} \right)}{2}. \quad (5)$$

Da nun nach Voraussetzung $x > 0$ ist, gilt nach Aufgabe 5 (b) (iii) und (O·) auch $\frac{2}{x} = 2 \cdot \frac{1}{x} > 0$. Multiplizieren wir also (5) mit $\frac{2}{x} > 0$, erhalten wir mit Satz 2.4 (iii) die gewünschte Ungleichung (4):

$$2 = \frac{2}{x} \cdot x \stackrel{2.4 (iii)}{\leq} \frac{2}{x} \cdot x \cdot \frac{\left(x + \frac{1}{x} \right)}{2} = \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

Nun zeigen wir die Ungleichung der Aufgabenstellung per Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Aussage

$A(n)$: Für alle $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$ mit $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ gilt $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right) \geq n^2$.

Beweis: Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang (IA): Sei $n = 1$. Ist $x_1 \in K$ und $x_1 > 0$, so gilt

$$\left(\sum_{k=1}^1 x_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^1 \frac{1}{x_k}\right) = x_1 \cdot \frac{1}{x_1} = 1 \geq 1^2.$$

Also ist $A(1)$ wahr.

Induktionsvoraussetzung (IV): Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt (IS): Seien $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in K$ mit $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} > 0$. Unter der (IV) und (4) gilt dann

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{x_k}\right) = \left[\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) + x_{n+1}\right] \cdot \left[\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right) + \frac{1}{x_{n+1}}\right] \\ & = \left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right) + \left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \cdot \frac{1}{x_{n+1}} + x_{n+1} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right) + x_{n+1} \cdot \frac{1}{x_{n+1}} \\ & \stackrel{(IV)}{\geq} n^2 + \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_{n+1}} + \sum_{k=1}^n \frac{x_{n+1}}{x_k} + 1 = n^2 + \sum_{k=1}^n \underbrace{\left(\frac{x_k}{x_{n+1}} + \left(\frac{x_k}{x_{n+1}}\right)^{-1}\right)}_{\geq 2 \text{ nach (4)}} + 1 \\ & \stackrel{2.4 \text{ (ii)}}{\geq} n^2 + \sum_{k=1}^n 2 + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2. \end{aligned}$$

Also ist $A(n+1)$ wahr.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist $A(n)$ wahr für alle $\mathbb{N}$.