

Lösungsvorschlag zum 4. Übungsblatt

Analysis I

Winter Semester 2025/2026

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ mit

$$(1) \quad 2x^2 + 16x = 66, \quad (2) \quad x^2 + 10 = 6x.$$

b) Bestimmen Sie die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ mit

$$(1) \quad z^2 + (-10 + 4i)z + 70 - 20i = 0, \quad (2) \quad z^2 + 6z - 3 + i(4z + 6) = 0.$$

c) Geben Sie die Lösung $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1 + \frac{3}{2}i\}$ der Gleichung

$$\frac{3+i}{4-i} = \frac{1-i+iz}{2+2z-3i}$$

in der Form $z = x + iy$ an.

d) Sei $a, \omega \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass die Gleichung

$$z^2 + 2az + \omega = 0$$

genau dann keine reellen Lösungen hat, wenn $a^2 < \omega$. In diesem Fall hat die Gleichung zwei konjugiert komplexe Lösungen, die auf dem Kreis $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \sqrt{\omega}\}$ liegen.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

a) (1) Es gilt

$$\begin{aligned} 2x^2 + 16x = 66 &\iff x^2 + 8x + 16 - 16 = 33 \\ &\iff (x+4)^2 = 49 = 7^2 \\ &\iff x+4 = \sqrt{49} = 7 \text{ oder } x+4 = -\sqrt{49} = -7 \\ &\iff x = 7-4 = 3 \text{ oder } x = -7-4 = -11 \end{aligned}$$

also $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 16x = 66\} = \{3, -11\}$. Die Mitternachtsformel, p - q -Formel, etc. führen zum gleichen Ergebnis, sind aber für Teil b) evtl. schwierig anzuwenden.

(2) Es gilt

$$x^2 - 6x + 10 = 0 \iff x^2 - 6x + 9 - 9 + 10 = 0 \iff (x-3)^2 = -1$$

Diese Gleichung besitzt keine Lösungen $x \in \mathbb{R}$, denn $(x-3)^2 \geq 0$ und $-1 < 0$. Das heißt $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 6x + 10\} = \emptyset$.

b) (1) Wir setzen $v = 70 - 20i$ und $u = 5 - 2i$. Dann ist die zu lösende Gleichung identisch mit $0 = z^2 - 2uz + v$. Wir addieren $u^2 - u^2 = 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= z^2 - 2uz + v = z^2 - 2uz + u^2 - u^2 + v = (z-u)^2 - (u^2 - v) \\ &\iff (z-u)^2 = u^2 - v = -49, \end{aligned}$$

denn es ist $u^2 = 5^2 - (-2)^2 + i2 \cdot 5 \cdot (-2) = 21 - 20i$, also $u^2 - v = 21 - i20 - 70 + i20 = -49$. Diese letzte Gleichung hat die komplexen Lösungen $z - u = 7i$ oder $z - u = -7i$. Wir setzen u ein und bekommen die Lösungen

$$z = u + 7i = 5 + 5i \quad \text{oder} \quad z = u - 7i = 5 - 9i.$$

(2) Wir wollen die Gleichung

$$0 = z^2 + 6z - 3 + i(4z + 6) = z^2 - 2(-3 - 2i)z + 6i - 3$$

wieder in der Form $z^2 - 2uz + v = 0$ schreiben. Dazu wählen wir $v = 6i - 3$ und $u = -3 - 2i$, und berechnen $u^2 = 5 + 12i$, $u^2 - v = 8 + 6i$. Wie oben sehen wir, dass die Gleichung äquivalent ist zu

$$(z - u)^2 = 8 + 6i.$$

Weil diesmal $(z - u)^2$ nicht reell ist, müssen wir $a = \operatorname{Re}(z - u)$ und $b = \operatorname{Im}(z - u)$ betrachten. Dann gilt $(z - u)^2 = a^2 - b^2 + i2ab$, und wir lesen aus der letzten Gleichung

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= 8 = \operatorname{Re}(8 + 6i), \\ 2ab &= 6 = \operatorname{Im}(8 + 6i) \quad \iff \quad b = \frac{3}{a}. \end{aligned}$$

(da $3 \neq 0$ gilt auch $a \neq 0 \neq b$ und wir dürfen durch a teilen.) Nun setzen wir die zweite Identität in die erste ein und erhalten

$$a^2 - \frac{9}{a^2} - 8 = 0 \quad \iff \quad 0 = (a^2)^2 - 8a^2 - 9 = (a^2)^2 - 2 \cdot 4a^2 + 16 - 16 - 9 = (a^2 - 4)^2 - 25.$$

Die quadratische Gleichung $(a^2 - 4)^2 = 25$ hat die Lösungen $a^2 = 4 + 5$ und $a^2 = 4 - 5$. Da a^2 eine nicht negative reelle Zahl ist, ist nur die Lösung $a^2 = 9$ sinnvoll.

Somit ist $a = \sqrt{9} = 3$ und $b = \frac{3}{3} = 1$ oder $a = -3$ und $b = -1$. Setzen wir diese Information in $z - u = a + ib$ ein, bekommen wir die Lösungen

$$z = -3 - 2i + 3 + i = -i \quad \text{oder} \quad z = -6 - 3i.$$

c) Wir suchen ein $z = x + yi$ mit

$$\frac{3 + i}{4 - i} = \frac{1 - i + iz}{2 + 2z - 3i}.$$

Die linke Seite der Gleichung vereinfacht sich folgendermaßen

$$\frac{3 + i}{4 - i} = \frac{(3 + i)(4 + i)}{17} = \frac{12 + 3i + 4i - 1}{17} = \frac{11 + 7i}{17}.$$

Setze $z = x + iy$, dann erhalten wir im Zähler $(1 - y) + i(x - 1)$, und im Nenner $(2 + 2x) + i(2y - 3)$. Gleichsetzen liefert

$$\frac{11 + 7i}{17} = \frac{(1 - y) + i(x - 1)}{(2 + 2x) + i(2y - 3)}.$$

Multipliziere beide Seiten mit dem Nenner

$$(11 + 7i)[(2 + 2x) + i(2y - 3)] = 17[(1 - y) + i(x - 1)].$$

Ausmultiplizieren liefert

$$(43 + 22x - 14y) + i(14x + 22y - 19) = (17 - 17y) + i(17x - 17).$$

Gleichsetzen von Real- und Imaginärteil

$$\begin{aligned} 22x + 3y &= -26, \\ -3x + 22y &= 2. \end{aligned}$$

Lösen wir nun das LGS. Aus zweiter Gleichung folgt $x = \frac{22y-2}{3}$. Einsetzen in die erste Gleichung

$$22 \cdot \frac{22y-2}{3} + 3y = -26 \Rightarrow 484y - 44 + 9y = -78 \Rightarrow 493y = -34 \Rightarrow y = -\frac{2}{29}.$$

Dann

$$x = \frac{22 \cdot (-2/29) - 2}{3} = \frac{-44/29 - 58/29}{3} = \frac{-102/29}{3} = -\frac{34}{29}.$$

Also $z = -\frac{34}{29} - \frac{2}{29}i$.

d) Gegeben sei die quadratische Gleichung

$$z^2 + 2az + \omega = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Für $a^2 \geq \omega$ sind die Lösungen gegeben durch (Wir erinnern uns z.B. an die Mitternachtsformel.)

$$z_{1/2} = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4\omega}}{2} \in \mathbb{R}.$$

Weiter gilt $z^2 + 2az + \omega = (z - z_1)(z - z_2)$, d.h. aufgrund der Faktorisierung ist klar, dass dies bereits alle Lösungen sind.

Ist $a^2 < \omega$, so gilt

$$z^2 + 2az + \omega = (z + a + i\sqrt{\omega - a^2})(z + a - i\sqrt{\omega - a^2}).$$

(Man überzeuge sich von der Richtigkeit, indem man die rechte Seite ausmultipliziert. Insbesondere sind die Wurzelterme im Sinne der Vorlesung wohldefiniert, da der Radikant positiv ist.) Der Ausdruck ist genau dann 0, dann wenn einer der Faktoren verschwindet. Die beiden Lösungen sind somit

$$z_1 = -a + i\sqrt{\omega - a^2}, \quad z_2 = -a - i\sqrt{\omega - a^2}.$$

Diese sind zueinander konjugiert komplex, da sie sich nur im Vorzeichen des Imaginärteils unterscheiden. Wir zeigen, dass beide Lösungen denselben Betrag haben, also auf einem Kreis um den Ursprung liegen.

$$|z_1|^2 = z_1 \bar{z}_1 = a^2 + (\sqrt{\omega - a^2})^2 = \omega \implies |z_1| = |z_2| = \sqrt{\omega}.$$

Man beachte, dass $\omega > a^2 \geq 0$ gilt. Somit liegen beide Lösungen auf dem Kreis $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \sqrt{\omega}\}$.

Aufgabe 2 (K):

(a) Berechnen Sie $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, \bar{z} , sowie $\operatorname{Re}(z^{-1})$ und $\operatorname{Im}(z^{-1})$ für die folgenden komplexen Zahlen

$$(1) \quad z = \frac{\bar{i} \cdot (3 + 4i)}{1 + 2i}, \quad (2) \quad z = i^{36} + 61^{-1}(11 + i) \frac{25 + 31i}{2 + 3i}.$$

(b) Bestimmen Sie die Menge alle $x \in [-1, \infty)$, für die die Ungleichung $x + \sqrt{x+1} \leq 5$ erfüllt ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(a) (1) Da $\bar{i} = -i$, gilt

$$\bar{i} \cdot (3 + 4i) = (-i)(3 + 4i) = -3i - 4i^2 = -3i + 4 = 4 - 3i.$$

Erweitern mit dem Konjugierten des Nenners, also $1 - 2i$, liefert

$$z = \frac{(4 - 3i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)}$$

Der Nenner vereinfacht sich damit zu

$$(1 + 2i)(1 - 2i) = 1^2 - (2i)^2 = 1 - 4(-1) = 1 + 4 = 5$$

und im Zähler erhalten wir

$$\begin{aligned}(4 - 3i)(1 - 2i) &= 4 \cdot 1 + 4 \cdot (-2i) + (-3i) \cdot 1 + (-3i) \cdot (-2i) \\ &= 4 - 8i - 3i + 6i^2 = 4 - 11i + 6(-1) = 4 - 11i - 6 = -2 - 11i.\end{aligned}$$

Folglich

$$z = \frac{-2 - 11i}{5} = -\frac{2}{5} - \frac{11}{5}i$$

mit $\operatorname{Re} z = -\frac{2}{5}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{11}{5}$, $\bar{z} = -\frac{2}{5} + \frac{11}{5}i$.

Weiter ist $z^{-1} = \frac{5}{-2-11i}$. Erweitern mit $-2 + 11i$ liefert

$$\begin{aligned}z^{-1} &= \frac{5(-2 + 11i)}{(-2 - 11i)(-2 + 11i)} = \frac{-10 + 55i}{4 + 121} = \frac{-10 + 55i}{125} \\ &= -\frac{10}{125} + \frac{55}{125}i = -\frac{2}{25} + \frac{11}{25}i,\end{aligned}$$

also $\operatorname{Re}(z^{-1}) = -\frac{2}{25}$, $\operatorname{Im}(z^{-1}) = \frac{11}{25}$.

(2) Es gilt

$$\begin{aligned}i^{36} + 61^{-1}(11 + i)\frac{25 + 31i}{2 + 3i} &= (-1)^{18} + \frac{11 \cdot 25 - 31 + i(31 \cdot 11 + 25)}{61(2 + 3i)} \\ &= 1 + \frac{244 + 366i}{61(2 + 3i)} = 1 + \frac{122}{61} \cdot \frac{2 + 3i}{2 + 3i} = 1 + 2 = 3\end{aligned}$$

Also $\operatorname{Re} z = z = 3$, $\operatorname{Im} z = 0$ sowie $\bar{z} = z = 3$. Offenbar ist $z^{-1} = 1/3$, also $\operatorname{Re}(z^{-1}) = 1/3$ und $\operatorname{Im}(z^{-1}) = 0$.

(b) Falls $x+1 < 0$ oder äquivalent $x < -1$, ist $\sqrt{x+1}$ nicht definiert. Wir müssen uns also auf $x \in [-1, \infty)$ einschränken. Falls $x > 5$, dann ist $5 - x < 0$ also sicher *nicht* $0 \geq \sqrt{x+1} \leq 5 - x$.

Sei also $x \in [-1, 5]$. Dann gelten $x + 1 \geq 0$ und $5 - x \geq 0$ und damit auch

$$x + 1 = |x + 1| = \sqrt{x + 1}^2 \leq (x - 5)^2 = 25 - 10x + x^2$$

Das ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}0 \leq x^2 - 11x + 24 &= x^2 - 2\frac{11}{2}x + \frac{121}{4} - \frac{121}{4} + \frac{96}{4} \\ &= \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{25}{4} &\leq \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 \stackrel{x-11/2 < 0}{\Leftrightarrow} \frac{11}{2} - x \geq \frac{5}{2},\end{aligned}$$

was $x \leq \frac{11}{2} - \frac{5}{2} = 3$ bedeutet. Insgesamt ist die Ungleichung also für $x \in [-1, 3]$ erfüllt.

Beachte, die "quadrierte Ungleichung" $x + 1 \leq (x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$ ist für alle $x \in (-\infty, 3] \cup [8, \infty)$ erfüllt.

Aufgabe 3 (K):

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} + 2iz - 2i\bar{z} = 0\},$$

$$R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| \geq 1 \text{ und } |z - 1 + i| < 3\},$$

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 + i| = |z - 2 - i|\},$$

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 1| \leq |z - i|\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z(1 + i)) \leq 0\}.$$

Bemerkung: Die zweite Gleichung bei H braucht nicht bewiesen zu werden.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

Skizzen der Mengen finden Sie in der Abbildung unten.

Zu K : Sei $z \in \mathbb{C}$. Da $z\bar{z} = |z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$ und $2iz - 2i\bar{z} = 2i(z - \bar{z}) = 2 \cdot 2i^2 \operatorname{Im} z = -2 \cdot 2 \operatorname{Im} z$, erhalten wir mit quadratischer Ergänzung

$$\begin{aligned} z\bar{z} + 2iz - 2i\bar{z} &= (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 - 2 \cdot 2 \operatorname{Im} z = 0 \\ \iff (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z - 2)^2 - 4 &= |z - 2i|^2 - 4 = 0 \\ \iff |z - 2i| &= 2. \end{aligned}$$

Das bedeutet

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} + 2iz - 2i\bar{z} = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2i| = 2\},$$

das ist ein Kreis um $m = 2i$ mit Radius $r = 2$.

Zu R : Wir haben

$$\begin{aligned} R &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| \geq 1 \text{ und } |z - 1 + i| < 3\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 + i| < 3\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| \geq 1\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 + i| < 3\} \cap \mathbb{C} \setminus B(i, 1), \end{aligned}$$

also die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt $m_1 = 1 - i$ und Radius 3 geschnitten mit dem Komplement der offenen Kreisscheibe um $m_2 = i$ mit Radius 1.

Zu G : Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gelten

$$\begin{aligned} |z - 1 + i|^2 &= (\operatorname{Re} z - 1)^2 + (\operatorname{Im} z - (-1))^2 \\ &= (\operatorname{Re} z)^2 - 2 \operatorname{Re} z + 1 + (\operatorname{Im} z)^2 + 2 \operatorname{Im} z + 1, \\ |z - 2 - i|^2 &= (\operatorname{Re} z - 2)^2 + (\operatorname{Im} z - 1)^2 \\ &= (\operatorname{Re} z)^2 - 4 \operatorname{Re} z + 4 + (\operatorname{Im} z)^2 - 2 \operatorname{Im} z + 1. \end{aligned}$$

Somit ist $|z - 1 + i| = |z - 2 - i|$ äquivalent zu der linearen Gleichung $2 \operatorname{Re} z + 4 \operatorname{Im} z = 3$, bzw. $\operatorname{Im} z = 3/4 - \operatorname{Re} z/2$. Die Menge G ist also eine Gerade in der komplexen Zahlenebene.

Zu H : Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (\operatorname{Re} z + 1)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 &= |z + 1|^2 \leq |z - i|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z - 1)^2 \\ \iff (\operatorname{Re} z)^2 + 2 \operatorname{Re} z + 1 + (\operatorname{Im} z)^2 &\leq (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 - 2 \operatorname{Im} z + 1 \\ \iff \operatorname{Re} z &\leq -\operatorname{Im} z \end{aligned}$$

Das sind alle Punkte unterhalb der Gerade $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Re} z$; eine sogenannte Halbebene.

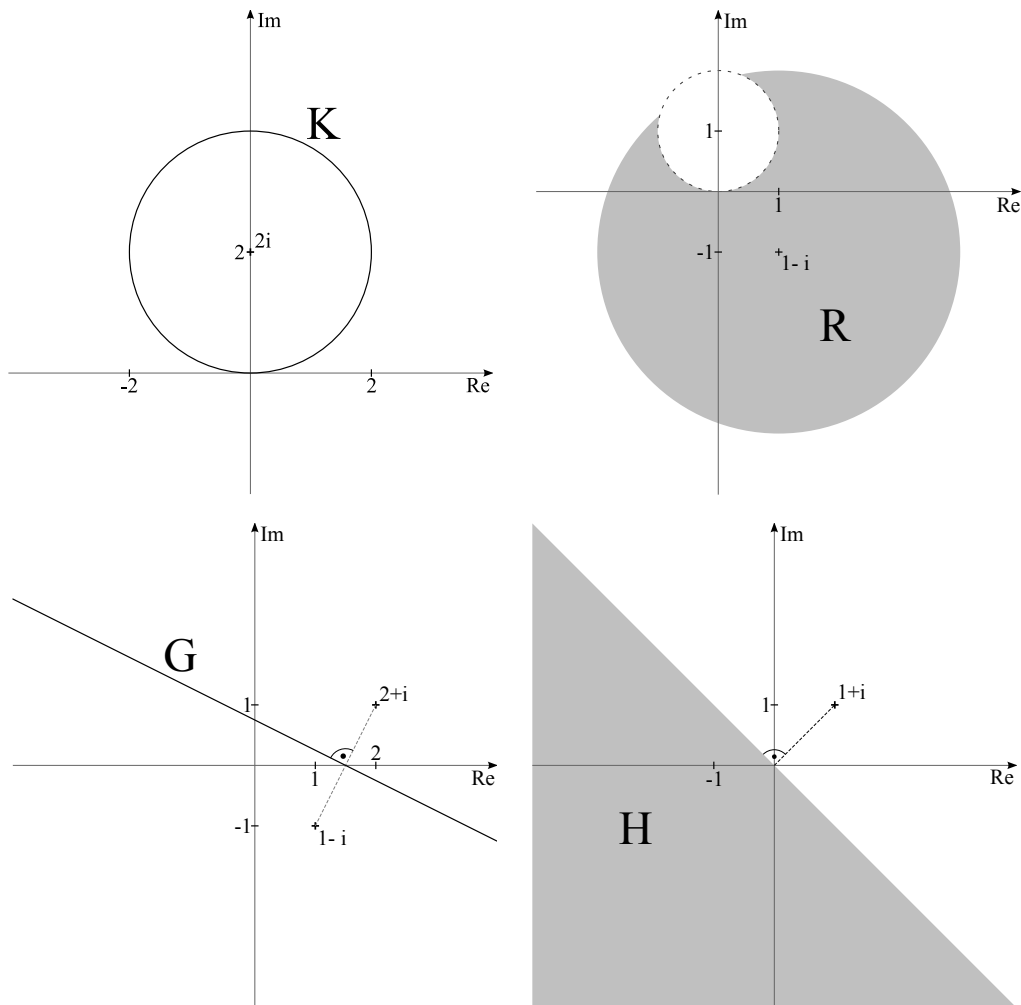


Abbildung 1: Skizzen der Aufgabe 3.

Aufgabe 4:

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene

$$M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |1 - z| \geq |1 + z|\},$$

$$M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| = |i + z| = \sqrt{2}\}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

Zu M_1 : Setze $z = x + iy$. Dann gilt:

$$|1 - z|^2 \geq |1 + z|^2 \Rightarrow (1 - x)^2 + y^2 \geq (1 + x)^2 + y^2 \Rightarrow 1 - 2x + x^2 \geq 1 + 2x + x^2 \Rightarrow -4x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0.$$

Somit ist M_1 die **linke Halbebene** einschließlich der imaginären Achse.

Zu M_2 : Die Bedingung $|z - i| = |z + i| = \sqrt{2}$ beschreibt den Schnitt zweier Kreise:

- Kreis um $i = (0, 1)$ mit Radius $\sqrt{2}$,
- Kreis um $-i = (0, -1)$ mit Radius $\sqrt{2}$.

Die Schnittpunkte ergeben sich durch Lösen von

$$x^2 + (y - 1)^2 = 2 \quad \text{und} \quad x^2 + (y + 1)^2 = 2.$$

Subtraktion liefert $y = 0$, dann $x^2 + 1 = 2 \Rightarrow x = \pm 1$. Also ist $M_2 = \{-1, 1\}$ — zwei Punkte auf der reellen Achse.

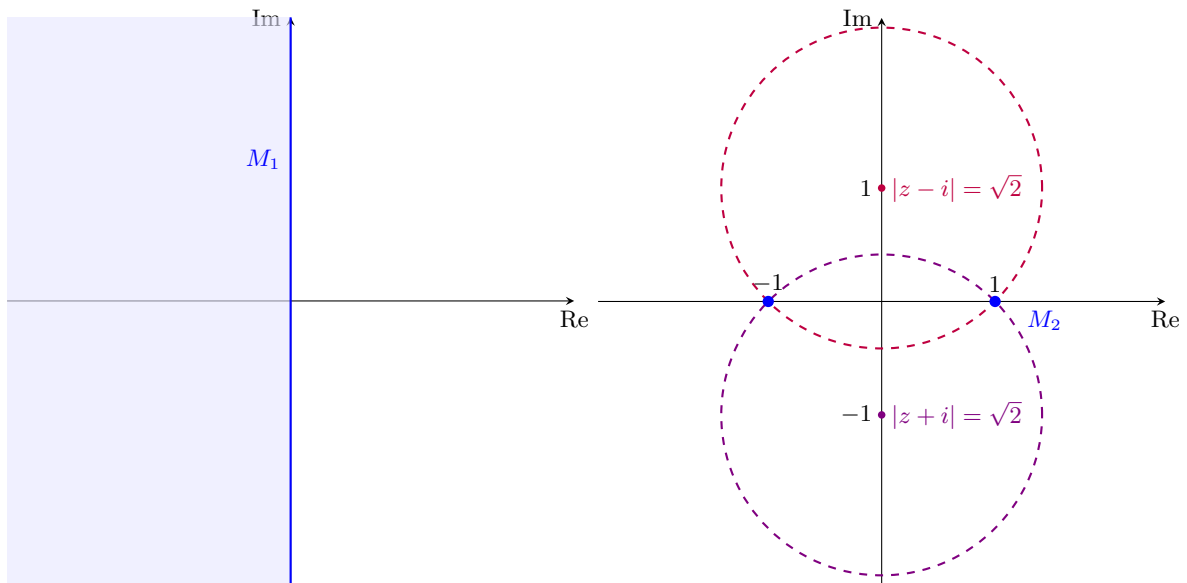


Abbildung 2: Skizzen der Aufgabe 4.¹

¹ *Gwen3* wurde bei der Erstellung des TikZ-Codes der Skizzen verwendet.