

## Lösungsvorschlag zum 5. Übungsblatt

### Analysis I

Winter Semester 2025/2026

#### Aufgabe 1:

Untersuchen Sie die Folgen mit den Gliedern

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad a_n &= \left(1 + \left(\frac{1-i}{2}\right)^n\right) \cdot \left(2 - \frac{3n^2 + 2i}{(2n+1)^2}\right), & \text{(b)} \quad b_n &= \frac{n^4 - 2i}{n^2 + 4} + \frac{n^3(3-n^2)}{n^3 + 1}, \\
 \text{(c)} \quad c_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, & \text{(d)} \quad d_n &= \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \\
 \text{(e)} \quad e_n &= \frac{(-1)^n}{n^2} \binom{n}{n-2} \quad \text{für } n \geq 2,
 \end{aligned}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert für  $n \rightarrow \infty$ .

#### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(a) Wir betrachten zunächst die Teile der Folgenglieder, über die wir etwas aussagen können, getrennt. Da

$$\left| \frac{1-i}{2} \right| = \frac{|1-i|}{|2|} = \frac{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$$

gilt, folgern wir nach Aufgabe 5 (a)

$$\left(\frac{1-i}{2}\right)^n \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty).$$

Weiter gilt

$$\frac{3n^2 + 2i}{(2n+1)^2} = \frac{3n^2 + 2i}{4n^2 + 4n + 1} = \frac{n^2(3 + 2n^{-2}i)}{n^2(4 + 4n^{-1} + 2n^{-2}i)} = \frac{3 + 2n^{-2}i}{4 + 4n^{-1} + n^{-2}} \stackrel{2.7}{\rightarrow} \frac{3+0}{4+0+0} = \frac{3}{4}, \quad (n \rightarrow \infty).$$

Mit Satz 2.7 a) und b) können wir jetzt den Grenzwert der Folge  $(b_n)_n$  bestimmen. Es gilt  $a_n \rightarrow (1+0) \cdot (2 - \frac{3}{4}) = \frac{5}{4}$ ,  $(n \rightarrow \infty)$ .

(b) Die Summanden in der Definition der Glieder von  $(b_n)_n$  bilden keine konvergente Folge. Deshalb können wir Satz 2.7 a) nicht anwenden. Wir schreiben die Glieder mit den Hauptnenner als Bruch:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{n^4 - 2i}{n^2 + 4} + \frac{n^3(3-n^2)}{n^3 + 1} = \frac{(n^4 - 2i)(n^3 + 1) + n^3(3-n^2)(n^2 + 4)}{(n^3 + 1)(n^2 + 4)} \\
 &= \frac{n^7 + n^4 - 2n^3i - 2i + 3n^5 + 12n^3 - n^7 - 4n^5}{n^5 + n^2 + 4n^3 + 4} \\
 &= \frac{-n^5 + n^4 + (12 - 2i)n^3 - 2i}{n^5 + 4n^4 + n^2 + 4} = \frac{-1 + \frac{1}{n} + \frac{12-2i}{n^2} - \frac{2i}{n^5}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^3} + \frac{4}{n^5}} \rightarrow \frac{-1+0}{1+0} = -1, \quad (n \rightarrow \infty).
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir die höchste Potenz von  $n$  des Nenners in Zähler und Nenner ausgeklammert. Dann haben wir Beispiel 2.3 a) sowie Satz 2.7 a) und c) verwendet.

(c) Es gilt

$$c_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Weiter  $0 \leq \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq n^{-1/2}$ . Nach Beispiel 2.3 und Satz 2.10 gilt folglich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$$

Also konvergiert die Folge  $(c_n)_n$  gegen 0.

(d) Es gilt

$$d_n = \sqrt{n} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}.$$

Nach Aufgabe 5 c) gilt  $\sqrt{1 + n^{-1}} \rightarrow \sqrt{1} = 1$  für  $n \rightarrow \infty$ , sodass nach Satz 2.7 a) und c)

$$d_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \rightarrow \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad (n \rightarrow \infty).$$

(e) Diese Folge konvergiert nicht. Als erstes formen wir die Folgenglieder um. Es gilt

$$e_n = \frac{(-1)^n}{n^2} \binom{n}{n-2} = (-1)^n \frac{n!}{n^2(n-2)!} = (-1)^n \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{(-1)^n}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad (1)$$

An dem Ausdruck auf der rechten Seite von (1) kann man erkennen, warum  $(d_n)$  nicht konvergent sein kann; grob gesprochen könnte man sagen: „Da  $\frac{1}{2}((1 - \frac{1}{n})) \rightarrow \frac{1}{2}$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $(-1)^n$  für gerade bzw. ungerade  $n$  zwischen den Werten  $-1$  und  $+1$  springt, „häufen“ sich die Folgenglieder mit geradem Index um  $+\frac{1}{2}$  und die mit ungeradem Index um  $-\frac{1}{2}$ ; da sich konvergente Folgen nur um einen Wert „häufen“ können, nämlich um ihren Grenzwert, kann nicht  $(d_n)$  konvergent sein.“

Nach dem derzeitigen Stand der Vorlesung ist dies allerdings noch *kein* zulässiger Beweis, da mathematisch nicht präzise definierte Begriffe verwendet werden! (Was heißt „sich häufen“ genau?)

Wir wollen deshalb einen Widerspruchsbeweis führen. Dazu fällt uns auf, dass die Folge  $(e_n)$  (hinsichtlich des hin und her springenden Charakters) der Folge  $((-1)^n)$  ähnelt, von der wir nach Beispiel 2.3 c) *wissen*, dass sie nicht konvergiert. Um einen Widerspruch zu erzeugen, wollen wir daher aus der Konvergenz von  $(e_n)$  die Konvergenz von  $((-1)^n)$  folgern:

Angenommen, die Folge wäre konvergent gegen ein  $e \in \mathbb{C}$ . Aus (1) sehen wir aber

$$(-1)^n = 2e_n + \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach Satz 2.7 müsste dann also  $(-1)^n \rightarrow 2d + 0 = 2d$  für  $n \rightarrow \infty$  gelten, im Widerspruch dazu, dass  $((-1)^n)$  nach Beispiel 2.3 c) divergent ist. Also muss unsere Annahme falsch gewesen sein und  $(e_n)$  ist divergent.

## Aufgabe 2 (K):

Untersuchen Sie die Folgen mit den Gliedern

$$(a) \quad a_n = \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}i}{\sqrt{n+1} + \sqrt{ni}},$$

$$(c) \quad c_n = \sqrt{n^2 + \alpha n + \beta} - n,$$

$$(b) \quad b_n = \left(\frac{1}{n} - n\right)^n,$$

$$(d) \quad d_n = \sqrt[n]{\frac{n^{m^2}}{m^{n^2}}},$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert für  $n \rightarrow \infty$ .

In (c) seien hierbei  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha, \beta \geq 0$  und in (d) sei  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m \geq 2$ .

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:**

(a) Wir klammern im Zähler und im Nenner den Term  $\sqrt{n}$  aus.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\sqrt{n} + i\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} + i\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n} \cdot \left(1 + i\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n} \cdot \left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} + i\right)} \\ &= \frac{1 + i\sqrt{\frac{n+1}{n}}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}} + i} \\ &= \left(1 + i\sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + i} \end{aligned}$$

Mit Aufgabe 5b)  $(1 + i\sqrt{1 + \frac{1}{n}}) \rightarrow 1 + i$  für  $n \rightarrow \infty$ . Nach Satz 2.7 gilt somit  $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + i} \rightarrow \frac{1}{1+i}$  für  $n \rightarrow \infty$ . Folglich konvergiert wieder mit Satz 2.7 das Produkt beider Terme  $a_n \rightarrow (1 + i) \frac{1}{1+i} = 1$ .

(b) Die Folge konvergiert nicht, denn sie ist unbeschränkt. Um das zu sehen, schätzen wir den Betrag der Glieder nach unten durch eine unbeschränkte Folge ab. Für  $n \geq 3$  (d.h.  $n - 1 \geq 2$ ) gilt

$$|b_n| = \left| \left(\frac{1}{n} - n\right)^n \right| = \left| \frac{1}{n} - n \right|^n = \left(n - \frac{1}{n}\right)^n \geq (n-1)^n \geq 2^n,$$

denn es ist  $\frac{1}{n} \leq 1$ . Nach Aufgabe 5 (a) ist die Folge mit den Glieder  $2^n$  unbeschränkt. Somit ist auch die Folge  $(b_n)_n$  unbeschränkt und kann somit nicht konvergent sein.

(c) Hier konvergieren die Summanden nicht, wir können Satz 2.7 a) also nicht anwenden. Weil  $n^2 + \alpha n + \beta > 0$ , können wir stattdessen schreiben

$$\begin{aligned} c_n &= (\sqrt{n^2 + \alpha n + \beta} - n) \frac{\sqrt{n^2 + \alpha n + \beta} + n}{\sqrt{n^2 + \alpha n + \beta} + n} \\ &= \frac{n^2 + \alpha n + \beta - n^2}{\sqrt{n^2 + \alpha n + \beta} + n} = \frac{n \left(\alpha + \frac{\beta}{n}\right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2}} + 1\right)} \\ &= \frac{\alpha + \frac{\beta}{n}}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2}} + 1} \xrightarrow{2.7, A5 c)} \frac{\alpha}{1+1} = \frac{\alpha}{2}, \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Dabei haben wir in der letzten Zeile Aufgabe 5 (c) verwendet.

(d) Sei  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m \geq 2$  beliebig, aber fest. Nach den Potenzgesetzen ist

$$\sqrt[m]{\frac{n^{m^2}}{m^{n^2}}} = \frac{n^{\frac{m^2}{m}}}{m^{\frac{n^2}{m}}} = (\sqrt[m]{n})^{m^2} \left(\frac{1}{m}\right)^n$$

Aus Aufgabe 5 b) und  $(m^2 - 1)$ -maliger Anwendung von Satz 2.7 b) folgt  $\sqrt[m]{n}^{m^2} \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ . Da nach Voraussetzung  $m \geq 2$  ist, folgt  $|1/m| = 1/m \leq 1/2 < 1$ , und damit aus Aufgabe 5 a), dass  $(1/m)^n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Nach Satz 2.7 b) ist deshalb

$$d_n = (\sqrt[m]{n})^{m^2} \left(\frac{1}{m}\right)^n \rightarrow 1 \cdot 0 = 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

**Aufgabe 3 (K):**

Seien  $(a_n)_n, (b_n)_n$  Folgen. Zeigen Sie:

(a) Ist  $(a_n)_n$  eine Nullfolge und  $(b_n)_n$  eine beschränkte Folge, dann konvergiert die Folge mit den Gliedern  $a_n b_n$ . Gilt das auch, wenn  $(a_n)_n$  gegen einen anderen Wert als 0 konvergiert?

(b) Gelten  $a_n \geq 0$ ,  $b_n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $a_n b_n^{-1} \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ , dann gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  so, dass  $\frac{1}{2}b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2}b_n$  für alle  $n \geq N$ .

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(a) **Behauptung:** Seien  $(a_n)$  eine Nullfolge und  $(b_n)$  eine beschränkte Folge. Dann ist auch  $(a_n b_n)$  eine Nullfolge.

**Beweis:** Seien  $(a_n)$  eine Nullfolge und  $(b_n)$  eine beschränkte Folge. Wir müssen zeigen, dass  $(a_n b_n)$  eine Nullfolge ist, d.h., zu gegebenem Abstand  $\varepsilon > 0$  müssen wir einen Index  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  finden, sodass

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon. \quad (2)$$

Dies wollen wir nun zeigen. Sei also  $\varepsilon > 0$ . Da nach Voraussetzung  $(b_n)$  beschränkt ist, existiert ein  $r > 0$ , sodass

$$|b_n| \leq r \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Nun können wir die Konvergenz von  $(a_n)$  gegen Null ausnutzen: Nach Definition der Konvergenz finden wir dann zu  $\varepsilon_0 := \frac{\varepsilon}{r} > 0$  ein  $N_{\varepsilon_0} \in \mathbb{N}$  mit

$$|a_n| = |a_n - 0| \leq \varepsilon_0 \quad \text{für alle } n \geq N_{\varepsilon_0}. \quad (4)$$

Wir setzen nun  $N_\varepsilon := N_{\varepsilon_0}$ . Dann erhalten wir für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq N_\varepsilon$

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n| |b_n| \stackrel{(3)}{\leq} r |a_n| \stackrel{(4)}{\leq} r \varepsilon_0 = r \frac{\varepsilon}{r} = \varepsilon,$$

was genau (2) ist. Also ist  $(a_n b_n)$  eine Nullfolge.

Die Behauptung gilt *nicht*, falls  $(a_n)$  gegen einen anderen Wert als 0 konvergiert. Dazu setzen wir  $a_n := 1$  und  $b_n := (-1)^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist nach Beispiel 2.3 a)  $(a_n)$  als konstante Folge konvergent (mit Grenzwert 1) und  $(b_n)$  wegen  $|b_n| = |(-1)^n| = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  durch 1 beschränkt, aber  $(a_n b_n) = (b_n)$  nach Satz 2.3 c) nicht konvergent. Aufgabe 4 (d) liefert ein weiteres Gegenbeispiel.

(b) **Behauptung:** Seien  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  Folgen mit  $a_n \geq 0$ ,  $b_n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $a_n b_n^{-1} \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  so, dass  $\frac{1}{2}b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2}b_n$  für alle  $n \geq N$ .

**Beweis:** Seien  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  Folgen mit  $a_n \geq 0$ ,  $b_n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $a_n b_n^{-1} \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ . Setzen wir  $\varepsilon := \frac{1}{2}$  in der Definition von Konvergenz, sehen wir, dass es ein  $N := N_{\frac{1}{2}} \in \mathbb{N}$  gibt mit

$$|a_n b_n^{-1} - 1| \leq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Obige Ungleichung ist äquivalent zu  $\frac{1}{2} \leq a_n b_n^{-1} \leq \frac{3}{2}$ . In der Tat, nach Aufgabe 4 b) des zweiten Übungsblattes gilt

$$\begin{aligned} |a_n b_n^{-1} - 1| \leq \frac{1}{2} &\stackrel{\text{Ü2 4b)}}{\iff} a_n b_n^{-1} - 1 \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad -(a_n b_n^{-1} - 1) \leq \frac{1}{2} \\ &\iff a_n b_n^{-1} \leq \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \leq a_n b_n^{-1} \\ &\iff \frac{1}{2} < a_n b_n^{-1} \leq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Da  $b_n > 0$  gilt, erhalten wir nach Multiplikation mit  $b_n$  wie gewünscht

$$\frac{1}{2}b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2}b_n \quad \text{für alle } n \geq N.$$

**Aufgabe 4:**

Sei  $(a_n)_n$  eine Folge. Dann definieren wir die Folge der *Cesàro-Mittel*  $(c_n)_n$  durch

$$c_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Das Folgenglied  $c_n$  ist also das arithmetische Mittel von  $a_1, \dots, a_n$ .

(a) Zeigen Sie: Konvergiert  $(a_n)_n$  gegen ein  $a \in \mathbb{C}$ , dann konvergiert auch  $(c_n)_n$  gegen  $a$ .

*Hinweis:* Sei  $\varepsilon > 0$ . Man wähle zunächst ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $n \geq N_0$ . Nun teile man obige Summe in  $c_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_0-1} a_k + \frac{1}{n} \sum_{k=N_0}^n a_k$  und beschränke diese ‘für große  $n$ ’ durch  $\varepsilon$ .

(b) Geben Sie eine divergente Folge  $(a_n)_n$  an, deren Folge von Cesàro-Mitteln konvergiert. Beweisen Sie die Konvergenz.

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:**

(a) Bevor wir uns dem „rigorosen“ Beweis zuwenden (d.h. einer streng logischen Argumentation auf Grundlage der bereits bekannten Definitionen und Sätzen aus der Vorlesung), beginnen wir mit einem *heuristischen* (d.h. etwas „grobem“) Blick auf das Problem, der uns anschaulich zu erklären versucht, warum die Aussage wahr sein sollte, und uns so die Idee für einen rigorosen Beweis liefern kann. Sei  $\varepsilon > 0$  eine noch so kleine positive Zahl. Wir wollen nun begründen, warum  $|c_n - a| \approx \varepsilon$  für genügend großes  $n$  sein sollte. Konvergiert  $(a_n)$  gegen  $a$ , so gibt es einen Index  $N = N_\varepsilon$ , ab dem der Abstand  $|a_n - a|$  die vorgegebene Schranke  $\varepsilon$  unterschreitet, d.h., es gilt dann  $|a_n - a| \leq \varepsilon$  für alle  $n \geq N$ . Wenn nun  $N = 1$  wäre, so wäre auch für alle  $n \geq N = 1$  wie gewünscht (der Übersichtlichkeit halber lassen wir im Folgenden die Beträge weg)

$$c_n - a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - \frac{na}{n} = \frac{(a_1 - a) + \dots + (a_n - a)}{n} \approx \frac{\varepsilon + \dots + \varepsilon}{n} = \frac{n\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

Im Allgemeinen wird aber  $N$  sehr groß sein, vor allem dann, wenn  $\varepsilon > 0$  sehr klein ist. Ähnlich wie oben können wir aber trotzdem für  $n \geq N$  schreiben

$$\begin{aligned} c_n - a &= \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - \frac{na}{n} = \frac{(a_1 - a) + \dots + (a_{N-1} - a) + (a_N - a) + \dots + (a_n - a)}{n} \\ &= \frac{(a_1 - a) + \dots + (a_{N-1} - a)}{n} + \frac{(a_N - a) + \dots + (a_n - a)}{n} \\ &\approx \frac{(a_1 - a) + \dots + (a_{N-1} - a)}{n} + \frac{\varepsilon + \dots + \varepsilon}{n} \\ &= \frac{(a_1 - a) + \dots + (a_{N-1} - a)}{n} + \frac{n - (N - 1)}{n} \varepsilon \\ &\leq \frac{(a_1 - a) + \dots + (a_{N-1} - a)}{n} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Nun bemerken wir, dass der erste Term auf der rechten Seite für genügend großes  $n \gg N$  nicht wirklich ins Gewicht fällt, da dieser eine Nullfolge bildet (denn  $(a_1 - a) + \dots + (a_{N-1} - a)$  ist eine *endliche* Summe, also einfach nur eine Zahl, und  $(\frac{1}{n})$  ist eine Nullfolge). Somit gilt für genügend großes  $n \gg N$

$$c_n - a \approx \frac{(a_1 - a) + \dots + (a_{N-1} - a)}{n} + \varepsilon \approx \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

was die Konvergenz von  $(c_n)$  gegen  $a$  nahelegt (der Faktor 2 vor  $\varepsilon$  ist irrelevant, vgl. Bemerkung 2.6 a)).

An dieser Stelle sei nochmal betont: Die obigen heuristischen Überlegungen ersetzen **keinen** Beweis, sondern liefern nur die Idee für letzteren. Einen Beweis wollen wir jetzt angeben:

**Behauptung:** Sei  $(a_n)$  eine gegen  $a \in \mathbb{C}$  konvergente Folge und  $(c_n)$  so wie in der Aufgabenstellung. Dann ist auch  $(c_n)$  konvergent und es gilt  $c_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$ .

**Beweis:** Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir müssen zeigen, dass ein Index  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  existiert, sodass

$$|c_n - a| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon. \quad (5)$$

Dies zeigen wir im Folgenden. Weil  $(a_n)$  nach Voraussetzung gegen  $a$  konvergiert, gibt es zu  $\frac{\varepsilon}{2} > 0$  ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq N_0. \quad (6)$$

Setze

$$M := \sum_{j=1}^{N_0-1} |a_j - a| = |a_1 - a| + \cdots + |a_{N_0-1} - a| \geq 0.$$

und wähle nun  $N_1 \in \mathbb{N}$  so, dass

$$\frac{M}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq N_1 \quad (7)$$

(dies ist möglich, da  $(\frac{M}{n})$  eine Nullfolge ist). Wir setzen schließlich  $N_\varepsilon := \max\{N_0, N_1\} \in \mathbb{N}$ . Somit erhalten wir durch Anwendung der Dreiecksungleichung (Satz 1.31 g)) für alle  $n \geq N_\varepsilon$

$$\begin{aligned} |c_n - a| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (a_k - a) \right| \stackrel{1.31 \text{ g)}}{\leq} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k - a| \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N_0-1} |a_k - a| + \frac{1}{n} \sum_{k=N_0}^n |a_k - a| \\ &\stackrel{(6)}{\leq} \frac{M}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{2} = \frac{M}{n} + \frac{n}{n} \frac{\varepsilon}{2} \\ &\stackrel{(7)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

was genau (5) ist. Da  $\varepsilon > 0$  beliebig gewählt war, konvergiert also die Folge  $(c_n)$  nach Definition 2.2 gegen  $a$ .

(b) Nach Beispiel 2.3 c) divergiert die Folge mit den Gliedern  $a_n = (-1)^n$ . Mit vollständiger Induktion sieht man unmittelbar ein, dass

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ -1, & n \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{also insb.} \quad \left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| \leq 1.$$

Hieraus folgt

$$|c_n| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| \leq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

sodass  $(c_n)$  nach Satz 2.10 b) gegen 0 konvergiert.

### Aufgabe 5 (Übung):

*Diese Aufgabe wird in der Übung vorgerechnet. Die Resultate werden für einige der Aufgaben benötigt.*

(a) Sei  $z \in \mathbb{C}$ . Wir betrachten die Folge mit den Gliedern  $a_n = z^n$ . Zeigen Sie:

Gilt  $|z| < 1$ , so konvergiert die Folge gegen 0.

Gilt  $|z| = 1$ , so ist die Folge beschränkt. Über Konvergenz lässt sich keine Aussage treffen.

Gilt  $|z| > 1$ , so ist die Folge unbeschränkt.

(b) Sei  $(a_n)_n$  eine konvergente Folge mit  $a_n \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $a \geq 0$  ihr Grenzwert. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge mit den Gliedern  $\sqrt{a_n}$  konvergiert.

(c) Zeigen Sie, dass die Folge mit den Gliedern  $a_n = \sqrt[n]{n}$  gegen 1 konvergiert.

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

(a) Wir unterscheiden drei Fälle.

**1. Fall:**  $|z| < 1$

Der Fall  $z = 0$  ist trivial. Sei  $0 < |z| < 1$ , so gilt  $\frac{1}{|z|} = 1 + \delta$  für ein  $\delta > 0$ . Dann folgt aus dem binomischen Lehrsatz, dass

$$\left(\frac{1}{|z|}\right)^n \geq 1 + n\delta > n\delta$$

Daraus folgt

$$|z|^n \leq \frac{1}{n\delta} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$$

Die Folge ist also konvergent gegen 0 und nach Satz 2.4 beschränkt.

**2. Fall:**  $|z| > 1$

Sei  $M > 0$ . Es gilt  $|z| = 1 + \delta$ . Somit  $a_n \geq 1 + n\delta > n\delta$ . Für  $n \geq \frac{M}{\delta}$  gilt  $a_n \geq M$ . Also ist  $(a_n)_n$  unbeschränkt und somit divergent.

**3. Fall:**  $|z| = 1$

Hier ist  $|a_n| = |z|^n = 1^n = 1$  für alle  $n$ . Die Folge ist also betragsmäßig konstant. Die Folge liegt komplett auf dem Einheitskreis der komplexen Zahlenebene.

Die Folge ist beschränkt durch 1. Jedoch lässt sich keine Aussage über Konvergenz treffen. Beispielsweise konvergiert die konstante Folge  $a_n = 1$  gegen 1. Die alternierende Folge  $a_n = (-1)^n$  hingegen konvergiert nicht.

(b) Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Wir müssen zeigen, dass es ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  gibt, sodass für alle  $n \geq N_\varepsilon$  gilt:  $|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| < \varepsilon$ .

Wir unterscheiden die Fälle  $a = 0$  und  $a > 0$ .

Sei  $a = 0$ . Da  $a_n \rightarrow 0$ , existiert für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N_\varepsilon$ , sodass für alle  $n \geq N_\varepsilon$

$$a_n = |a_n - 0| < \varepsilon^2.$$

Nach Satz 1.29 ist die Wurzel monoton, d.h

$$\sqrt{a_n} < \varepsilon$$

für  $n \geq N_\varepsilon$ . Folglich konvergiert  $\sqrt{a_n} \rightarrow 0$ .

Sei nun  $a > 0$ . Wir betrachten die Differenz zum Grenzwert und erweitern

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \left| \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{a})(\sqrt{a_n} + \sqrt{a})}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \right| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}.$$

Da  $a_n \geq 0$ , gilt  $\sqrt{a_n} \geq 0$ . Somit ist der Nenner  $\sqrt{a_n} + \sqrt{a} \geq \sqrt{a} > 0$ . Somit

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}}.$$

Da  $(a_n)$  gegen  $a$  konvergiert, konvergiert  $|a_n - a|$  gegen 0. Fassen wir den Faktor  $\frac{1}{\sqrt{a}}$  als konstante Folge auf, folgt aus Satz 2.7

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = 0$$

Das bedeutet  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ .

(c) In einer früheren Übung wurde gezeigt, dass

$$1 \leq a_n \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Nach Beispiel 2.3 b) gilt  $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , also folgt nach Satz 2.7, dass die rechte Seite gegen 1 konvergiert. Aus Satz 2.10 b) (Sandwichkriterium) folgt, dass  $a_n \rightarrow 1$  konvergiert für  $n \rightarrow \infty$ .