Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Richard Nutt

Lösungsvorschlag zum 2. Übungsblatt

Analysis I

Winter Semester 2025/2026

Sei stets K ein geordneter Körper.

Aufgabe 1:

a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen für Elemente $a, b, c, d \in K$.

(i) Wenn $a < b$ und $d < 0$, dann gilt $ad > bd$.

(ii) Wenn $b > a > 0$, dann gelten $\frac{b}{a} > 1$ und $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$.

(iii) Wenn $a < b$ und $c < d$, dann gilt $a + c < b + d$.

Beachte: (i) enthält als Spezialfall ($b = 0$) die Aussage "$a < 0$ und $d < 0 \implies ad > 0$".

b) Zeigen Sie: Für alle $v, w \in K$ gelten die Ungleichungen

$$vw \leq \left(\frac{v+w}{2}\right)^2 \leq \frac{v^2 + w^2}{2}.$$

Unter welchen Voraussetzungen gilt Gleichheit und wann die strikte Ungleichung?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

a) (i) $d < 0 \overset{1.4\text{ b)}}{\implies} -d > 0$. Somit

$$a < b \text{ und } -d > 0 \overset{\text{(i)}}{\implies} -ad = a(-d) < b(-d) = -bd \underset{+ad+bd}{\overset{\text{(O+)}}{\implies}} bd < ad.$$

(ii) $a > 0 \overset{1.4\text{ e)}}{\implies} \frac{1}{a} > 0$, $b > 0 \overset{1.4\text{ e)}}{\implies} \frac{1}{b} > 0$. Somit

$$b > a \text{ und } \frac{1}{a} > 0 \text{ und } \frac{1}{b} > 0 \overset{\text{(i)}}{\implies} \frac{b}{a} = b\frac{1}{a} > a\frac{1}{a} = 1 \text{ und } \frac{1}{b} > 0 \overset{\text{(i)}}{\implies} \frac{1}{a} = \frac{b}{a}\frac{1}{b} > 1\frac{1}{b} = \frac{1}{b}.$$

(iii) $a < b$ und $c < d \underset{+c \text{ bzw. } +d}{\overset{\text{(O+)}}{\implies}} a + c < b + c$ und $b + c < b + d \overset{\text{(T)}}{\implies} a + c < b + d$

b) Im Fall $v = w$ reduzieren sich die Ungleichungen zu

$$vw = v^2 = \frac{2v^2}{2} = \frac{v^2 + w^2}{2} = \frac{2^2 v^2}{2^2} = \left(\frac{2v}{2}\right)^2 = \left(\frac{v+w}{2}\right)^2$$

Sei also $v \neq w$. Nach Satz 1.4 d) gilt dann (und nur dann) $0 < (v - w)^2 = v^2 - 2vw + w^2$. Durch Addition bzw. Subtraktion von $2^2 vw = 2vw + 2vw$ folgt mit (O+), dass diese Aussage äquivalent ist zu

$$2^2 vw < v^2 - 2vw + 2vw + 2vw + w^2 = v^2 + 2vw + w^2 = (v + w)^2.$$

Beachte, dass $2 \neq 0$ (wieso?) und somit $2^2 > 0$ nach Satz 1.4 d). Satz 1.4 e) besagt außerdem, dass $(2^2)^{-1} > 0$. Jetzt liefert eine Anwendung von (i) mit $(2^2)^{-1} > 0$ bzw. $2^2 > 0$ die äquivalente Ungleichung

$$vw < \frac{(v+w)^2}{2^2} = \left(\frac{v+w}{2}\right)^2.$$

Auf der anderen Seite folgern wir mit (O+) durch Addition bzw. Subtraktion von $v^2 + 2vw + w^2$, dass $v^2 - 2vw + w^2 > 0$ äquivalent ist zu

$$2(v^2 + w^2) = 2v^2 + 2w^2 > v^2 + 2vw + w^2 = (v + w)^2.$$

Genau wie oben zeigt eine Anwendung von (i) mit $(2^2)^{-1} > 0$ bzw. $2^2 > 0$ dass diese Ungleichung äquivalent ist zu

$$\frac{v^2 + w^2}{2} = \frac{2(v^2 + w^2)}{2^2} > \frac{(v + w)^2}{2^2} = \left(\frac{v + w}{2}\right)^2.$$

Wir haben gesehen, dass in beiden Ungleichungen genau dann Gleichheit gilt, wenn $v = w$. Das heißt, wenn $v \neq w$ gelten die strikten Ungleichungen.

Aufgabe 2 (K):
Zeigen Sie die folgenden Aussagen für Elemente $a, b, c, d \in K$.

(i) Wenn $0 > b > a$, dann gilt $0 > \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
(ii) Wenn $c > a > 0$ und $0 > d > b$, dann gilt $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.
(iii) Wenn $b > 0$, $d > 0$ und $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, dann gelten $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.
(iv) Es gilt $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:
(i) $0 > b > a \overset{\text{A1, (ii)}}{\Longrightarrow} -a > -b > 0 \overset{\text{A1,(iii)}}{\Longrightarrow} \frac{1}{-b} > \frac{1}{-a} > 0 \overset{\text{(ii)}}{\Longrightarrow} 0 > \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

(ii) $0 > d > b \overset{\text{(i)}}{\Longrightarrow} \frac{1}{d} < \frac{1}{b} < 0$. Somit

$$\left[c > a \text{ und } \tfrac{1}{d} < 0 \overset{\text{(ii)}}{\Longrightarrow} \tfrac{c}{d} < \tfrac{a}{d}\right] \text{ und } \left[a > 0 \text{ und } \tfrac{1}{d} < \tfrac{1}{b} \overset{\text{A1,(i)}}{\Longrightarrow} \tfrac{a}{d} < \tfrac{a}{b}\right] \overset{\text{(T)}}{\Longrightarrow} \tfrac{c}{d} < \tfrac{a}{d} < \tfrac{a}{b}.$$

(iii) Wie oben $b, d > 0 \overset{\text{1.4 e)}}{\Longrightarrow} \frac{1}{b}, \frac{1}{d} > 0$. Außerdem $b > 0$ und $d > 0 \implies b + d > 0 \overset{\text{1.4 e)}}{\Longrightarrow} \frac{1}{b+d} > 0$.
$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \overset{\text{A1,(i)}}{\Longrightarrow} ad = \frac{a}{b}bd < \frac{c}{d}bd = cb \overset{\text{(O+)}}{\Longrightarrow} a(b + d) = ab + ad < cb + ab = (a + c)b$. Jetzt

$$a(b + d) < (a + c)b \overset{\text{(i)}}{\Longrightarrow} \frac{a}{b} = a(b + d)\frac{1}{b}\frac{1}{b + d} < (a + c)b\frac{1}{b}\frac{1}{b + d} = \frac{a + c}{b + d}.$$

Andererseits $ad < cb \overset{\text{(O+)}}{\Longrightarrow} (a + c)d = ad + cd < cb + cd = c(b + d)$. Analog zu oben

$$(a + c)d < c(b + d) \overset{\text{(i)}}{\Longrightarrow} \frac{a + c}{b + d} = (a + c)d\frac{1}{d}\frac{1}{b + d} < c(b + d)\frac{1}{d}\frac{1}{b + d} = \frac{c}{d}.$$

(iv) Sei zunächst $ad = bc$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(ac + bd)^2 &= a^2c^2 + adbc + adbc + b^2d^2 = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ &= a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2) = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).\end{aligned}$$

Sei andererseits $ad \neq bc$. Dann gilt

$$\begin{aligned}0 < (ad - bc)^2 &= a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \\ &\underset{+(ac+bd)^2}{\overset{\text{(O+)}}{\Longrightarrow}} (ac + bd)^2 < a^2d^2 \pm 2abcd + b^2c^2 + a^2c^2 + b^2d^2 \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2),\end{aligned}$$

denn es ist $(ac + bd)^2 = a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2$.

Aufgabe 3 (K):
a) Bestimmen Sie jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{Q}$, für die folgende Ungleichungen gelten. Geben Sie die Mengen als Vereinigungen von Intervallen an.

$$(1) \quad |x-5| > 2-3x, \qquad (2) \quad ||x+1|-2| \leq x.$$

b) Seien $a, b \in K$ mit $b > a > 0$. Schreiben Sie die folgende Menge als Vereinigung von Intervallen.

$$M := \left\{ x \in K \setminus \{b\} \,\middle|\, \frac{ax-a^2}{x-b} > b \right\}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
a) (1) Falls $x-5 \geq 0$ ($\iff x \in [5,\infty)$), dann ist

$$\begin{aligned} x-5 = |x-5| > 2-3x &\overset{+3x+5}{\iff} 4x > 7 \\ &\overset{\cdot 4^{-1}}{\iff} x > \tfrac{7}{4} \end{aligned}$$

Das liefert $x \in [5,\infty) \cap (\frac{7}{4},\infty) = [5,\infty)$.
Falls $x-5 < 0$ ($\iff x \in (-\infty,5)$), dann gilt

$$\begin{aligned} 5-x = |x-5| > 2-3x &\overset{+3x-5}{\iff} 2x > -3 \\ &\overset{\cdot 2^{-1}}{\iff} x > -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Also $x \in (-\infty,5) \cap (-\frac{3}{2},\infty) = (-\frac{3}{2},5)$. Insgesamt ist die Ungleichung genau für $x \in (-\frac{3}{2},5) \cup [5,\infty) = (-\frac{3}{2},\infty)$ erfüllt.

(2) Falls $x+1 \geq 0$ ($\iff x \in [-1,\infty)$), dann ist $|x-1| = |x+1-2| = ||x+1|-2| \leq x$. Wenn zusätzlich $x-1 \geq 0$ ($\iff x \in [1,\infty)$), erhalten wir

$$x-1 = ||x+1|-2| \leq x \overset{-x}{\iff} -1 \leq 0$$

Somit ist die Ungleichung für alle $x \in [1,\infty) = [1,\infty) \cap [-1,\infty)$ erfüllt. Wenn andererseits zusätzlich $x-1 < 0$ ($\iff x \in (-\infty,1)$), erhalten wir

$$1-x = ||x+1|-2| \leq x \overset{+x}{\iff} 1 \leq 2x \overset{\cdot 2^{-1}}{\iff} \tfrac{1}{2} \leq x$$

Das liefert $x \in [-1,\infty) \cap (-\infty,1) \cap [\frac{1}{2},\infty) = [\frac{1}{2},1)$.

Falls $x+1 < 0$ ($\iff x \in (-\infty,-1)$), dann gilt $|x+3| = |-x-1-2| = ||x+1|-2| \leq x$. Wenn zusätzlich $x+3 \geq 0$ ($\iff x \in [-3,\infty)$), erhalten wir

$$x+3 = ||x+1|-2| \leq x \overset{-x}{\iff} 3 \leq 0$$

Das heißt in diesem Fall gibt es keine x die die Ungleichung erfüllen. Wenn andererseits zusätzlich $x+3 < 0$ ($\iff x \in (-\infty,-3)$), erhalten wir

$$-x-3 = ||x+1|-2| \leq x \overset{+x}{\iff} -3 \leq 2x \overset{\cdot 2^{-1}}{\iff} -\tfrac{3}{2} \leq x$$

Das liefert $x \in (-\infty,-1) \cap (-\infty,-3) \cap [-\frac{3}{2},\infty) = \emptyset$. Insgesamt ist die Ungleichung genau für $x \in [\frac{1}{2},1) \cup [1,\infty) = [\frac{1}{2},\infty)$ erfüllt.

b) Sei zunächst $x > b$, dann ist $x-b > 0$ und wir können äquivalent umformen:

$$\begin{aligned} \frac{ax-a^2}{x-b} > b &\overset{x-b>0}{\iff} ax-a^2 > bx-b^2 \\ &\overset{(O+)}{\iff} ax-bx = (a-b)x > a^2-b^2 = (a+b)(a-b) \\ &\overset{a-b<0}{\iff} x < a+b. \end{aligned}$$

Das heißt ein $x \in K$ mit $x > b$ erfüllt die Ungleichung (und liegt damit in M) genau dann, wenn $x < a+b$. Anders formuliert $M \cap (b, \infty) = (b, a+b)$.

Sei nun $x < b$, dann ist $x - b < 0$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{ax - a^2}{x - b} > b \quad &\overset{x-b<0}{\iff} \quad ax - a^2 < bx - b^2 \\ &\overset{(O+)}{\iff} \quad (a-b)x < a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \\ &\overset{a-b<0}{\iff} \quad x > a + b. \end{aligned}$$

Das heißt $M \cap (-\infty, b) = (a+b, \infty) \cap (-\infty, b) = \emptyset$, da $a + b > b$.

Insgesamt gilt also $M = M \cap ((-\infty, b) \cup (b, \infty)) = (b, a+b)$.

Aufgabe 4:
Für zwei Elemente $v, w \in K$ definieren wir

$$\min\{v, w\} = \begin{cases} v, & v \leq w, \\ w, & v > w \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \max\{v, w\} = \begin{cases} v, & v \geq w, \\ w, & v < w. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie: Für alle $x, y \in K$ gelten

$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2} \qquad \text{und} \qquad \min\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

b) Beweisen Sie: Für alle $a, w \in K$ gilt

$$|w| \leq a \quad \iff \quad w \leq a \ \text{ und } \ -w \leq a.$$

c) Bestimmen Sie jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{Q}$, für die folgende Ungleichungen gelten. Geben Sie die Mengen als Vereinigungen von Intervallen an.

$$(1) \quad |2x - 10| \leq 6, \qquad (2) \quad |x + 2| > |x - 3|.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:
a) Falls $x \geq y$, dann ist $x - y \geq 0$, also $|x - y| = x - y$ und es gelten

$$\max\{x, y\} = x = \frac{(1+1)x}{1+1} = \frac{x + y + x - y}{1+1} = \frac{x + y + |x - y|}{1+1}$$

sowie

$$\min\{x, y\} = y = \frac{(1+1)y}{1+1} = \frac{x + y - (x - y)}{1+1} = \frac{x + y - |x - y|}{1+1}$$

Falls $x < y$, dann ist $x - y < 0$, also $|x - y| = y - x$ und es gelten

$$\max\{x, y\} = y = \frac{(1+1)y}{1+1} = \frac{x + y + (y - x)}{1+1} = \frac{x + y + |x - y|}{1+1}$$

sowie

$$\min\{x, y\} = x = \frac{(1+1)x}{1+1} = \frac{x + y - (y - x)}{1+1} = \frac{x + y - |x - y|}{1+1}$$

b) Sei zuerst $|w| \leq a$, dann folgt mit Satz 1.6 b) der Vorlesung, dass $w \leq |w| \leq a$ und $-w \leq |w| \leq a$.

Gilt umgekehrt, dass $w \leq |w| \leq a$ und $-w \leq |w| \leq a$ und ist $w \geq 0$, dann ist $|w| = w \leq a$. Im Fall $w < 0$ folgt $|w| = -w \leq a$.

c) (1) Nach Satz 1.6 c) ist $|2x-10| = |2|\,|x-5| = 2\,|x-5|$, denn $2 > 0$. Somit ist $|2x-10| \leq 6$ genau dann wenn $|x-5| \leq 6/2 = 3$. In der Übung haben wir gesehen, dass diese Ungleichung genau von $x \in [5-3, 5+3] = [2, 8]$ erfüllt wird.

(2) Falls $x+2 \geq 0$ und $x-3 \geq 0$ ($\Longleftrightarrow x \in [3, \infty)$), dann gilt

$$x + 2 = |x+2| > |x-3| = x - 3 \quad \overset{-x}{\Longleftrightarrow} \quad 2 > -3$$

Das ist für alle $x \in [3, \infty)$ erfüllt.

Falls $x+2 \geq 0$ und $x-3 < 0$ ($\Longleftrightarrow x \in [-2, 3)$), dann gilt

$$x + 2 = |x+2| > |x-3| = 3 - x \quad \overset{+x-2}{\Longleftrightarrow} \quad 2x > 1 \quad \overset{\cdot 2^{-1}}{\Longleftrightarrow} \quad x > \tfrac{1}{2}$$

Also $x \in [-2, 3) \cap (\frac{1}{2}, \infty) = (\frac{1}{2}, 3)$.

Der Fall $x+2 < 0$ und $x-3 \geq 0 \Longleftrightarrow 3 \geq x < -2$ ist an sich widersprüchlich.

Falls $x+2 < 0$ und $x-3 < 0$ ($\Longleftrightarrow x \in (-\infty, -2)$), dann gilt

$$-x - 2 = |x+2| > |x-3| = 3 - x \quad \overset{+x+2}{\Longleftrightarrow} \quad 0 > 5$$

Also ist die Ungleichung in diesem Fall nicht erfüllbar. Insgesamt ist die Ungleichung genau für $x \in (\frac{1}{2}, 3) \cup [3, \infty) = (\frac{1}{2}, \infty)$ erfüllt.