Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Richard Nutt

Lösungsvorschlag zum 1. Übungsblatt

Analysis I

Winter Semester 2025/2026

Aufgabe 1:

Beweisen Sie: (a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k = 2 + 2^{n+1}(n-1)$.

(b) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{j+k}{k} = \binom{j+m+1}{m}$, wobei $j \in \mathbb{N}$ beliebig sei.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
(a) Beweis durch vollständige Induktion. Induktionsanfang $n = 1$: Wir rechnen nach, dass $\sum_{k=1}^{1} k2^k = 1 \cdot 2^1 = 2 = 2 + 2^{1+1}(1-1)$.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung sei gezeigt für ein **festes, aber beliebiges** $n \in \mathbb{N}$.

(*Bemerkung:* Beliebter **Fehler** ist hier, dass geschrieben wird, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte.)

Induktionsschluss: Wir zeigen, dass die Behauptung dann auch für $n + 1$ gilt. Wir haben nämlich

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k2^k &= \sum_{k=1}^{n} k2^k + (n+1)2^{n+1} \overset{\text{IV}}{=} 2 + 2^{n+1}(n-1) + 2^{n+1}(n+1)\\ &= 2 + 2^{n+1} \cdot 2n = 2 + 2^{n+1+1}(n+1-1).\end{aligned}$$

(b) IA: $n = 1$: Nach Gleichungen (0.1) und (0.2) der Vorlesung gilt

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{j+k}{k} = \binom{j}{0} + \binom{j+1}{1} = \binom{j+1}{0} + \binom{j+1}{1} = \binom{j+1+1}{1}.$$

IS: Die Behauptung sei gezeigt für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Wir verwenden nochmal (0.2) und erhalten

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} \binom{j+k}{k} &= \sum_{k=0}^{m} \binom{j+k}{k} + \binom{j+m+1}{m+1} \overset{\text{IV}}{=} \binom{j+m+1}{m} + \binom{j+m+1}{m+1}\\ &= \binom{j+(m+1)+1}{m+1}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (K):
Beweisen Sie die folgenden Identitäten/Aussagen durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

(b) $\displaystyle\prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{j}\right)^j = \frac{n^n}{n!}$ für $n \geq 2$

(c) $\displaystyle\sum_{l=1}^{2n} (-1)^{l+1} \frac{1}{l} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

(d) 5 ist ein Teiler von $6^n - 5n + 4$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:
(a) IA: $n=1$: Es gilt

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \frac{1}{4}\cdot 1\cdot 4 = \frac{1}{4}\cdot 1^2\cdot (1+1)^2.$$

IS: Die Behauptung sei gezeigt für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe des binomischen Satzes (Beispiel 0.3 der Vorlesung) sehen wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{\text{IV}}{=} \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{1}{4}(n^4+2n^3+n^2) + \frac{4}{4}(n^3+3n^2+3n+1) \\
&= \frac{1}{4}(n^4+6n^3+13n^2+12n+4) \\
&= \frac{1}{4}(n^2+2n+1)(n^2+4n+4) \\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2((n+1)+1)^2.
\end{aligned}$$

(b) IA: $n=2$: Es gilt

$$\prod_{j=1}^{1}\left(1+\frac{1}{j}\right)^j = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2 = \frac{4}{2} = \frac{2^2}{2!}.$$

IS: von $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ auf $n+1$: Wir haben

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{1}{j}\right)^j &= \left(\prod_{j=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{j}\right)^j\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{IV}}{=} \frac{n^n}{n!}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \frac{n^n}{n!}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{n!}\cdot\frac{n+1}{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

(c) IA: $n=1$: Es gilt

$$\sum_{l=1}^{2}(-1)^{l+1}\frac{1}{l} = (-1)^2\frac{1}{1} + (-1)^3\frac{1}{2} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} = \sum_{k=1}^{1}\frac{1}{1+k}.$$

IS: von $n \in \mathbb{N}$ auf $n+1$: Durch die Indexverschiebung $k = k'+1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{2(n+1)}(-1)^{l+1}\frac{1}{l} &= \sum_{l=1}^{2n}(-1)^{l+1}\frac{1}{l} + (-1)^{2n+2}\frac{1}{2n+1} + (-1)^{2n+3}\frac{1}{2n+2} \\
&\overset{\text{IV}}{=} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{k'=0}^{n-1}\frac{1}{n+k'+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{k'=1}^{n-1}\frac{1}{n+1+k'} + \frac{1}{\underbrace{n+1}_{k'=0}} + \frac{1}{n+1+n} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{k'=1}^{n-1}\frac{1}{n+1+k'} + \frac{1}{\underbrace{n+1+n}_{k'=n}} + \frac{1}{\underbrace{n+1+n+1}_{k'=n+1}} \\
&= \sum_{k'=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k'},
\end{aligned}$$

denn es ist $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+2} = (1-\frac{1}{2})\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1+n+1}$.

(d) IA: $n=1$: 5 teilt $5 = 6^1 - 5\cdot 1 + 4$.

IV: 5 teile $6^n - 5n + 4$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

IS: Die Behauptung sei gezeigt für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben

$$6^{n+1} - 5(n+1) + 4 = 6\cdot 6^n - 5n - 5 + 4 = 5\cdot 6^n + 6^n - 5n + 4 - 5$$

Nach Induktionsvoraussetzung teilt 5 die Zahl $6^n - 5n + 4$. Auch teilt 5 den Summanden $5\cdot 6^n - 5 = 5(6^n - 1)$, da $6^n - 1$ eine natürliche Zahl ist. Somit teilt 5 auch deren Summe und die Behauptung für $n+1$ ist gezeigt.

Aufgabe 3 (K):
Beweisen Sie die folgenden beiden Aussagen jeweils einmal mit Hilfe vollständiger Induktion und einmal ohne dieses Beweisprinzip.

(a) Es gilt $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(b) Für $a, b \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k = a^{n+1} - b^{n+1}$.

Hinweise zu (a): *Verwenden Sie den binomischer Satz mit $a = b = 1$, sowie Gleichungen (0.1), (0.2). Für den direkten Beweis beginnen Sie mit der Definition des Binomialkoeffizienten.*

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
(a) Nach dem binomischen Satz (Beispiel 0.3 der Vorlesung) gilt $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k = (1+1)^n = 2^n$. Dies verwenden wir in beiden Beweisen.

(1) Mit vollständiger Induktion. IA: $n=1$: Es gilt

$$\sum_{k=1}^{1} k\binom{1}{k} = \binom{1}{1} = 1 = 1\cdot 2^{1-1}.$$

IS: von $n \in \mathbb{N}$ auf $n+1$: Wir verwenden Gleichung (0.2) aus der Vorlesung und die Indexverschiebung $k' = k-1$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k\binom{n+1}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n+1}{k} + (n+1)\binom{n+1}{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) + n + 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} + \sum_{k'=0}^{n-1}(k'+1)\binom{n}{k'} + n + 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} + \sum_{k'=1}^{n-1} k'\binom{n}{k'} + \underbrace{n}_{k'=n} + \sum_{k'=0}^{n-1}\binom{n}{k'} + \underbrace{1}_{k'=n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} + \sum_{k'=1}^{n} k'\binom{n}{k'} + \sum_{k'=0}^{n}\binom{n}{k'} \\
&\overset{\text{IV}}{=} n2^{n-1} + n2^{n-1} + 2^n = 2\cdot n2^{n-1} + 2^n = (n+1)2^n.
\end{aligned}$$

Wie angekündigt haben wir $\sum_{k'=0}^{n}\binom{n}{k'} = 2^n$ benutzt.

(2) Direkter Beweis: Indem wir den Binomialkoeffizient ausschreiben erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \overset{l=k-1}{=} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{n!}{l!(n-(l+1))!} \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{n\cdot(n-1)!}{l!(n-1-l))!} = n\sum_{l=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{l!(n-1-l)!} = n2^{n-1}.\end{aligned}$$

(b) (1) Mit vollständiger Induktion: IA: $n=1$: Es gilt

$$(a-b)\sum_{k=0}^{1} a^{1-k}b^k = (a-b)(a+b) = a^2+ab-ab-b^2 = a^2-b^2.$$

IS: von $n \in \mathbb{N}$ auf $n+1$: Wir haben

$$\begin{aligned}(a-b)\sum_{k=0}^{n+1} a^{n+1-k}b^k &= (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n+1-k}b^k + (a-b)b^{n+1} \\ &= (a-b)a\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k + (a-b)b^{n+1} \\ &\overset{\text{IV}}{=} a(a^{n+1}-b^{n+1}) + (a-b)b^{n+1} \\ &= a^{n+2} - ab^{n+1} + ab^{n+1} - b^{n+2} = a^{n+2} - b^{n+2}\end{aligned}$$

(2) Direkter Beweis: Wir multiplizieren aus und transformieren dann den Index der zweiten Summe durch $k' = k+1$:

$$\begin{aligned}(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k &= \sum_{k=0}^{n} a^{n-k+1}b^k - \sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^{k+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a^{n+1-k}b^k - \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^{k+1} - b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a^{n-(k-1)}b^k - \sum_{k'=1}^{n} a^{n-(k'-1)}b^{k'} - b^{n+1} = a^{n+1} - b^{n+1},\end{aligned}$$

da sich die Summen aufheben.

Aufgabe 4:

(a) Vereinfachen Sie die Summe $\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{1}{2^{j+k}}$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Wenden Sie zunächst *Beispiel 0.3* an.

(b) Üben Sie die mathematische Schreibweise für die folgenden Objekte.

(1) Die Menge aller Quadratzahlen natürlicher Zahlen.
(2) Eine Funktion f die jeder ganzen Zahl x den Wert $x^5 - 33(x+1)x + 17$ zuordnet.
(3) Die Menge aller rationalen Zahlen $q \in \mathbb{Q}$, die eine lineare Gleichung mit natürlichen Koeffizienten erfüllen.
(4) Eine Abbildung g, die jeder rationalen Zahl $q \in \mathbb{Q}$, die einen Kehrwert besitzt, diesen zuordnet.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(a) Wir klammern den Faktor $\frac{1}{2^k}$ aus der inneren Summe aus und schreiben künstlich den Faktor $1^{k-j} = 1$ hinzu. Dann erkennen wir, dass die innere Summe die Form aus dem binomischen Satz hat.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{1}{2^{j+k}} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{1}{2^j}1^{k-j} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\left(1+\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\frac{3^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{(\frac{3}{4})^{n+1}-1}{\frac{3}{4}-1} = 4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)\end{aligned}$$

Wir haben außerdem die geometrische Summenformel (Beispiel 0.2 der Vorlesung) verwendet.

(b) Mit der Notation aus der Vorlesung werden diese Objekte wie folgt geschrieben

$$\begin{aligned}&(1) \quad \{m \in \mathbb{N} \mid \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ mit } m = n^2\} = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}\,,\\ &(2) \quad f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z};\ x \mapsto x^5 - 33(x+1)x + 17\,,\\ & \quad \text{alternativ} \quad f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z};\ f(x) = x^5 - 33x^2 - 33x + 17\,,\\ &(3) \quad \{q \in \mathbb{Q} \mid \exists\, a, b \in \mathbb{N} \text{ mit } aq - b = 0\}\,,\\ &(4) \quad g : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q};\ q \mapsto q^{-1}\,.\end{aligned}$$

Bemerkung: Als Bildmenge der Funktionen könnte man auch andere (Ober-)Mengen verwenden. Dies liefert entsprechend *andere* Funktionen, welche die Aufgabenstellung ebenfalls erfüllen.

Die Menge aus (3) ist tatsächlich gleich $\mathbb{Q}_+$. Wieso?