

Analysis I

Lösungsvorschlag zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 45 (Stetigkeit)

(a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x - x^2, & x < 0, \\ c(x-2)^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

stetig ist.

(b) Untersuchen Sie, in welchen Punkten die folgenden Funktionen stetig sind.

(i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := [x] = \max\{k \in \mathbb{Z}: k \leq x\},$

(ii) $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := \begin{cases} \frac{1}{n}, & \exists n \in \mathbb{N}: x = \frac{n-1}{n}, \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \{\frac{n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}. \end{cases}$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 45

(a) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ so definiert wie in der Aufgabenstellung. Damit f stetig ist, muss für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ folgende Bedingung gelten: Ist $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ eine Folge mit $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$), so folgt auch $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ ($n \rightarrow \infty$). Wir unterscheiden die Fälle $x_0 < 0, x_0 > 0$ und $x_0 = 0$.

1. Fall: Sei zunächst $x_0 < 0$ und $(x_n)_{n \geq 1}$ mit $x_n \rightarrow x_0$ für $n \rightarrow \infty$. Da $x_n \rightarrow x_0 < 0$ ($n \rightarrow \infty$), existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n < 0$ für alle $n \geq n_0$ (wähle $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < -x_0$ in der Definition der Konvergenz). Nun folgt aus den Rechenregeln für konvergente Folgen für $n \geq n_0$

$$f(x_n) = 1 - 2x_n - x_n^2 \rightarrow 1 - 2x_0 - x_0^2 = f(x_0) \quad (n \rightarrow \infty).$$

2. Fall: Sei $x_0 > 0$ und $(x_n)_{n \geq 1}$ mit $x_n \rightarrow x_0$ für $n \rightarrow \infty$. Da $x_n \rightarrow x_0 > 0$ ($n \rightarrow \infty$), existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n > 0$ für alle $n \geq n_0$ (wähle $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < x_0$ in der Definition der Konvergenz). Nun folgt aus den Rechenregeln für konvergente Folgen für $n \geq n_0$

$$f(x_n) = c(x_n - 2)^2 \rightarrow c(x_0 - 2)^2 = f(x_0) \quad (n \rightarrow \infty).$$

3. Fall: Sei $x_0 = 0$. Dann ist f genau dann stetig in 0, falls $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Letzterer Grenzwert existiert nach der 11. Übung dann, wenn $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) =: \alpha$ und in diesem Fall gilt $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \alpha$. Nun ist

$$f(0) = 4c, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} 1 - 2x - x^2 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} c(x-2)^2 = 4c.$$

Damit ist f genau dann stetig in 0 (und damit nach Fällen 1 und 2 stetig auf ganz $\mathbb{R}$), falls $c = \frac{1}{4}$ ist.

- (b) (i) Sei zunächst $x_0 \in (k, k+1)$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Nach Definition von f ist dann $f(x) = f(x_0)$ für alle $x \in (k, k+1)$. Aus Lemma 5.4 folgt hieraus $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Also ist f in x_0 stetig.

Sei nun $x_0 = k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist $f(x_0) = x_0$ und

$$f(x) = \begin{cases} x_0, & \text{falls } x \in [x_0, x_0 + 1), \\ x_0 - 1, & \text{falls } x \in [x_0 - 1, x_0). \end{cases}$$

Hieraus folgt unmittelbar $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = x_0 - 1 = f(x_0) - 1$ und $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = x_0 = f(x_0)$. Insbesondere ist $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$. Also existiert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ nicht. Insbesondere ist f in x_0 nicht stetig. Damit ist

$$\{x \in [0, 1] \mid f \text{ ist stetig in } x\} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

- (ii) Sei zunächst $x_0 = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\min\{|x - \frac{m-1}{m}| \mid m \in \mathbb{N}, m \neq n\} = \frac{1}{n(n+1)}$ (warum genau?). Wir wählen $\delta > 0$, sodass $\delta < \frac{1}{n(n+1)}$ gilt. Dann gilt

$$g(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$$

Aus Lemma 5.4 folgt nun $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, aber es gilt $g(x_0) = 1$ nach Definition von g . Also ist g in x_0 nicht stetig.

Sei nun $x_0 \in [0, 1)$, aber $x_0 \neq \frac{n-1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}) = [0, 1)$, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n-1}{n} < x_0 < \frac{n}{n+1}$. Nach Definition von g gilt $g(x) = 0$ für alle $x \in (\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1})$. Hieraus folgt sofort $g(x_0) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. Also ist g in x_0 stetig.

Seien schließlich $x_0 = 1$ und $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq [0, 1]$ eine Folge mit $x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$). Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \geq 1 - \frac{1}{n_0}$ für alle $n \geq n_0$ (man wähle einfach ein $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon \leq \frac{1}{n_0}$ in der Definition der Folgenkonvergenz). Aus der Definition von g folgt dann $|g(x_n)| = g(x_n) \leq \frac{1}{n_0}$ für alle $n \geq n_0$. Dies zeigt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = 0 = g(1)$ ist. Also ist g in $x_0 = 1$ stetig. Damit gilt also

$$\{x \in [0, 1] \mid g \text{ ist stetig in } x\} = [0, 1] \setminus \left\{ \frac{n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Aufgabe 46 (K) (ε - δ -Kriterium, Stetigkeit)

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe des ε - δ -Kriteriums, dass die Funktion $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ stetig ist.
- (b) Es sei

$$f: [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad f(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 1 - x, & \text{falls } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle Punkte $x \in [0, 1]$, in denen f stetig ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 46

- (a) Es seien $x_0 \in (0, \infty)$ und $\varepsilon > 0$. Wir setzen $\delta := \min\{\frac{x_0}{2}, \frac{x_0^3}{10}\varepsilon\} > 0$. Da $\delta \leq \frac{x_0}{2}$ nach Definition von δ gilt, haben wir

$$\frac{1}{2}x_0 \leq x \leq \frac{3}{2}x_0 \quad \text{für alle } x \in (0, \infty) \text{ mit } |x - x_0| \leq \delta.$$

Hiermit folgern wir für alle $x \in (0, \infty)$ mit $|x - x_0| \leq \delta$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2} \right| = \left| \frac{x_0^2 - x^2}{x^2 x_0^2} \right| = \left| \frac{(x_0 + x)(x_0 - x)}{x^2 x_0^2} \right| = \frac{x + x_0}{x^2 x_0^2} |x - x_0| \\ &\leq \frac{\frac{3}{2}x_0 + x_0}{(\frac{1}{2}x_0)^2 x_0^2} |x - x_0| = \frac{10}{x_0^3} |x - x_0| \leq \frac{10}{x_0^3} \delta \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass $\delta \leq \frac{x_0^3}{10} \varepsilon$ nach Definition von δ gilt. Nach der ε - δ -Charakterisierung der Stetigkeit ist damit f in x_0 stetig. Da wir zu Beginn $x_0 \in (0, \infty)$ beliebig gewählt haben, folgt, dass f auf $(0, \infty)$ stetig ist.

- (b) Sei $x \in [0, 1]$. Dann können wir x sowohl durch rationale als auch durch irrationale Zahlen approximieren: In der Tat, nach Aufgabe 10 (b) ist $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ dicht in $[0, 1]$; Also existiert eine Folge $(x_n) \subseteq [0, 1] \setminus (\mathbb{Q} \cap [0, 1])$ mit $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$. Ferner folgt aus der Dichtheit von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ in $[0, 1]$ (s. Satz 2.16), dass es eine Folge $(y_n) \subseteq \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ gibt mit $y_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$. Ist f in x stetig, so gilt $\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x)$. Insbesondere müsste dann

$$1 - x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$$

gelten, d.h., es muss

$$1 - x = x \iff x = \frac{1}{2}$$

sein. Das heißt: Falls f in $x \in [0, 1]$ stetig ist, so muss $x = \frac{1}{2}$ sein. Wir weisen im Folgenden nach, dass f tatsächlich in $x = \frac{1}{2}$ stetig ist. Sei hierzu $\varepsilon > 0$. Wir setzen $\delta := \varepsilon > 0$. Dann folgt für alle $y \in [0, 1]$ mit $|y - x| \leq \delta$

$$|f(y) - f(x)| \stackrel{(*)}{=} |y - x| \leq \delta = \varepsilon,$$

wobei wir in $(*)$

$$|f(y) - f(x)| = \left| f(y) - \frac{1}{2} \right| = \begin{cases} |y - \frac{1}{2}| = |y - x|, & \text{falls } y \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ |1 - y - \frac{1}{2}| = |y - x|, & \text{falls } y \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1], \end{cases}$$

ausgenutzt haben. Nach der ε - δ -Charakterisierung der Stetigkeit ist f in $x = \frac{1}{2}$ stetig. Es ist also

$$\{x \in [0, 1] : f \text{ ist in } x \text{ stetig}\} = \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

Aufgabe 47 (Stetigkeit und dichte Teilmengen, gleichmäßige Stetigkeit)

- (a) Es seien $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f(q) = g(q)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass dann $f = g$ gilt, d.h., dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
- (b) Es sei $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existiere in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann f gleichmäßig stetig ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 47

- (a) Es seien $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(q) = g(q)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$. Sei ferner $x \in \mathbb{R}$. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist (Satz 2.16), existiert eine Folge $(q_n) \subseteq \mathbb{Q}$ mit $q_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$. Nun folgt aus der Stetigkeit von f und g

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(q_n) = g(x).$$

Da $x \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt war, folgt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h., $f = g$ wie gewünscht.

- (b) Angenommen, $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und der Grenzwert $c := \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \in \mathbb{R}$ existiere. Wir wollen zeigen, dass f gleichmäßig stetig ist.
Sei hierfür $\varepsilon > 0$. Da nach Annahme $c := \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ gilt, existiert nach Lemma 5.5 ein $K := K_{\frac{\varepsilon}{2}} > 0$ mit

$$|f(x) - c| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } x \geq K. \quad (1)$$

Mit f ist auch die Einschränkung von f auf $[0, 2K]$, d.h., die Funktion

$$g: [0, 2K] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x),$$

stetig und nach Satz 5.15 ist g sogar gleichmäßig. Also existiert ein $\delta > 0$ mit $\delta \leq K$ (dies können wir o.B.d.A. annehmen) und

$$x, y \in [0, 2K] \text{ mit } |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| = |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon. \quad (2)$$

Wir behaupten nun

$$x, y \in [0, \infty) \text{ mit } |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon. \quad (*)$$

Zum Nachweis von $(*)$ seien $x, y \in [0, \infty)$ mit $|x - y| \leq \delta$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: $x, y \in [0, 2K]$: Dann folgt $(*)$ direkt aus (2).
2. Fall: $x > 2K$ oder $y > 2K$: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $x > 2K$ gilt (anderenfalls vertauschen wir x und y). Dann gilt auch

$$y = x + (y - x) \geq x - |x - y| \geq x - \delta \geq 2K - \delta \geq K,$$

Daher können wir (1) anwenden und erhalten unter Anwendung der Dreiecksungleichung

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - c| + |f(y) - c| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Damit haben wir $(*)$ nachgewiesen, und da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, zeigt $(*)$ die gleichmäßige Stetigkeit von f .

Aufgabe 48 (K) (Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit)

- (a) Eine stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle die Funktionalgleichung $f(s + t) = f(s) + f(t)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f linear ist, d.h., dass es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = ax$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $f(q) = aq$ für ein $a \in \mathbb{R}$ und alle $q \in \mathbb{Q}$ und nutzen Sie dann Aufgabenteil 47 (a).

- (b) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit.

(i) $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{1 + x^2},$

(ii) $g: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{\min\{|x - a_n|, |x - a_{n+1}|\}}{|a_{n+1} - a_n|}, \quad \text{falls } x \in (a_{n+1}, a_n] \text{ für ein } n \in \mathbb{N},$

wobei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (0, \infty)$ eine strikt fallende Nullfolge mit $a_1 = 1$ sei.

Hinweis zu (i): Aufgabe 47 (b) könnte nützlich sein.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 48

- (a) Wir setzen $a := f(1)$. Wir behaupten, dass $f(q) = aq$ für alle $q \in \mathbb{Q}$ gilt. Zum Beweis dieser Aussage gehen wir dreischrittig vor.

Schritt 1: Wir behaupten, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ die Identität $f(nx) = nf(x)$ gilt. Dies zeigen wir mit vollständiger Induktion. In der Tat, für $n = 1$ ist die Aussage trivial, und gilt die Aussage für $n \in \mathbb{N}$, so folgt aus der Funktionalgleichung

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x),$$

und damit also auch die Aussage für $n+1$.

Schritt 2: Wir behaupten, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{Z}$ die Identität $f(mx) = mf(x)$ gilt. Für $m \in \mathbb{N}$ haben wir die Aussage bereits in Schritt 1 gezeigt. Für $m = 0$ folgt sie aus $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, was wie gewünscht $f(0) = 0$ impliziert. Sei nun $m \in \mathbb{N}$. Mit Schritt 1 und der Funktionalgleichung folgern wir

$$\begin{aligned} 0 &= f(mx + (-mx)) \\ &= f(m) + f(-mx) = mx + f(-mx) \iff f(-mx) = -mf(x) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Da $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$ ist, haben wir also $f(mx) = mf(x)$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ gezeigt.

Schritt 3: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus Schritt 2

$$a = f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right),$$

d.h.,

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{a}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Sei nun schließlich $q \in \mathbb{Q}$. Dann gibt es $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $q = \frac{m}{n}$. Aus Schritt 2 und dem eben Bewiesenen folgt schließlich wie gewünscht

$$f(q) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = m \frac{a}{n} = aq.$$

Wir haben also gezeigt, dass f mit der Funktion

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = ax$$

auf $\mathbb{Q}$ übereinstimmt, d.h., es gilt $f(q) = g(q)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$. Die Funktion g ist als Polynomfunktion insbesondere stetig, die Funktion f ist nach Voraussetzung stetig. Nun folgt aus Aufgabe 47 (a), dass $f = g$ sein muss, d.h., dass

$$f(x) = ax \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

gelten muss.

- (b) (i) Offenbar ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Ferner gilt für $x > 0$

$$|f(x)| = \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{x}{0+x^2} = \frac{1}{x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty).$$

Also ist $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Nun folgt aus Aufgabe 47 (b), dass f gleichmäßig stetig ist.

- (ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$h_n: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_n(x) = \frac{\min\{|x - a_n|, |x - a_{n+1}|\}}{|a_{n+1} - a_n|}.$$

Aus der 11. Übung folgt dann, dass h_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig ist. Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Da g auf $(a_{n+1}, a_n]$ mit h_n übereinstimmt, folgt, dass auch g auf (a_{n+1}, a_n) stetig ist (warum genau?). Ferner ist g auch in a_n stetig: Für $n = 1$ folgt dies unmittelbar aus der Stetigkeit von h_1 in $a_1 = 1$. Für $n \geq 2$ folgt dies aus

$$\lim_{x \rightarrow a_n+} g(x) \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow a_n+} h_{n-1}(x) = h_{n-1}(a_n) = 0,$$

und

$$\lim_{x \rightarrow a_n-} g(x) = \lim_{x \rightarrow a_n-} h_n(x) \stackrel{(*)}{=} h_n(a_n) = 0,$$

woraus wiederum

$$\lim_{x \rightarrow a_n} g(x) = 0 = g(a_n)$$

folgt. Hierbei haben wir in $(*)$ die Stetigkeit von h_n und h_{n-1} ausgenutzt. Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig war, folgt, dass g auf jedem Intervall $(a_{n+1}, a_n]$, $n \in \mathbb{N}$, und damit auf $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_{n+1}, a_n] = (0, 1]$ stetig ist. Damit ist g stetig. Im Folgenden zeigen wir aber, dass g nicht gleichmäßig stetig ist. Dazu definieren wir $b_n := \frac{a_{n+1} + a_n}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$|b_n - a_n| = \frac{|a_n - a_{n+1}|}{2} \leq \frac{1}{2}|a_n| + \frac{1}{2}|a_{n+1}| \longrightarrow 0 + 0 = 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3)$$

da $(a_n)_n$ nach Voraussetzung eine Nullfolge ist. Aber da $g(a_n) = 0$ und $g(b_n) = \frac{1}{2}$ (nachprüfen!) gilt, erhalten wir

$$|g(b_n) - g(a_n)| = g(b_n) = \frac{1}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt, dass g nicht gleichmäßig stetig sein kann: Angenommen, g wäre gleichmäßig stetig. Wir wählen irgendein $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < \frac{1}{2}$ (z.B. $\varepsilon := \frac{1}{3}$). Die gleichmäßige Stetigkeit von g würde dann die Existenz eines $\delta > 0$ implizieren mit $|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$ für alle $x, y \in (0, 1]$ mit $|x - y| \leq \delta$. Wegen (3) existiert dann aber ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - a_n| < \delta$ und damit $|g(b_n) - g(a_n)| \leq \varepsilon < \frac{1}{2}$. Mit (4) folgt dann aber der Widerspruch

$$\frac{1}{2} = |g(b_n) - g(a_n)| \leq \varepsilon < \frac{1}{2}.$$

Also ist g nicht gleichmäßig stetig.

Aufgabe 49 (Monotone Funktionen)

(Diese Aufgabe wird u.a. in der Übung diskutiert.)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wachsend, d.h., für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$ gilt $f(x) \leq f(y)$. Sei weiterhin $x_0 \in \mathbb{R}$.

- Zeigen Sie, dass die links- und rechtsseitigen Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ existieren.
- Zeigen Sie $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$.
- Zeigen Sie: f ist stetig in $x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 49

- (a) Seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wachsend und $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir definieren die nichtleere Menge $A := \{f(x) \mid x \in \mathbb{R} \text{ mit } x < x_0\}$ und bemerken, dass A durch $f(x_0)$ nach oben beschränkt ist: In der Tat, ist $a \in A$, so existiert $x \in \mathbb{R}$ mit $x < x_0$ und $a = f(x)$. Da f wachsend ist, folgt dann $a = f(x) \leq f(x_0)$. Somit ist $y := \sup A \in \mathbb{R}$ wohldefiniert.

Sei nun $(x_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in $(-\infty, x_0)$ mit $x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$). Wir zeigen $f(x_n) \rightarrow y$ ($n \rightarrow \infty$). Sei hierfür $\varepsilon > 0$. Aus der Charakterisierung des Supremums sehen wir, dass es dann ein $a \in A$ gibt mit $y - \varepsilon < a$, d.h. es existiert ein $x < x_0$, sodass

$$y - \varepsilon < f(x).$$

Da $x_n \rightarrow x_0$ für $n \rightarrow \infty$ und $x < x_0$ gilt, gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $x < x_n$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Mit der Monotonie von f folgt hieraus $f(x) \leq f(x_n)$ für alle $n \geq n_0$. Wir erhalten also

$$y - \varepsilon < f(x) \leq f(x_n) \leq y \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

wobei die letzte Ungleichung wegen $f(x_n) \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a \leq y = \sup A$ für alle $a \in A$ gilt. Insbesondere zeigt dies

$$|f(x_n) - y| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgern wir $f(x_n) \rightarrow y$ für $n \rightarrow \infty$. Da $(x_n)_{n \geq 1}$ in $(-\infty, x_0)$ mit $x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$) beliebig gewählt war, folgt die Existenz von $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ und dass $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = y$ gilt. Die Existenz von $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ zeigt man analog (man definiere $B := \{f(x) \mid x \in \mathbb{R} \text{ mit } x > x_0\}$ und zeige $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf B$).

- (b) Seien A und B wie in Aufgabenteil (a). Dann gilt nach Aufgabenteil (a)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup A \leq f(x_0) \leq \inf B = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

(c) „ $\Rightarrow$ “: Sei f stetig in x_0 . Dann gilt $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Insbesondere gilt $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ und $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, und damit $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

„ $\Leftarrow$ “: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und angenommen, es gelte $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$. Nach Aufgabenteil (b) muss dann aber $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ gelten. Aus der 11. Übung folgt nun, dass $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ gilt. Also ist f in x_0 stetig.

Bemerkung: (1) Ähnlich wie in (a) kann man zeigen, dass für eine wachsende Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ existieren. Definiere hierzu analog $A := \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Dann gelten

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \sup A \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \inf A.$$

Wir zeigen im Folgenden nur $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \sup A$ (der Beweis von $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \inf A$ geht analog). Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. *Fall:* Angenommen, es sei $\sup A = \infty$. Wir müssen zeigen, dass dann auch $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ gilt. Seien hierzu $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ eine Folge mit $x_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ und $K > 0$. Da $\sup(A) = \infty$ gilt, existiert ein $a \in A$ mit $a > K$, d.h., es existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) > K. \tag{5}$$

Da weiter $x_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ gilt, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$x_n \geq x \quad \text{für alle } n \geq N,$$

und daher auf Grund der Monotonie von f

$$f(x_n) \geq f(x) \quad \text{für alle } n \geq N. \quad (6)$$

Aus (5) und (6) folgen

$$f(x_n) \geq f(x) > K \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Da $K > 0$ beliebig gewählt war, folgt hieraus $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$, und da auch (x_n) mit $x_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) beliebig gewählt war, folgt schließlich wie gewünscht $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.
2. Fall: Angenommen, es sei $y := \sup(A) \in \mathbb{R}$. Wir müssen zeigen, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y$ gilt. Sei hierzu $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ eine Folge mit $x_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ und $\varepsilon > 0$. Aus der Definition des Supremums folgt die Existenz eines $a \in A$ mit $a > y - \varepsilon$, d.h., eines $x \in \mathbb{R}$ mit

$$a - \varepsilon < f(x). \quad (7)$$

Da $x_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ gilt, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$x \leq x_n \quad \text{für alle } n \geq N,$$

und damit auf Grund der Monotonie von f auch

$$f(x) \leq f(x_n) \quad \text{für alle } n \geq N. \quad (8)$$

Aus Gleichungen (7) und (8) folgt schließlich

$$y - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x_n) \leq y \quad \text{für alle } n \geq N$$

(wobei die Relation $f(x_n) \leq y$ daher folgt, dass $f(x_n) \in A$ und $y = \sup A$ gelten). Insbesondere folgt hieraus

$$|f(x_n) - y| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt hieraus $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y$, und da zu Beginn die Folge $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ mit $x_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ beliebig gewählt war, folgern wir schließlich wie gewünscht $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y$.

(2) Aus Aufgabenteilen (b) und (c) folgt, dass die Unstetigkeitsstellen einer monoton wachsenden Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aus „Sprungstellen“ besteht, d.h., es gilt

$$\{x_0 \in \mathbb{R}: f \text{ ist nicht stetig in } x_0\} = \{x_0 \in \mathbb{R}: \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)\}.$$

Hieraus und aus der Monotonie von f folgt wiederum, dass die Menge der Unstetigkeitsstellen abzählbar ist. Dies wollen wir aber an dieser Stelle nicht zeigen.