

# Analysis I

## Lösungsvorschlag zum 6. Übungsblatt

### Aufgabe 22 (Sandwichkriterium, Monotoniekriterium)

- (a) Bestimmen Sie  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$ .
- (b) Sei  $a > 0$  und  $(a_n)$  definiert durch  $a_n := \frac{a^n}{n!}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass die Folge  $(a_n)$  konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.  
*Hinweis: Finden Sie  $c > 0$ ,  $q \in (0, 1)$  und ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $0 \leq a_n \leq cq^n$  für alle  $n \geq N$ .*
- (c) Sei  $(a_n)$  rekursiv definiert durch  $a_{n+1} := \frac{3+5a_n}{20}$  für  $n \in \mathbb{N}$  und  $a_1 := 1$ . Zeigen Sie, dass die Folge  $(a_n)$  konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 22

- (a) Da nach Sätzen 3.6 und 3.8  $\frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3+\frac{1}{n}} \rightarrow \frac{2}{3}$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $\left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  nach Aufgabe 21 (c) gelten, vermuten wir, dass  $\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) gilt. Um unsere Vermutung zu beweisen, benutzen wir das Sandwichkriterium (Satz 3.11). Es gilt

$$0 \leq \frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3+\frac{1}{n}} \leq \frac{2}{3}, \quad \text{und daher auch}$$

$$0 \leq \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da  $\left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  und offensichtlich auch  $0 \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt, folgt aus dem Sandwichkriterium, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n = 0$  ist.

- (b) Sei  $a > 0$  und  $(a_n)$  definiert durch  $a_n := \frac{a^n}{n!}$ . Die Folge  $(n!) = (1, 2!, 3!, \dots)$  wächst viel schneller als  $(a^n) = (a, a^2, a^3, \dots)$ , da von  $n!$  auf  $(n+1)!$  der Faktor  $n+1$  hinzukommt, welcher mit wachsendem  $n$  immer größer wird, wohingegen von  $a^n$  auf  $a^{n+1}$  *unabhängig von  $n$*  nur der Faktor  $a$  hinzukommt. Somit ist es plausibel, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$  gilt. Um dies zu zeigen, wollen wir  $(a_n)$  zwischen zwei Nullfolgen einkasteln und das Sandwichkriterium anwenden. Dazu zeigen wir, dass es ein  $c > 0$  (*unabhängig von  $n$* ) und ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, sodass

$$0 \leq a_n \leq c \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{für alle } n \geq N. \quad (1)$$

Da wir nach Aufgabe 21 (c) wissen, dass die Folge  $(2^{-n})$  eine Nullfolge ist, ist nach Satz 3.6 auch  $(c2^{-n})$  eine Nullfolge. Aus (1) und dem Sandwichkriterium folgt dann sofort, dass dann auch  $(a_n)$  eine Nullfolge ist. Es verbleibt also (1) zu zeigen. Da nach Voraussetzung  $a > 0$  ist, ist klar, dass  $0 \leq a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Für die andere Ungleichung bemerken wir

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \bigg/ \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da  $(\frac{1}{n})$  eine Nullfolge ist, finden wir ein  $N \in \mathbb{N}$  so groß, dass  $\frac{a}{N+1} \leq \frac{1}{2}$  ist. Dann folgt für alle  $n \geq N$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{n+1} \leq \frac{a}{N+1} \leq \frac{1}{2}.$$

Mit vollständiger Induktion zeigt man dann, dass

$$\frac{a_n}{a_N} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Somit gilt mit  $c := 2^{-N}a_N > 0$

$$a_n = a_N \cdot \frac{a_n}{a_N} \leq a_N \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = (2^{-N}a_N) \left(\frac{1}{2}\right)^n = c \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{für alle } n \geq N,$$

was genau (1) ist. Damit ist alles gezeigt.

(c) Um einen Beweisansatz zu finden, berechnen wir zunächst die ersten vier Folgenglieder:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{2}{5}, \quad a_3 = \frac{1}{4}, \quad a_4 = \frac{17}{80}.$$

Wir vermuten also, dass  $(a_n)$  fallend ist. Um herauszufinden, gegen welchen Wert die Folge  $(a_n)$  konvergieren könnte, *nehmen* wir zunächst an, dass die Folge  $(a_n)$  konvergiert und bezeichnen ihren Grenzwert mit  $a \in \mathbb{R}$ . Mit Aufgabe 19 (b) und Satz 3.6 können wir dann aus der rekursiven Definition der  $a_n$  eine Gleichung für  $a$  herleiten:

$$a \stackrel{\text{A19 (b)}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 5a_n}{20} \stackrel{3.6}{=} \frac{3 + 5a}{20},$$

d.h.,

$$a = \frac{3}{20} + \frac{5}{20}a \iff a = \frac{1}{5}.$$

Also kann (wenn überhaupt) die Folge  $(a_n)$  nur gegen  $\frac{1}{5}$  konvergieren. Diese Vorüberlegungen leitet uns zu folgender Beweisstrategie: Wir zeigen, dass  $(a_n)$  fallend ist und durch  $\frac{1}{5}$  nach unten beschränkt ist. Nach dem Monotoniekriterium muss dann die Folge  $(a_n)$  konvergieren, und unsere Vorüberlegung zeigt dann, dass ihr Grenzwert  $\frac{1}{5}$  sein muss. Wir widmen uns zunächst der Beschränktheit von  $(a_n)$ , da wir diese für den Nachweis ihrer Monotonie benötigen.

**Behauptung:** Es gilt  $a_n \geq \frac{1}{5}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Beweis:** Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion.

*Induktionsanfang:* Für  $n = 1$  ist nach Definition  $a_1 = 1 \geq \frac{1}{5}$ .

*Induktionsvoraussetzung:* Es sei  $a_n \geq \frac{1}{5}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ .

*Induktionsschritt:* Unter der (IV) gilt dann

$$a_{n+1} = \frac{3 + 5a_n}{20} \stackrel{\text{(IV)}}{\geq} \frac{3 + 5 \cdot \frac{1}{5}}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5},$$

also  $a_{n+1} \geq \frac{1}{5}$ .

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist also  $a_n \geq \frac{1}{5}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Wir beweisen jetzt, dass  $(a_n)$  fallend ist.

**Behauptung:** Die Folge  $(a_n)$  ist fallend.

**Beweis:** Wir müssen zeigen, dass  $a_{n+1} \leq a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Sei also  $n \in \mathbb{N}$ . Da  $a_n \geq \frac{1}{5}$  ist (s.o.), erhalten wir

$$a_{n+1} = \frac{3}{20} + \frac{5}{20}a_n = a_n \left( \frac{3}{20a_n} + \frac{5}{20} \right) \leq a_n \left( \frac{3}{20 \cdot \frac{1}{5}} + \frac{5}{20} \right) = a_n \left( \frac{15}{20} + \frac{5}{20} \right) = a_n.$$

Somit ist  $(a_n)$  fallend.

Somit ist  $(a_n)$  fallend und durch  $\frac{1}{5}$  nach unten beschränkt. Nach dem Monotoniekriterium ist  $(a_n)$  somit konvergent und unser Vorüberlegung zeigt, dass  $(a_n)$  gegen  $\frac{1}{5}$  konvergiert.

### Aufgabe 23 (K) (Rekursiv definierte Folgen)

(a) Es sei  $(a_n)$  definiert durch

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie, dass  $(a_n)$  konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert von  $(a_n)$ .

(b) Bestimmen Sie die Anfangswerte  $b_1 \in [0, \infty)$ , für welche die durch

$$b_{n+1} = 1 + \frac{b_n^2}{4} \quad (n \in \mathbb{N})$$

rekursiv definierte Folge  $(b_n)$  konvergiert. Berechnen Sie auch die jeweiligen Grenzwerte.

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 23

Für den Nachweis der Konvergenz der Folgen benutzen wir das Monotoniekriterium. Dieses besagt, dass monotone und beschränkte Folgen in  $\mathbb{R}$  konvergieren. Wir gehen also dreischrittig vor: Wir zeigen im ersten Schritt die Beschränktheit, dann die Monotonie und bestimmen im letzten Schritt den Grenzwert der Folge.

(a) Wir zeigen zunächst, dass  $(a_n)$  beschränkt (und damit insbesondere auch nach oben beschränkt) ist.

**Behauptung:** Es gilt  $1 \leq a_n \leq 2$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Beweis:** Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion.

*Induktionsanfang:* Für  $n = 1$  ist die Aussage klar, da  $1 = a_1 \leq 2$ .

*Induktionsvoraussetzung:* Es sei  $1 \leq a_n \leq 2$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  (IV).

*Induktionsschritt:* Unter der (IV) folgern wir einerseits

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \stackrel{(IV)}{\leq} \sqrt{2 + 2} = 2,$$

und andererseits

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \stackrel{(IV)}{\geq} \sqrt{2 + 1} \geq \sqrt{0 + 1} = 1.$$

Somit folgern wir insgesamt  $1 \leq a_{n+1} \leq 2$ . Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Behauptung also wahr.

Wir zeigen nun, dass  $(a_n)$  wachsend ist.

**Behauptung:** Die Folge  $(a_n)$  ist wachsend.

**Beweis:** Wir müssen zeigen, dass  $a_{n+1} \geq a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $1 \leq a_n \leq 2$  (s.o.) und damit

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \stackrel{a_n \geq 1 > 0}{=} \sqrt{a_n^2 \left( \frac{2}{a_n^2} + \frac{1}{a_n} \right)} = a_n \sqrt{\frac{2}{a_n^2} + \frac{1}{a_n}} \stackrel{a_n \leq 2}{\geq} a_n \sqrt{\frac{2}{2^2} + \frac{1}{2}} = a_n \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a_n.$$

Also ist  $(a_n)$  wachsend.

Alternativer Beweis: Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{2+a_n} - a_n = \frac{(\sqrt{2+a_n} - a_n)(\sqrt{2+a_n} + a_n)}{\sqrt{2+a_n} + a_n} = \frac{2 + a_n - a_n^2}{\sqrt{2+a_n} + a_n}.$$

Also gilt  $a_{n+1} - a_n \geq 0$  genau dann, wenn

$$2 + a_n - a_n^2 \geq 0 \iff \left( a_n - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{9}{4} \iff a_n \in [-1, 2].$$

Da wir bereits  $1 \leq a_n \leq 2$  gezeigt haben, ist aber letztere Beziehung wahr. Somit ist  $a_{n+1} - a_n \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und damit  $(a_n)$  wachsend.

Wir haben also gezeigt, dass  $(a_n)$  nach oben beschränkt und wachsend ist. Nach dem Monotoniekriterium ist damit  $(a_n)$  konvergent und es existiert  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  in  $\mathbb{R}$ . Wir zeigen nun, dass  $a = 2$  ist.

**Behauptung:** Es gilt  $a = 2$ .

**Beweis:** Mit Aufgabe 19 (b), Satz 3.6 und Aufgabe 21 (b) folgt nun

$$a \stackrel{A19(b)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2+a_n} \stackrel[3.6]{A21(b)}{=} \sqrt{2+a}.$$

Quadrieren ergibt  $a^2 = 2 + a$ , also  $a^2 - a - 2 = 0$ . Durch quadratische Ergänzung erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 = a^2 - a - 2 &= \left( a^2 - a + \frac{1}{4} \right) - 2 - \frac{1}{4} \\ &= \left( a - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} \\ &\iff a - \frac{1}{2} = \pm \frac{3}{2} \\ &\iff a = -\frac{1}{2} \text{ oder } a = 2. \end{aligned}$$

Da aber  $1 \leq a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, folgt nach Satz 3.10 a) auch  $1 \leq a$ . Somit scheidet  $a = -\frac{1}{2}$  aus, und es muss  $a = 2$  sein.

- (b) Wir machen folgende Vorüberlegung: Angenommen,  $(b_n)$  konvergiert gegen ein  $b \in \mathbb{C}$ . Dann gilt mit Bemerkung Aufgabe 19 (b) und Sätzen 3.6 und 3.8

$$b \stackrel{A19(b)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{b_n^2}{4} \stackrel[3.8]{3.6} = 1 + \frac{b^2}{4}.$$

Somit erhalten wir

$$b = 1 + \frac{b^2}{4} \iff 4b = 4 + b^2 \iff 0 = (b-2)^2 \iff b = 2.$$

Somit ist  $b = 2$  der einzig mögliche Grenzwert von  $(b_n)$ . Wir untersuchen nun, für welche  $b_1 \in [0, \infty)$  die Folge  $(b_n)$  gegen 2 konvergiert. Hierfür halten wir zunächst fest, dass  $(b_n)$

monoton wachsend ist.

**Behauptung:** Die Folge  $(b_n)$  ist wachsend.

**Beweis:** Wir müssen zeigen, dass  $b_{n+1} \geq b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$b_{n+1} - b_n = 1 + \frac{b_n^2}{4} - b_n = \frac{1}{4} (b_n^2 - 4b_n + 4) = \frac{1}{4} (b_n - 2)^2 \geq 0,$$

was wie gewünscht  $b_{n+1} \geq b_n$  impliziert.

Konvergiert daher  $(b_n)$ , so muss notwendigerweise  $b_1 \leq 2$  gelten. Denn gilt  $b_n \rightarrow 2$  ( $n \rightarrow \infty$ ), so folgt aus der Monotonie von  $(b_n)$ , dass  $b_1 \leq b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt (dies kann man per vollständiger Induktion zeigen) und daher mit Satz 3.10 auch  $b_1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$ . Wir haben also die Implikation

$$b_n \rightarrow 2 \quad (n \rightarrow \infty) \implies b_1 \in [0, 2].$$

Wir zeigen nun, die Umkehrung obiger Implikation. Da  $(b_n)$  wachsend ist, müssen wir hierfür nach dem Monotoniekriterium nur noch zeigen, dass  $(b_n)$  beschränkt ist.

**Behauptung:** Sei  $b_1 \in [0, 2]$ . Dann ist die Folge  $(b_n)$  beschränkt und es gilt

$$0 \leq b_n \leq 2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

**Beweis:** Wir beweisen obige Aussage durch vollständige Induktion.

*Induktionsanfang:* Es ist  $b_1 \in [0, 2]$  nach Voraussetzung, also  $0 \leq b_1 \leq 2$ .

*Induktionsvoraussetzung:* Sei  $0 \leq b_n \leq 2$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  (IV).

*Induktionsschluss:* Unter der (IV) gilt dann einerseits

$$b_{n+1} = 1 + \frac{b_n^2}{4} \stackrel{\text{(IV)}}{\leq} 1 + \frac{2^2}{4} = 1 + 1 = 2,$$

also  $b_{n+1} \leq 2$ . Andererseits gilt

$$b_{n+1} = 1 + \underbrace{\frac{b_n^2}{4}}_{\geq 0} \geq 1 \geq 0,$$

also auch  $b_{n+1} \geq 0$ . Insgesamt gilt also  $0 \leq b_{n+1} \leq 2$ .

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist  $0 \leq b_n \leq 2$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Somit ist im Fall  $b_1 \in [0, 2]$  die wachsende Folge  $(b_n)$  zusätzlich nach oben beschränkt. Nach dem Monotoniekriterium und unserer Vorüberlegung gilt somit auch die Umkehrung obiger Implikation

$$b_n \rightarrow 2 \quad (n \rightarrow \infty) \iff b_1 \in [0, 2].$$

Insgesamt haben wir also gezeigt: Die Folge  $(b_n)$  kann nur gegen 2 konvergieren und es gilt

$$b_n \rightarrow 2 \quad (n \rightarrow \infty) \iff b_1 \in [0, 2].$$

## Aufgabe 24 (Häufungspunkte, Teilfolgen, Exponentialfolge)

(a) Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folge  $(a_n)$ , wobei

$$a_n := (1 + \sqrt[n]{e}) \left( \frac{1}{2} \right)^{1+(-1)^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- (b) Zeigen Sie, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{k}{n})^n = e^k$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  gilt.

## Lösungsvorschlag zu Aufgabe 24

- (a) Ist  $(x_n)$  eine Folge, so bezeichnen wir mit  $H((x_n))$  die Menge ihrer Häufungspunkte. Zur Bestimmung von  $H((a_n))$  betrachten wir die Teilfolgen  $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(a_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$  separat. Aus der Vorlesung ist der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$  für jedes  $a > 0$  bekannt; insbesondere konvergieren die Folge  $(\sqrt[n]{e})$  und damit auch ihre Teilfolgen  $(\sqrt[2k]{e})$  und  $(\sqrt[2k-1]{e})$  gegen 1. Mit Aufgabe 21 (c) und Sätzen 3.6 und 3.8 folgt nun

$$a_{2k} = (1 + \sqrt[2k]{e}) \left( \frac{1}{4} \right) \longrightarrow (1 + 1) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad (k \rightarrow \infty),$$

und

$$a_{2k-1} = (1 + \sqrt[2k-1]{e}) \left( \frac{1}{2} \right)^0 \longrightarrow (1 + 1) \cdot 1 = 2 \quad (k \rightarrow \infty),$$

Nach Lemma 6.16 des Übungsaufschrriebes folgt  $H((a_n)) = \{\frac{1}{2}, 2\}$ .

- (b) Für festes, aber beliebig gewähltes  $k \in \mathbb{Z}$  definieren die Folge  $(e_n^{(k)})$  durch  $e_n^{(k)} := (1 + \frac{k}{n})^n$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Ferner definieren wir die Folge  $(a_n) = (1 + \frac{1}{n})$  und für  $k \in \mathbb{N}$  die Folge  $(b_n^{(k)}) = (1 + \frac{k}{n})$ .

Wir müssen  $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n^{(k)} = e^k$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  zeigen. Wir zeigen diese Aussage zunächst für alle  $k \in \mathbb{N}$  per vollständiger Induktion.

**Behauptung:** Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n^{(k)} = e^k$ .

*Beweis.* Wir zeigen die Aussage per vollständiger Induktion.

*Induktionsanfang:* Für  $k = 1$  ist der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n^{(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e^1$  aus der Vorlesung bekannt (IA).

*Induktionsvoraussetzung:* Es gelte  $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n^{(k)} = e^k$  (IV).

*Induktionsschritt:* Unter der (IV) gilt dann für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} e_n^{(k+1)} &= \left( \left( 1 + \frac{k}{n} \right) + \frac{1}{n} \right)^n = \left( 1 + \frac{k}{n} \right)^n \left( 1 + \frac{1}{(1 + \frac{k}{n})n} \right)^n \\ &= \left( 1 + \frac{k}{n} \right)^n \left( 1 + \frac{1}{n+k} \right)^n = \left( 1 + \frac{k}{n} \right)^n \left( 1 + \frac{1}{n+k} \right)^{n+k} \left( 1 + \frac{1}{n+k} \right)^{-k} \\ &= e_n^{(k)} \cdot e_{n+k}^{(1)} \cdot (a_{n+k})^{-k}. \end{aligned}$$

Nach (IA) konvergiert  $(e_n^{(1)})$  gegen  $e$ , nach (IV)  $(e_n^{(k)})$  gegen  $e^k$  und nach Sätzen 3.6 und 3.8 konvergiert  $(a_{n+k})_{n \in \mathbb{N}}$  gegen 1 für  $n \rightarrow \infty$ . Da Teilfolgen einer konvergenten Folge gegen den Grenzwert der Folge konvergieren, folgern wir daher mit Satz 3.8

$$e_n^{(k+1)} = e_n^{(k)} \cdot e_{n+k}^{(1)} \cdot (a_{n+k})^{-k} \rightarrow e^k \cdot e \cdot 1 = e^{k+1} \quad (n \rightarrow \infty).$$

□

Für  $k = 0$  ist wegen  $e_n^{(0)} = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $e^0 = 1$  die Aussage  $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n^{(0)} = e^0$  trivial. Sei nun  $k \in \mathbb{N}$  beliebig aber fest. Dann haben wir für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > k$

$$e_n^{(-k)} = \left( \frac{n}{n} - \frac{k}{n} \right)^n = \frac{1}{\left( \frac{n}{n-k} \right)^n} = \frac{1}{\left( 1 + \frac{k}{n-k} \right)^n} = \frac{1}{e_{n-k}^{(k)}} \frac{1}{\left( 1 + \frac{k}{n-k} \right)^k} = \frac{1}{e_{n-k}^{(k)}} \cdot \frac{1}{(b_{n-k}^{(k)})^k}.$$

Da nach dem bereits Bewiesenen  $(e_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $e^k$  und  $(b_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$  nach Satz 3.6 gegen 1 konvergiert, konvergieren auch die verschobenen Folgen  $(e_{n-k}^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $e$  und  $(b_{n-k}^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$  gegen 1 für  $n \rightarrow \infty$  (warum genau?). Aus Sätzen 3.6 und 3.8 folgt nun

$$e_n^{(-k)} = \frac{1}{e_{n-k}^{(k)}} \cdot \frac{1}{(b_{n-k}^{(k)})^k} \rightarrow \frac{1}{e^k} \cdot \frac{1}{1^k} = e^{-k} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Da  $\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup (-\mathbb{N}_0)$  gilt, haben wir also tatsächlich wie gewünscht  $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n^{(k)} = e^k$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  nachgewiesen.

### Aufgabe 25 (K) (Sandwichkriterium, Teilfolgen)

(a) Es seien  $k \in \mathbb{N}$  und  $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ . Wir definieren die Folge  $(a_n)$  durch

$$a_n := \left( \sum_{j=1}^k |x_j|^n \right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|x_1|^n + |x_2|^n + \dots + |x_k|^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie, dass  $(a_n)$  gegen  $a := \max\{|x_j| : 1 \leq j \leq k\}$  konvergiert.

(b) Sei  $(a_n)$  eine Folge. Zeigen Sie: Die Folge  $(a_n)$  konvergiert genau dann, wenn jede der Teilfolgen  $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(a_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(a_{3k})_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert.

Gilt die Aussage auch, wenn nur die Teilfolgen  $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(a_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$ , aber nicht  $(a_{3k})_{k \in \mathbb{N}}$  als konvergent angenommen werden?

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 25

(a) Es seien  $k \in \mathbb{N}$  und  $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ . Ferner sei  $a := \max\{|x_j| : 1 \leq j \leq k\}$ . Dann gilt  $a = |x_{j_0}|$  für ein  $j_0 \in \{1, \dots, k\}$ . Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt dann

$$a^n = |x_{j_0}|^n \leq \sum_{j=1}^n |x_j|^n \leq \sum_{j=1}^n a^n = na^n.$$

Durch Ziehen der  $n$ -ten Wurzel erhalten wir hieraus

$$a \leq a_n \leq \sqrt[n]{na} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da nach Aufgabe 21 (a) und Satz 3.6  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{na} = 1 \cdot a = a$  gilt, folgt aus dem Sandwichkriterium sofort, dass  $(a_n)$  konvergent ist mit Grenzwert  $a$ .

(b) Sei  $(a_n)$  eine Folge. Zu zeigen ist die Äquivalenz

$$(a_n) \text{ konvergiert.} \iff (a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}, (a_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}} \text{ und } (a_{3k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ konvergieren.}$$

„ $\implies$ “: Ist  $(a_n)$  konvergent, so ist auch jede Teilfolge von  $(a_n)$  konvergent, also insbesondere auch die Teilfolgen  $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(a_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(a_{3k})_{k \in \mathbb{N}}$ .

„ $\impliedby$ “: Seien  $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(a_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(a_{3k})_{k \in \mathbb{N}}$  konvergent. Also existieren die Grenzwerte  $a := \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k}$ ,  $b := \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1}$  und  $c := \lim_{k \rightarrow \infty} a_{3k}$ . Dann gilt  $a = b$ , denn: Da  $(a_{6k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(a_{3k})_{k \in \mathbb{N}}$  ist, folgt aus Lemma 3.15 der Vorlesung

$$a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} \stackrel{3.15}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} a_{6k} \stackrel{3.15}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} a_{3k} = c. \quad (2)$$

Ebenso gilt, dass  $(a_{6k-3})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(a_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(a_{3k})_{k \in \mathbb{N}}$  ist, sodass auch

$$b = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} \stackrel{3.15}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} a_{6k-3} \stackrel{3.15}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} a_{3k} = c. \quad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt also wie gewünscht

$$a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{3k} = b.$$

Es gilt also  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} = a$ . Hieraus folgt, dass  $(a_n)$  gegen  $a$  konvergiert, denn: Ist  $\varepsilon > 0$  beliebig aber fest, so existiert wegen der Konvergenz von  $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$  gegen  $a$  ein Index  $K_{1,\varepsilon} \in \mathbb{N}$  mit

$$|a_{2k} - a| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq K_{1,\varepsilon}. \quad (4)$$

Genauso existiert wegen der Konvergenz von  $(a_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$  gegen  $a$  ein Index  $K_{2,\varepsilon} \in \mathbb{N}$  mit

$$|a_{2k-1} - a| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq K_{2,\varepsilon}. \quad (5)$$

Wir setzen  $N_\varepsilon := \max\{2K_{1,\varepsilon}, 2K_{2,\varepsilon} - 1\} \in \mathbb{N}$ . Es gilt dann  $\{n \in \mathbb{N} : n \geq N_\varepsilon\} \subseteq \{2k \in \mathbb{N} : k \geq K_{1,\varepsilon}\} \cup \{2k - 1 \in \mathbb{N} : k \geq K_{2,\varepsilon}\}$ , und daher folgt aus (4) und (5)

$$|a_n - a| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon.$$

Dies zeigt die Konvergenz von  $(a_n)$  gegen  $a$ .

## Aufgabe 26 (Cesàro-Mittel)

Sei  $(a_n)$  eine Folge. Dann definieren wir die Folge der *Cesàro-Mittel*  $(c_n)$  durch

$$c_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Das Folgenglied  $c_n$  ist also das arithmetische Mittel von  $a_1, \dots, a_n$ .

- (a) Zeigen Sie: Konvergiert  $(a_n)$  gegen ein  $a \in \mathbb{C}$ , dann konvergiert auch  $(c_n)$  gegen  $a$ .
- (b) Geben Sie eine divergente Folge  $(a_n)$  an, deren Folge von Cesàro-Mitteln konvergiert. Beweisen Sie die Konvergenz.

## Lösungsvorschlag zu Aufgabe 26

- (a) (a) Bevor wir uns dem „rigorosen“ Beweis zuwenden (d.h. einer streng logischen Argumentation auf Grundlage der bereits bekannten Definitionen und Sätzen aus der Vorlesung), beginnen wir mit einem *heuristischen* (d.h. etwas „grobe“) Blick auf das Problem, der uns die Idee für einen rigorosen Beweis liefern kann. Sei  $\varepsilon > 0$  eine noch so kleine positive Zahl. Wir wollen nun begründen, warum  $|c_n - a| \approx \varepsilon$  für genügend großes  $n$  sein sollte. Konvergiert  $(a_n)$  gegen  $a$ , so gibt es einen Index  $N = N_\varepsilon$ , ab dem der Abstand  $|a_n - a|$  die vorgegebene Schranke  $\varepsilon$  unterschreitet, d.h., es gilt dann  $|a_n - a| \leq \varepsilon$  für alle  $n \geq N$ . Wenn nun  $N = 1$  wäre, so wäre auch für alle  $n \geq N = 1$  wie gewünscht (der Übersichtlichkeit halber lassen wir im Folgenden die Beträge weg)

$$c_n - a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - \frac{na}{n} = \frac{(a_1 - a) + \dots + (a_n - a)}{n} \approx \frac{\varepsilon + \dots + \varepsilon}{n} = \frac{n\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

Im Allgemeinen wird aber  $N$  sehr groß sein, vor allem dann, wenn  $\varepsilon > 0$  sehr klein ist. Ähnlich wie oben können wir aber trotzdem für  $n \geq N$  schreiben

$$c_n - a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - \frac{na}{n} = \frac{(a_1 - a) + \dots + (a_{N-1} - a) + (a_N - a) + \dots + (a_n - a)}{n}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{(a_1 - a) + \dots + (a_{N-1} - a)}{n} + \frac{(a_N - a) + \dots + (a_n - a)}{n} \\
&\approx \frac{(a_1 - a) + \dots + (a_{N-1} - a)}{n} + \frac{\varepsilon + \dots + \varepsilon}{n} \\
&= \frac{(a_1 - a) + \dots + (a_{N-1} - a)}{n} + \frac{n - (N - 1)}{n} \varepsilon \\
&\leq \frac{(a_1 - a) + \dots + (a_{N-1} - a)}{n} + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Nun bemerken wir, dass der erste Term auf der rechten Seite für genügend großes  $n \gg N$  nicht wirklich ins Gewicht fällt, da dieser eine Nullfolge bildet (denn  $(a_1 - a) + \dots + (a_{N-1} - a)$  ist eine *endliche* Summe, also einfach nur eine Zahl, und  $(\frac{1}{n})$  ist eine Nullfolge). Somit gilt für genügend großes  $n \gg N$

$$c_n - a \approx \frac{(a_1 - a) + \dots + (a_{N-1} - a)}{n} + \varepsilon \approx \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

was die Konvergenz von  $(c_n)$  gegen  $a$  nahelegt (der Faktor 2 vor  $\varepsilon$  ist irrelevant, s. die Bemerkung auf S.29 des Vorlesungsskriptes).

An dieser Stelle sei nochmal betont: Die obigen heuristischen Überlegungen ersetzen **keinen** Beweis, sondern liefern nur die Idee für letzteren. Einen Beweis wollen wir jetzt angeben:

**Behauptung:** Sei  $(a_n)$  eine gegen  $a \in \mathbb{C}$  konvergente Folge und  $(c_n)$  so wie in der Aufgabenstellung. Dann ist auch  $(c_n)$  konvergent und es gilt  $c_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$ .

*Beweis.* : Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir müssen zeigen, dass ein Index  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  existiert, sodass

$$|c_n - a| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon. \quad (6)$$

Dies zeigen wir im Folgenden. Weil  $(a_n)$  nach Voraussetzung gegen  $a$  konvergiert, gibt es zu  $\frac{\varepsilon}{2} > 0$  ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq N_0. \quad (7)$$

Setze

$$M := \sum_{j=1}^{N_0-1} |a_j - a| = |a_1 - a| + \dots + |a_{N_0-1} - a| \geq 0.$$

und wähle nun  $N_1 \in \mathbb{N}$  so, dass

$$\frac{M}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq N_1 \quad (8)$$

(dies ist möglich, da  $(\frac{M}{n})$  eine Nullfolge ist). Wir setzen schließlich  $N_\varepsilon := \max\{N_0, N_1\} \in \mathbb{N}$ . Somit erhalten wir durch Anwendung der Dreiecksungleichung (Satz 2.23 (ix)) für alle  $n \geq N_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
|c_n - a| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (a_k - a) \right| \stackrel{2.23 \text{ (ix)}}{\leq} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k - a| \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_0-1} |a_k - a| + \frac{1}{n} \sum_{k=N_0}^n |a_k - a|
\end{aligned}$$

$$\stackrel{(7)}{\leq} \frac{M}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{2} = \frac{M}{n} + \frac{n}{n} \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\stackrel{(8)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

was genau (6) ist. Da  $\varepsilon > 0$  beliebig gewählt war, konvergiert also die Folge  $(c_n)$  nach Definition 3.2 gegen  $a$ .  $\square$

- (b) Die Folge  $(a_n) := ((-1)^n)$  ist nach Vorlesung divergent. Mit vollständiger Induktion sieht man unmittelbar ein, dass

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade,} \\ -1, & n \text{ ungerade,} \end{cases} \quad \text{also insbesondere} \quad \left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| \leq 1.$$

Hieraus folgt

$$|c_n| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| \leq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

sodass  $(c_n)$  nach dem Sandwichkriterium für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergiert.

## Anmeldung für den Übungsschein

Die Anmeldung für den Übungsschein ist jetzt freigeschaltet. Sie haben **bis zum 13.02.2022, 23:59 Uhr**, Zeit, sich im Campus Management System für den Übungsschein anzumelden. Das Campus Management System ist abrufbar unter

<https://campus.studium.kit.edu/>.

Damit wir Ihnen (bei Erfüllen der Kriterien) den Übungsschein später verbuchen können, ist es zwingend erforderlich, dass Sie sich vorher für den Übungsschein angemeldet haben.