Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Richard Nutt

Lösungsvorschlag zum 3. Übungsblatt

Analysis I

Winter Semester 2025/2026

Aufgabe 1:
Seien $x, y \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie:

a) $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$,

b) $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$,

c) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2}} \le \sqrt{x+y}$,

d) $\sqrt[n]{x+y} < \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 2$ beliebig ist.

Wann gilt Gleichheit in c)?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Seien $x, y \in \mathbb{R}_+$. Für die folgenden Beweise nutzen wir die Äquivalenzen (1.1) aus der Vorlesung: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$x < y \iff x^n < y^n \quad \text{und} \quad x \le y \iff x^n \le y^n. \tag{$*$}$$

a) Es gilt

$$\left(\sqrt{x+y}\right)^2 = x + y < x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2.$$

Nach der Äquivalenz $(*)$ ist aber obige Ungleichung gleichwertig zu

$$\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

b) Nach Satz 1.4 d) ist $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \ge 0$. Ausmultiplizieren liefert dann die gewünschte Ungleichung, denn

$$0 \le (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \quad \iff \quad 0 \le x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \quad \iff \quad 2\sqrt{x}\sqrt{y} \le x + y.$$

c) Betrachten wir das Quadrat des linken Term und wenden b) an, so erhalten wir

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 = x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \le x + (x+y) + y = 2(x+y) = \left(\sqrt{2(x+y)}\right)^2$$

und damit, wieder $(*)$ verwendend,

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \le \sqrt{2(x+y)} \overset{1.26\text{ a)}}{=} \sqrt{2}\sqrt{x+y} \quad \overset{(\mathrm{O}\cdot)}{\iff} \quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2}} \le \sqrt{x+y}.$$

Man prüft schnell nach, dass obige Äquivalenzen wahr bleiben, wenn wir „≤“durch „=“ersetzen, sodass wir

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2}} = \sqrt{x+y} \iff \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = 0$$

erhalten. Die Gleichung auf der rechten Seite ist aber äquivalent zu $x = y$, sodass Gleichheit in c) genau dann auftritt, wenn $x = y$ ist.

d) Die Beweisidee ist dieselbe wie in a) mit dem Unterschied, dass man den (allgemeineren) binomischen Lehrsatz (Beispiel 0.3 aus der Vorlesung) statt der binomischen Formel verwenden muss. Es ist

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[n]{x+y}\right)^n &= x + y < \underbrace{x}_{k=0} + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\left(\sqrt[n]{x}\right)^k\left(\sqrt[n]{y}\right)^{n-k} + \underbrace{y}_{k=n} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\sqrt[n]{x}\right)^k\left(\sqrt[n]{y}\right)^{n-k} \overset{0.3}{=} \left(\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}\right)^n,\end{aligned}$$

sodass aus $(*)$ wiederum $\sqrt[n]{x+y} \le \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$ folgt.

Aufgabe 2 (K):
Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie:

a) $a^{\frac{1}{m}} < a^{\frac{1}{n}}$, falls $m < n$ und $0 < a < 1$,

b) $a^{\frac{1}{m}} > a^{\frac{1}{n}}$, falls $m < n$ und $a > 1$,

c) $b^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}} < (b-a)^{\frac{1}{n}}$, falls $a < b$ und $n \ge 2$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:
a) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ und $a \in \mathbb{R}_+$ mit $0 < a < 1$. Nach Voraussetzung ist dann $\frac{n}{m} - 1 > 0$ und $a < 1$, sodass aus Satz 1.29 d) die Ungleichung $a^{\frac{n}{m}-1} < 1^{\frac{n}{m}-1} = 1$ folgt. Dies und die Potenzgesetze aus Satz 1.29 verwendend, erhalten wir

$$\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n \overset{1.29\text{ c)}}{=} a^{\frac{n}{m}} \overset{1.29\text{ b)}}{=} a^{\frac{n}{m}-1}a^1 \overset{1.29\text{ d)}}{<} 1^{\frac{n}{m}-1}a = a = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n \tag{1}$$

Obige Ungleichung ist nach $(*)$ aus Aufgabe 1 äquivalent zu $a^{\frac{1}{m}} < a^{\frac{1}{n}}$.
b) Der Beweis von b) kann exakt genauso geführt werden wie der von a), wobei wegen der Voraussetzung $a > 1$ (statt $0 < a < 1$) die Ungleichung in (1) sich umkehrt und wir aus $(*)$ aus Aufgabe 1 die gewünschte Gleichung $a^{\frac{1}{m}} > a^{\frac{1}{n}}$ erhalten. Man kann aber auch b) auf a) durch Übergang zum Kehrwert zurückführen: Seien hierfür $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ und $a \in \mathbb{R}_+$ mit $a > 1$. Nach Aufgabe 1 (ii), Blatt 1, gilt dann $0 < \frac{1}{a} < 1$. Also können wir die bereits bewiesene Aussage a) auf die Zahl $\frac{1}{a}$ anwenden und erhalten

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{m}}} \overset{1.29\text{ c)}}{=} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{m}} \overset{\text{a)}}{<} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} \overset{1.29\text{ c)}}{=} \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}},$$

was wiederum nach Aufgabe 1 (ii), Blatt 1, die Gleichung $a^{\frac{1}{m}} > a^{\frac{1}{n}}$ impliziert.
c) Seien $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}_+$ mit $a < b$. Wir betrachten zunächst den Fall $b = 1$. Dann gilt mit Aufgabe 1 d)

$$1 = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{(1-a)+a} \overset{\text{A1 d)}}{<} \sqrt[n]{1-a} + \sqrt[n]{a} \quad \underset{-\sqrt[n]{a}}{\overset{(\text{O+})}{\Longrightarrow}} \quad 1 - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{1-a}, \tag{2}$$

wobei die Ungleichung auf der rechten Seite von (2) genau die zu zeigende Ungleichung für den Fall $b = 1$ ist. Der allgemeine Fall $b > a$ lässt sich auf den Fall $b = 1$ mittels der Potenzgesetze (Satz 1.29) zurückführen. Da nach Voraussetzung $a < b$, also $\frac{a}{b} < 1$ gilt, können wir die Ungleichung auf der rechten Seite von (2) auf $\frac{a}{b}$ (anstelle von a) anwenden und erhalten

$$\sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a} \overset{(\text{DG})}{=} \sqrt[n]{b}\left(1 - \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right) \overset{1.29}{=} \sqrt[n]{b}\left(1 - \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right) \overset{(2)}{<} \sqrt[n]{b}\sqrt[n]{1 - \frac{a}{b}} \overset{1.29}{=} \sqrt[n]{b\left(1 - \frac{a}{b}\right)} \overset{(\text{DG})}{=} \sqrt[n]{b-a}.$$

Aufgabe 3 (K):
a) Untersuchen Sie folgende Mengen auf die Existenz von Infimum, Supremum, Minimum und Maximum. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Wert.

(i) $A = \{x^4 \mid x \in [-5, 1)\}$

(ii) $B = \left\{ \dfrac{|x|}{1+|x|} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$

(iii) $C = \{x \mid \exists\, y \in \mathbb{R} : \; (x+2)^2 + 4y^2 < 9\}$

b) Es seien $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$. Weiter sei A nach unten beschränkt mit $\inf A > 0$ und setze $B := \{a^{-1} \mid a \in A\}$. Zeigen Sie, dass B nach oben beschränkt ist und es gilt $\sup B = (\inf A)^{-1}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
a) (i)$A := \{x^4 : x \in [-5, 1)\}$ Nach Satz 1.4 gilt $x^4 \geq 0$ und es gilt $0^4 = 0$, d.h. $\min A = \inf A = 0$. Andererseits $(-x)^4 = x^4$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit gilt $A = \{x^4 : x \in [0, 5]\}$. Weiter ist nach Satz 1.29 somit

$$x \leq 5^4 = 625 \text{ für alle } x \in A\,.$$

Folglich

$$\inf A = 0,\ \sup A = 625,\ \min A = 0,\ \max A = 625\,.$$

(ii) $B = \left\{ \frac{|x|}{1+|x|} : x \in \mathbb{R} \right\}$

Für $x = 0$ ist $\frac{|x|}{1+|x|} = 0$. Weiter ist nach Satz 1.4f) und Satz 1.6a), $\frac{|x|}{1+|x|} \geq 0$, also ist $\inf B = \min B = 0$. Weiter

$$|x| < 1 + |x| \iff \tfrac{|x|}{1+|x|} < 1\,.$$

Also ist B nach oben durch 1 beschränkt. Wir zeigen nun mit Satz 1.18a), dass sup $= 1$. Somit existiert auch kein Maximum. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$, dass

$$1 - \varepsilon < \frac{n}{1+n} \iff (1-\varepsilon)(1+n) < n \iff n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Also existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $1 - \varepsilon < \frac{n}{n+1} \leq 1$. Satz 1.18a) zeigt nun, dass $\sup B = 1$. Zusammenfassend

$$\inf B = 0,\ \sup B = 1,\ \min B = 0,\ \max B \text{ existiert nicht}\,.$$

(iii) $C = \{x \mid \exists y \in \mathbb{R} : (x+2)^2 + 4y^2 < 9\}$

Die Ungleichung beschreibt eine Ellipse

$$(x+2)^2 + 4y^2 < 9.$$

Da nach Vorlesung $4y^2 \geq 0$ gilt, muss für die Existenz eines solchen y gelten, dass

$$(x+2)^2 < 9 \overset{1.29e)}{\Longrightarrow} -3 < x + 2 < 3 \implies -5 < x < 1.$$

Dann ist y die Lösung der Gleichung $y^2 = \frac{9-(x+2)^2}{4} > 0$, welche nach Lemma 1.27 existiert. Also

$$C = (-5, 1) \implies \inf C = -5,\ \sup C = 1,\ \min C \text{ existiert nicht},\ \max C \text{ existiert nicht}.$$

b) Wegen $\inf A > 0$ gilt $a > 0$ für alle $a \in A$. Somit folgt nach Satz 1.4 e) der Vorlesung, dass auch $b > 0$ für alle $b \in B$.
Für jedes solche b haben wir $b^{-1} \in A$ und somit $b^{-1} \geq \inf A$. Da $\inf A > 0$ ist, folgt hieraus (vgl. Aufgabe 1 a) (ii) von Übungsblatt 2) die Ungleichung $b = \left(b^{-1}\right)^{-1} \leq (\inf A)^{-1}$. Das zeigt, dass B nach oben beschränkt und $(\inf A)^{-1}$ eine obere Schranke von B ist.
Die Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ liefert die Existenz von $s := \sup B > 0$. Wir zeigen nun, dass $s = (\inf A)^{-1}$ gilt, indem wir $s \leq (\inf A)^{-1}$ und $s \geq (\inf A)^{-1}$ zeigen.

„$\leq$“: Wir haben bereits gezeigt, dass B durch $(\inf A)^{-1}$ nach oben beschränkt ist. Da das Supremum einer Menge ihre kleinste obere Schranke ist, folgt sofort $s \leq (\inf A)^{-1}$.

„$\geq$“: Wir führen einen Widerspruchsbeweis: Angenommen, es gelte $s < (\inf A)^{-1}$. Dies ist äquivalent zu

$s^{-1} > \inf A$ (man beachte, dass hier wieder die Voraussetzung $\inf A > 0$ eingeht). Da $\inf A$ die größte untere Schranke von A ist, muss es dann ein $a \in A$ mit $s^{-1} > a \geq \inf A$ geben. Dann folgt aber $a^{-1} \in B$ und $s < a^{-1}$. Das kann nicht sein, weil s ein obere Schranke für B ist, ein Widerspruch. Also gilt auch $s \geq \inf A$.

Aufgabe 4:
a) Untersuchen Sie die folgende Menge M auf die Existenz von Infimum, Supremum, Minimum und Maximum. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Wert.

$$M = \left\{ x + \frac{1}{x} \;\middle|\; \frac{1}{2} < x \leq 2 \right\}$$

Hinweis: Verwenden Sie dabei nur Kentnisse aus Vorlesung und Übung. (Keine Kurvendiskusion!)

b) Es seien $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass wenn $a \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt, dann existiert ein $s \in \mathbb{R}$ mit $a \leq s \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:
a) $M = \left\{ x + \frac{1}{x} : \frac{1}{2} < x \leq 2 \right\}$

Für $x > 0$ gilt nach Aufgabe 1,b)

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \tfrac{1}{x}} = 1 \implies x + \tfrac{1}{x} \geq 2.$$

Gleichheit tritt ein bei $x = 1$, also $\min C = 2$. Wir zeigen, zunächst $x + \frac{1}{x} \leq \frac{5}{2}$

$$x + \tfrac{1}{x} - \tfrac{5}{2} = \tfrac{x^2 - 5/2x + 1}{x} = \tfrac{(x - \frac{1}{2})(x-2)}{x} \leq 0 \text{ für } x \in \left(\tfrac{1}{2}, 2\right].$$

Für $x = 2$ sehen wir durch einsetzten, dass die obere Schranke angenommen wird. Damit

$$\inf M = 2, \sup M = \tfrac{5}{2}, \min M = 2, \max M = \tfrac{5}{2}.$$

Bemerkung: Mit Hilfe einer Kurvendiskusion der Funktion $f\colon \left(\frac{1}{2}, 2\right] \to \mathbb{R}; f(x) = x + \frac{1}{x}$ kommt man zu selbigen Ergebnis. Allerdings war dies zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht Inhalt der Vorlesung.

b) Sei $b_0 \in B$ beliebig, aber zunächst fest. Da nach Voraussetzung $a \leq b_0$ für alle $a \in A$ gilt, ist b_0 eine obere Schranke von A. Das bedeutet A ist nach oben beschränkt (und nach Voraussetzung nichtleer).
Auf Grund der Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ existiert somit $\sup A$. Wir setzen $s := \sup A$. Weil jedes $b \in B$ eine obere Schranke von A ist (wir haben b_0 oben beliebig gewählt) und s nach Definition die kleinste obere Schranke von A ist, gilt $s = \sup A \leq b$ für alle $b \in B$.[1] Weiterhin ist das Supremum per Definition eine obere Schranke; also gilt $a \leq s$ für alle $a \in A$. Somit erhalten wir insgesamt, dass $a \leq s \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.

Bemerkung: b) ist äquivalent dazu, dass $\mathbb{R}$ ordnungsvollständig ist, siehe Satz I.10.1 in [1].

[1] Das zeigt, dass B nach unten beschränkt ist mit $\inf B \geq \sup A$. Das brauchen wir aber nicht.