

Analysis I

Lösungsvorschlag zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 13 (Potenzen mit rationalen Exponenten I)

Seien $x, y \in \mathbb{R}_+$, $p \in \mathbb{Q}_+$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}, & \text{(b)} \quad & \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{x+y}, \\ \text{(c)} \quad & \sqrt[n]{x+y} < \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}, & \text{(d)} \quad & x^p < y^p \iff x < y. \end{aligned}$$

Wann gilt Gleichheit in (b)?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 13

Seien $x, y \in \mathbb{R}_+$. Für die folgenden Beweise nutzen wir folgende Äquivalenz: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$x < y \iff x^n < y^n \quad \text{und} \quad x \leq y \iff x^n \leq y^n. \quad (*)$$

Die Implikationen „ $\implies$ “ sind aus der Vorlesung bekannt (s. die Bemerkung auf S.22 des Vorlesungsskriptes; hier wurde nur der Fall „ $<$ “ betrachtet, aber „ $\leq$ “ geht analog). Die Implikationen „ $\impliedby$ “ folgen dann leicht aus den bereits bekannten Implikationen per Widerspruch: Gälte $x^n < y^n$ (bzw. $x^n \leq y^n$) für ein $n \in \mathbb{N}$, so kann $x \geq y$ (bzw. $x > y$) nicht gelten, da sonst nach der bereits bewiesenen Implikationen „ $\implies$ “ auch $x^n \geq y^n$ (bzw. $x^n > y^n$) gelten müsste, im Widerspruch zu unserer Annahme $x^n < y^n$ (bzw. $x^n \leq y^n$).

(a) Es gilt

$$(\sqrt{x+y})^2 = x+y < x+2\sqrt{x}\sqrt{y}+y = (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2.$$

Nach der Äquivalenz (*) ist aber obige Ungleichung gleichwertig zu

$$\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

(b) Zunächst bemerken wir, dass $2\sqrt{x}\sqrt{y} \leq x+y$ gilt: In der Tat, nach Satz 2.4 (vii) ist $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$. Ausmultiplizieren liefert dann die gewünschte Ungleichung, denn

$$0 \leq (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \iff 0 \leq x-2\sqrt{x}\sqrt{y}+y \stackrel{(O+)}{\iff} 2\sqrt{x}\sqrt{y} \leq x+y.$$

Die Ungleichung auf der rechten Seite ist nach Satz 2.4 (ii) äquivalent zu

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = x+2\sqrt{x}\sqrt{y}+y \leq x+(x+y)+y = 2(x+y) = \left(\sqrt{2(x+y)}\right)^2$$

und damit, wieder (*) und die Potenzgesetze (Lemma 2.21) verwendend,

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)} \stackrel{2.21}{=} \sqrt{2}\sqrt{x+y} \stackrel{(O+)}{\iff} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{x+y}.$$

Man prüft schnell nach, dass obige Äquivalenzen wahr bleiben, wenn wir „ $\leq$ “ durch „ $=$ “ ersetzen, sodass wir

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2}} = \sqrt{x+y} \iff (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 0$$

erhalten. Die Gleichung auf der rechten Seite ist aber äquivalent zu $x = y$, sodass Gleichheit in (b) genau dann auftritt, wenn $x = y$ ist.

- (c) Die Beweisidee ist dieselbe wie in (a) mit dem Unterschied, dass man den (allgemeineren) binomischen Lehrsatz (Satz 1.1 aus der Vorlesung) statt der binomischen Formel verwenden muss. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Dann ist

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{x+y})^n &= x+y < \underbrace{x}_{k=0} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (\sqrt[n]{x})^{n-k} (\sqrt[n]{y})^k + \underbrace{y}_{k=n} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sqrt[n]{x})^k (\sqrt[n]{y})^{n-k} \stackrel{1.1}{=} (\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y})^n, \end{aligned}$$

sodass aus (*) wiederum $\sqrt[n]{x+y} < \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$ folgt.

- (d) Sei $p \in \mathbb{Q}_+$. Dann gibt es $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $p = \frac{m}{n}$. Wenden wir (*) auf $x^{\frac{1}{n}}$ und $y^{\frac{1}{n}}$ anstelle von x und y an, folgern wir

$$x^p < y^p \stackrel{\text{Def.}}{\iff} \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m < \left(y^{\frac{1}{n}}\right)^m \stackrel{(*)}{\iff} x^{\frac{1}{n}} < y^{\frac{1}{n}} \stackrel{(*)}{\iff} x = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n < \left(y^{\frac{1}{n}}\right)^n = y.$$

Aufgabe 14 (K) (Potenzen mit rationalen Exponenten II)

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie:

- (a) $a^{\frac{1}{m}} < a^{\frac{1}{n}}$, falls $m < n$ und $0 < a < 1$,
- (b) $a^{\frac{1}{m}} > a^{\frac{1}{n}}$, falls $m < n$ und $a > 1$,
- (c) $b^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}} < (b-a)^{\frac{1}{n}}$, falls $a < b$ und $n \geq 2$.

Hinweis: Aufgabe 13 (c) und (d) können nützlich sein.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 14

- (a) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ und $a \in \mathbb{R}_+$ mit $0 < a < 1$. Nach Voraussetzung ist dann $\frac{n}{m} - 1 > 0$ und $a < 1$, sodass aus Aufgabe 13 (d) die Ungleichung $a^{\frac{n}{m}-1} < 1^{\frac{n}{m}-1} = 1$ folgt. Dies und die Potenzgesetze (Lemma 2.21) verwendend, erhalten wir

$$\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n =: a^{\frac{n}{m}} \stackrel{2.21}{=} a^{\frac{n}{m}-1} a^1 \stackrel{A13}{<} 1^{\frac{n}{m}-1} a = a = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n. \quad (1)$$

Obige Ungleichung ist nach (*) aus Aufgabe 13 äquivalent zu $a^{\frac{1}{m}} < a^{\frac{1}{n}}$.

- (b) Der Beweis von (b) kann exakt genauso geführt werden wie der von (a), wobei wegen der Voraussetzung $a > 1$ (statt $0 < a < 1$) die Ungleichung in (1) sich umkehrt und wir aus (*) aus Aufgabe 13 die gewünschte Gleichung $a^{\frac{1}{m}} > a^{\frac{1}{n}}$ erhalten.

(c) Es seien $a < b$ und $n \geq 2$. Dann folgt aus Aufgabe 13 (c)

$$\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(b-a) + a} \stackrel{\text{A13 (c)}}{<} \sqrt[n]{b-a} + \sqrt[n]{a} \stackrel[\sqrt[n]{a}]{(O+)}{\Longleftarrow} \sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b-a}.$$

Aufgabe 15 (Komplexe Zahlen I)

(a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

- (i) $A := \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq |z+1|\},$
- (ii) $B := \{z \in \mathbb{C} : |z+1| \leq |z-i| \leq |z-1|\},$
- (iii) $C := \{z \in \mathbb{C} : 3z\bar{z} - 6z - 6\bar{z} + 9 = 0\}.$

(b) Berechnen Sie

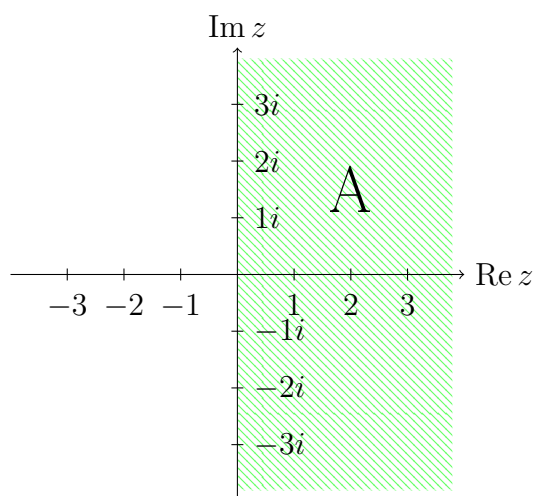
$$(i) \quad \left| \frac{1+2i}{3-4i} \right|, \quad (ii) \quad \frac{1}{2+i} - \frac{i}{1+3i}, \quad (iii) \quad i^{2021}.$$

(c) Bestimmen Sie die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 + (-10+4i)z + 70 - 20i = 0$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 15

- (a) (i) Nach Definition besteht die Menge A aus allen komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, deren Abstand zu 1 nicht größer als ihr Abstand zu -1 ist; anschaulich sollte also A genau mit der rechten Halbebene $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0\}$ übereinstimmen. In der Tat, für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\operatorname{Re} z = x$ und

$$\begin{aligned} z \in A & \\ \iff |z-1| &\leq |z+1| \\ \iff |z-1|^2 &\leq |z+1|^2 \\ \iff (x-1)^2 + y^2 &\leq (x+1)^2 + y^2 \\ \iff 4x &\geq 0 \\ \iff \operatorname{Re} z = x &\geq 0 \\ \iff z \in H & \end{aligned}$$

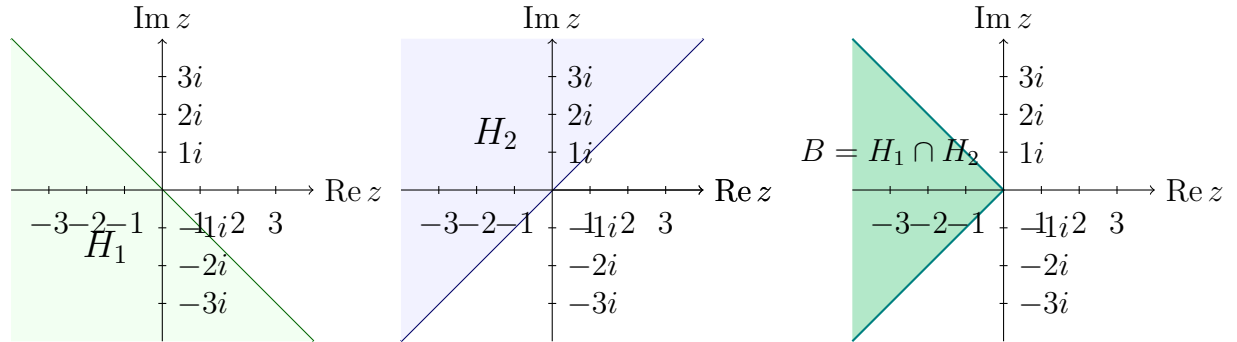


- (ii) Die Menge B ist der Schnitt zweier Halbebenen. Es ist

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| \leq |z-i| \leq |z-1|\}$$

$$\begin{aligned}
&= \{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| \leq |z-i| \text{ und } |z-i| \leq |z-1|\} \\
&= \{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| \leq |z-i|\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| \leq |z-1|\} \\
&=: H_1 \cap H_2,
\end{aligned}$$

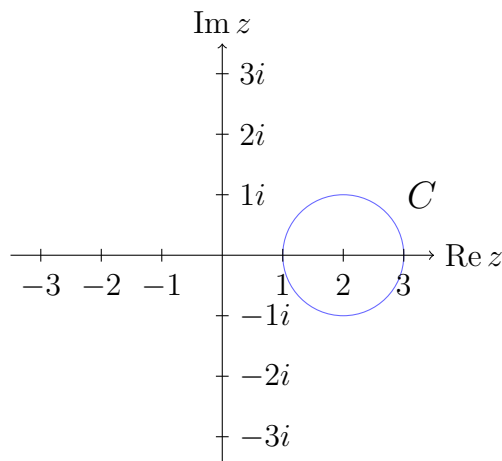
wobei wir $H_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| \leq |z-i|\}$ und $H_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| \leq |z-1|\}$ definiert haben. Wie bei A stellt man fest, dass die Mengen H_1 und H_2 Halbebenen beschreiben, wobei diese allerdings nicht parallel zu den Koordinatenachsen sind. Die Mengen H_1 , H_2 und $B = H_1 \cap H_2$ sehen wie folgt aus:



(iii) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}
&3z\bar{z} - 6z - 6\bar{z} + 9 = 0 \\
&\iff z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} + 3 = 0 \\
&\iff (z-2)(\bar{z}-2) - 1 = 0 \\
&\iff |z-2|^2 = 1 \iff |z-2| = 1,
\end{aligned}$$

wobei wir für die vorletzte Äquivalenz ausgenutzt haben, dass $\bar{z} - 2 = \overline{z - 2}$ und $|z-2|^2 = (z-2)(\bar{z}-2)$ nach Satz 2.23 (iv) und (v) gelten. Somit ist $C = S(2, 1) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| = 1\}$ die Kreislinie mit Mittelpunkt 2 und Radius 1:



(b) (i) Es gilt

$$\left| \frac{1+2i}{3-4i} \right| = \frac{|1+2i|}{|3-4i|} = \frac{\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Hierbei haben wir in der ersten Gleichheit ausgenutzt, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ und $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Gleichung $|zw^{-1}| = |z||w|^{-1}$ gilt. In der Tat,

$$1 = |1| = |ww^{-1}| \stackrel{2.23 \text{ (vi)}}{=} |w||w^{-1}| \iff |w^{-1}| = |w|^{-1},$$

$$\text{also } |zw^{-1}| = |z||w^{-1}| = |z||w|^{-1}.$$

(ii) Durch Übergang zum gemeinsamen Nenner erhalten wir

$$\frac{1}{2+i} - \frac{i}{1+3i} = \frac{1+3i}{(2+i)(1+3i)} - \frac{i(2+i)}{(2+i)(1+3i)} = \frac{1+3i-2i+1}{2+6i+i-3} = \frac{2+i}{-1+7i}.$$

Um den Term auf der rechten Seite in der üblichen Darstellung $x+iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ zu schreiben, erweitern wir mit $\overline{-1+7i} = -1-7i$ und erhalten

$$\frac{1}{2+i} - \frac{i}{1+3i} = \frac{2+i}{-1+7i} = \frac{(2+i)(-1-7i)}{(-1+7i)(-1-7i)} = \frac{-2-14i-i+7}{(-1)^2+7^2} = \frac{5-15i}{50} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i.$$

(iii) Es gilt $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$. Die Potenzgesetze verwendend, erhalten wir daher

$$i^{2021} = i \cdot i^{2020} = i \cdot (i^4)^{505} = i \cdot 1^{505} = i.$$

(c) Wir setzen $v = 70 - 20i$ und $u = 5 - 2i$. Dann ist die zu lösende Gleichung identisch mit $0 = z^2 - 2uz + v$. Wir addieren $u^2 - u^2 = 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= z^2 - 2uz + v = z^2 - 2uz + u^2 - u^2 + v = (z-u)^2 - (u^2 - v) \\ \iff (z-u)^2 &= u^2 - v = -49, \end{aligned}$$

denn es ist $u^2 = 5^2 - (-2)^2 + i2 \cdot 5 \cdot (-2) = 21 - 20i$, also $u^2 - v = 21 - 20i - 70 + 20i = -49$. Diese letzte Gleichung hat die komplexen Lösungen $z - u = 7i$ oder $z - u = -7i$ (vgl. Übung 4). Wir setzen u ein und bekommen die Lösungen

$$z = u + 7i = 5 + 5i \quad \text{oder} \quad z = u - 7i = 5 - 9i.$$

Aufgabe 16 (K) (Komplexe Zahlen II)

(a) Beweisen Sie die *Parallelogramm-Identität*: Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

(b) Für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ sei

$$f(z) := \sqrt{|z|} \frac{z + |z|}{|z + |z||}.$$

Zeigen Sie $f(z)^2 = z$. Bestimmen Sie ferner alle Lösungen $w \in \mathbb{C}$ der Gleichung $w^2 = z$.

(c) Es seien $A := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |z-i| < 1\}$ und $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \frac{1}{z}$. Bestimmen und skizzieren Sie die Bildmenge $f(A) := \{f(z) : z \in A\}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 16

(a) Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Unter Verwendung der Identität $|u|^2 = u\bar{u}$ für $u \in \mathbb{C}$ und den aus der Vorlesung bekannten Regeln $\overline{u+v} = \bar{u} + \bar{v}$, $\overline{uv} = \bar{u}\bar{v}$ für $u, v \in \mathbb{C}$, erhalten wir dann

$$\begin{aligned} |z+w|^2 + |z-w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} + (z-w)\overline{(z-w)} \\ &= (z+w)(\bar{z} + \bar{w}) + (z-w)(\bar{z} - \bar{w}) \\ &= (|z|^2 + z\bar{w} + w\bar{z} + |w|^2) + (|z|^2 - z\bar{w} - w\bar{z} + |w|^2) \\ &= 2(|z|^2 + |w|^2). \end{aligned}$$

(b) Es sei $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Dann ist $z + |z| \neq 0$ und somit

$$f(z) := \sqrt{|z|} \frac{z + |z|}{|z + |z||}$$

wohldefiniert.

$$\begin{aligned} f(z)^2 &= \left(\sqrt{|z|} \frac{z + |z|}{|z + |z||} \right)^2 = |z| \frac{(z + |z|)^2}{|z + |z||^2} = |z| \frac{z^2 + 2z|z| + |z|^2}{(z + |z|)(\bar{z} + |z|)} \\ &= |z| \frac{z^2 + 2z|z| + |z|^2}{|z|^2 + (z + \bar{z})|z| + |z|^2} = |z| \frac{z(z + 2|z| + \bar{z})}{|z|(2|z| + (z + \bar{z}))} = z. \end{aligned}$$

Es sei $L := \{w \in \mathbb{C} : w^2 = z\}$ die Lösungsmenge der Gleichung $w^2 = z$. Nach dem bereits Gezeigten gilt $f(z)^2 = z$, also schonmal $f(z) \in L$. Ist $w \in L$ eine weitere Lösung, so folgt $w^2 = z = f(z)^2$. Wir folgern

$$0 = w^2 - f(z)^2 = (w - f(z))(w + f(z)).$$

Es muss also $w = f(z)$ oder $w = -f(z)$ sein, d.h., $L \subseteq \{f(z), -f(z)\}$. Da wegen $(-f(z))^2 = (-1)^2 f(z)^2 = 1 \cdot z = z$ die komplexe Zahl $-f(z)$ auch in L liegt, folgern wir $L = \{f(z), -f(z)\}$.

(c) Wir bemerken, dass $f(f(z)) = z$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt. Damit ist $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ bijektiv und selbstinvers, d.h., es gilt $f^{-1} = f$. Sei nun $w \in \mathbb{C}$. Dann folgern wir

$$\begin{aligned} w \in f(A) &\iff f(w) = f^{-1}(w) \in A \iff |f(w) - i| < 1 \iff \left| \frac{1}{w} - i \right| < 1 \\ &\iff \frac{|1 - iw|}{|w|} = \left| \frac{1 - iw}{w} \right| < 1 \iff |-i(i + w)| < |w| \iff |i + w| < |w|. \end{aligned}$$

Seien $x := \operatorname{Re} w$ und $y := \operatorname{Im} w$. Dann gilt für die Ungleichung ganz rechts in der obigen Äquivalenzkette

$$\begin{aligned} |i + w| < |w| &\iff |i + w|^2 < |w|^2 \\ &\iff x^2 + (1 + y)^2 < x^2 + y^2 \iff 2y < -1 \iff \operatorname{Im} w = y < -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wir folgern

$$f(A) = \left\{ w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w < -\frac{1}{2} \right\},$$

sodass $f(A)$ die um $-\frac{1}{2}i$ verschobene, untere „offene“ Halbebene ist (mit „offen“ meinen wir hier, dass die horizontale Randgerade $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w = -\frac{1}{2}\}$ ausgeschlossen wird).

