Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Richard Nutt

Lösungsvorschlag zum 6. Übungsblatt

Analysis I

Winter Semester 2025/2026

Aufgabe 1:
(a) Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folgen mit den Gliedern

$$\text{(i)}\quad a_n = (1-\mathrm{i})\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{i}^k, \qquad\qquad \text{(ii)}\quad b_n = \left(-1+\tfrac{1}{2}(-1)^{n+1}\right)^n .$$

Bestimmen Sie auch den Limes inferior und Limes superior, sofern diese existieren.

(b) Sei $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_n$.

(c) Sei $(a_n)_n$ rekursiv definiert durch $a_{n+1} := \frac{3+5a_n}{20}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1 := 1$. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_n$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
(a)(i) Nach der geometrischen Summenformel (Beispiel 0.2 der Vorlesung) gilt

$$a_n = (1-\mathrm{i})\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{i}^k = (1-\mathrm{i})\,\frac{1-\mathrm{i}^n}{1-\mathrm{i}} = (1-\mathrm{i})\frac{1-\mathrm{i}^n}{1-\mathrm{i}} = 1-\mathrm{i}^n.$$

Da $\mathrm{i}^2 = -1$ und damit $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$ sowie $\mathrm{i}^4 = 1$, folgt

$$\mathrm{i}^n = \begin{cases} \mathrm{i}^0 = 1, & n = 4k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ \mathrm{i}^1 = \mathrm{i}, & n = 4k-1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ \mathrm{i}^2 = -1, & n = 4k-2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i} & n = 4k-3 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Also „zerfällt" $(a_n)_n$ in vier Teilfolgen $(a_{4k})_{k\in\mathbb{N}}, (a_{4k-1})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{4k-2})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{4k-3})_{k\in\mathbb{N}}$ mit den Gliedern:

$$a_{4k} = 1-\mathrm{i}^{4k} = 0, \qquad a_{4k+1} = 1-\mathrm{i}^{4k+1} = 1-\mathrm{i},$$
$$a_{4k+2} = 1-\mathrm{i}^{4k+2} = 2, \qquad a_{4k+3} = 1-\mathrm{i}^{4k+3} = 1+\mathrm{i}.$$

Jede dieser Teilfolgen ist konstant, insbesondere also konvergent. Nach Satz 2.20 sind ihre Grenzwerte 0, $1-\mathrm{i}$, 2 und $1+\mathrm{i}$ Häfungspunkte der Folge $(a_n)_n$. Da jedes a_n in einer der obigen Teilfolgen liegt, folgt nach Lemma 2.22, dass es keine weiteren Häufungspunkte gibt.
Da es sich nicht um eine reelle Folge handelt, sind Limes inferior und Limes superior der Folge gar nicht definiert.

(ii) Es ist

$$b_n = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-1}, & n = 2k-1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ \left(-\frac{3}{2}\right)^{2k}, & n = 2k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{1}$$

Da $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert und $(b_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge hiervon ist, folgern wir aus Bemerkung 2.18 b), dass auch $(b_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert. Nach Satz 2.20 ist damit 0 ein Häufungspunkt von $(b_n)_n$. Da $(b_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ strikt wachsend und unbeschränkt ist, ist es „anschaulich" klar, dass $(b_n)_n$ keine weiteren Häufungspunkte haben kann. Dies wollen wir nun zeigen: Angenommen, $(b_n)_n$ hätte einen weiteren Häufungspunkt $b \neq 0$. Nach Satz 2.20 gäbe es dann auch eine Teilfolge $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $b_{n_k} \to b$ für $k \to \infty$. Es gilt nun folgende

Zwischenbehauptung: Die Menge $\{k \in \mathbb{N} \mid n_k \text{ ist ungerade}\}$ ist endlich.
Beweis: Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, die Menge $\{k \in \mathbb{N} \mid n_k$ ist ungerade$\}$ wäre unendlich. Wir werden zeigen, dass unter dieser Annahme $b = 0$ gelten müsste, was im Widerspruch zu zur Voraussetzung $b \neq 0$ steht.
Sei $\varepsilon > 0$. Da $(b_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert, gibt es ein $K \in \mathbb{N}$ mit

$$|b_{2k-1} - 0| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq K. \tag{2}$$

Mit $\{k \in \mathbb{N} \mid n_k \text{ ist ungerade}\}$ ist auch die Menge $\{k \in \mathbb{N} \mid n_k \text{ ist ungerade und } k \geq K\}$ unendlich (denn wir entfernen im Zweifel nur *endlich* viele Elemente $1, 2, \dots, K-1$)). Damit liegen aber unendlich viele b_{n_k} in $(b_{2k-1})_{k\geq K}$ und für diese b_{n_k} gälte dann nach (2) auch $|b_{n_k} - 0| \leq \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgern wir, dass 0 ein Häufungspunkt von $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist. Da aber $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen b konvergiert, ist b nach Korollar 2.21 der einzige Häufungspunkt von $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Also müsste $b = 0$ gelten, ein Widerspruch zur Voraussetzung $b \neq 0$. Also war unsere Annahme falsch und die Menge $\{k \in \mathbb{N} \mid n_k \text{ ist ungerade}\}$ ist endlich.

Damit haben wir die Zwischenbehauptung bewiesen. Da also $\{k \in \mathbb{N} \mid n_k \text{ ist ungerade}\}$ endlich ist, existiert ein Index $K' \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k \geq K'$ die Indices n_k gerade sind. Aus (1) folgt dann aber

$$b_{n_k} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{n_k} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n_k} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{k} \quad \text{für alle } k \geq K'$$

(hierbei haben wir für die zweite Gleichung ausgenutzt, dass n_k gerade ist und für die letzte Ungleichung ausgenutzt, dass gemäß der Definition einer Teilfolge stets $n_k \geq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gelten muss). Da nach Aufgabe 5 a) des 4. Übungsblattes die Folge $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ (nach oben) unbeschränkt ist, folgt aus obiger Ungleichung auch, dass $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt sein muss. Somit wäre $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ divergent, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen b konvergiert. Somit kann es keinen weiteren Häufungspunkt $b \neq 0$ geben, sodass 0 der einzige Häufungspunkt von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

(b) Wir wissen bereits, dass $(e_n)_n$ definiert durch $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gegen e konvergiert (s. Beispiel 2.16). Nun ist

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} = (e_{2n})^{\frac{1}{2}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da $(e_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, konvergiert $(e_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ nach Bemerkung 2.18 b) gegen e. Aus Aufgabe 5 des 5. Übungsblattes folgern wir daher

$$a_n = (e_{2n})^{\frac{1}{2}} \longrightarrow e^{\frac{1}{2}} \quad (n \to \infty).$$

(c) Um einen Beweisansatz zu finden, berechnen wir zunächst die ersten vier Folgenglieder:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{2}{5}, \quad a_3 = \frac{1}{4}, \quad a_4 = \frac{17}{80}.$$

Wir können also vermuten, dass (a_n) fallend ist. Um herauszufinden, gegen welchen Wert die Folge (a_n) konvergieren könnte, *nehmen* wir zunächst *an*, dass die Folge (a_n) konvergiert und bezeichnen ihren Grenzwert mit $a \in \mathbb{R}$. Mit Bemerkung 2.6 c) und Satz 2.7 können wir dann aus der rekursiven Definition der a_n eine Gleichung für a herleiten:

$$a \overset{2.6\text{ c)}}{=} \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + 5a_n}{20} \overset{2.7}{=} \frac{3 + 5a}{20},$$

d.h.,

$$a = \frac{3}{20} + \frac{5}{20}a \iff a = \frac{1}{5}.$$

Also kann (wenn überhaupt) die Folge (a_n) nur gegen $\frac{1}{5}$ konvergieren. Diese Vorüberlegungen leitet uns zu folgender Beweisstrategie: Wir zeigen, dass (a_n) fallend ist und durch $\frac{1}{5}$ nach unten beschränkt ist.

Nach Theorem 2.14 muss dann die Folge (a_n) konvergieren, und unsere Vorüberlegung zeigt dann, dass ihr Grenzwert $\frac{1}{5}$ sein muss.
Wir widmen uns zunächst der Beschränktheit von (a_n), da wir diese für den Nachweis ihrer Monotonie benötigen.
Behauptung: Es gilt $a_n \geq \frac{1}{5}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Beweis: Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion.
Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist nach Definition $a_1 := 1 \geq \frac{1}{5}$.
Induktionsschluss: Sei $a_n \geq \frac{1}{5}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr (IV). Dann gilt

$$a_{n+1} = \frac{3 + 5a_n}{20} \overset{\text{(IV)}}{\geq} \frac{3 + 5 \cdot \frac{1}{5}}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5},$$

also $a_{n+1} \geq \frac{1}{5}$.
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist also $a_n \geq \frac{1}{5}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir beweisen jetzt, dass (a_n) fallend ist.
Behauptung: Die Folge (a_n) ist fallend.
Beweis: Wir müssen zeigen, dass $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei also $n \in \mathbb{N}$. Da $a_n \geq \frac{1}{5}$ ist (s.o.), erhalten wir

$$a_{n+1} = \frac{3}{20} + \frac{5}{20}a_n = a_n \left(\frac{3}{20a_n} + \frac{5}{20} \right) \leq a_n \left(\frac{3}{20 \cdot \frac{1}{5}} + \frac{5}{20} \right) = a_n \left(\frac{15}{20} + \frac{5}{20} \right) = a_n.$$

Somit ist (a_n) fallend.

Somit ist (a_n) fallend und durch $\frac{1}{5}$ nach unten beschränkt. Nach Theorem 2.14 ist (a_n) somit konvergent und unser Vorüberlegung zeigt, dass (a_n) gegen $\frac{1}{5}$ konvergiert.

Aufgabe 2 (K):
(a) (i) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge

$$a_n = \left(1 + \tfrac{1}{n^2}\right)^n.$$

Hinweis: Wenden Sie Satz 2.10.b) (Sandwichkriterium) an.

(ii) Die Folge $(e_n)_n$ sei gegeben durch die Glieder $e_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(e_n)_n$ gegen $1/\mathrm{e}$ konvergiert.

Hinweis: Wenden Sie Satz 2.7 an. Stellen Sie dazu $e_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ *über die Glieder der Folge* $(a_n)_n$ *aus Beispiel 2.16 dar.*

(b) Bestimmen Sie die Häufungspunkte folgender Folge, sowie deren Limes inferior und Limes superior.

$$a_n = \begin{cases} \frac{2-6n}{3n}, & n = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ \left(\frac{n}{n-1}\right)^n, & n = 3k-1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ 2\sqrt[n+1]{10}, & n = 3k-2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:
(a) (i) **Behauptung**: Die Folge $(a_n)_n$ konvergiert gegen 1 für $n \to \infty$.
Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt einerseits

$$1 = 1^n \leq \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Andererseits wissen wir aus der Vorlesung, dass die Folge $(e_n)_n := ((1 + n^{-1})^n)_n$ wachsend gegen e konvergiert (s. Beispiel 2.16 aus der Vorlesung). Also gilt $e_m \leq e$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und wir erhalten die obere Abschätzung

$$\left(1 + \tfrac{1}{n^2}\right)^n = \left(\left(1 + \tfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{1/n} = \sqrt[n]{e_{n^2}} \leq \sqrt[n]{e} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$1 \leq \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \leq \sqrt[n]{e} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach Beispiel 2.3 a) konvergiert die konstante Folge $(a_n)_n := (1)_n$ gegen 1 und nach 2.11 b) konvergiert die Folge $(a_n)_n := (\sqrt[n]{e})_n$ ebenso gegen 1. Nach Satz 2.10 b) konvergiert damit $(b_n)_n$ ebenfalls gegen 1 für $n \to \infty$.

(ii) Die Folge $(a_n)_n$ aus Beispiel 2.16 war definiert durch $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dort wurde gezeigt, dass sie monoton wachsend gegen e konvergiert. Da $\mathrm{e} \geq e_1 = 2 > 0$ gilt, konvergiert nach Satz 2.7 c) die durch $1/e_n$ gegebene Folge gegen 1/e. Nun schreiben wir

$$e_{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$
$$e_{n+1} = \frac{1}{a_n}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Mit Satz 2.7 folgern wir daher

$$e_{n+1} = \frac{1}{a_n}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} \to \frac{1}{e}\frac{1}{1+0} = \frac{1}{e} \quad (n \to \infty)$$

und damit (wieso genau?) wie gewünscht auch $e_n \to \frac{1}{e}$ für $n \to \infty$.

(b) Mit Satz 2.7 ist

$$\frac{2-6n}{3n} = \frac{\frac{2}{n}-6}{3} \longrightarrow -2 \quad (n \to \infty),$$
$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \longrightarrow e \quad (n \to \infty),$$
$$2\sqrt[n+1]{10} \longrightarrow 2\cdot 1 = 2 \quad (n \to \infty).$$

(Hierbei haben wir für den zweiten Grenzwert ausgenutzt, dass

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = a_{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) \quad \text{für alle } n \geq 2,$$

wobei $(a_n)_n$ die Exponentialfolge aus Beispiel 2.16 ist; daher ist

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = a_{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) \longrightarrow e\cdot 1 = e \quad (n \to \infty).$$

Für den dritten Grenzwert haben wir Beispiel 2.11 b) und Bemerkung 2.6 c) benutzt.) Die Folgen $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}, (a_{3k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3k-2})_{k\in\mathbb{N}}$ sind jeweils Teilfolgen der drei obigen Folgen. Nach Bemerkung 2.18 b) konvergieren daher $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}, (a_{3k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3k-2})_{k\in\mathbb{N}}$ und ihre Grenzwerte -2, e und 2 sind Häufungspunkte von $(a_n)_n$. Da jedes a_n in einer der drei Teilfolgen liegt, folgt aus Lemma 2.22, dass -2, e und 2 die einzigen Häufungspunkte von $(a_n)_n$ sind. Nun folgt aus Theorem 2.24 b) und aus $-2 < 2 < e$, dass

$$\liminf a_n = -2 \text{ und } \limsup a_n = e.$$

Aufgabe 3 (K):
(a) Zeigen Sie, dass die folgenden rekursiv definierten Folgen konvergieren und bestimmen Sie deren Grenzwert.

(i) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n},$ (ii) $b_1 = \frac{1}{2},\ b_{n+1} = \dfrac{1}{\frac{1}{b_n}+2n+1}.$

(b) Sei $(a_n)_n$ eine monotone Folge. Zeigen Sie: Besitzt $(a_n)_n$ einen Häufungspunkt a, dann konvergiert $(a_n)_n$ bereits gegen a.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(a) (i) Wir zeigen zunächst, dass (a_n) beschränkt (und damit insbesondere auch nach oben beschränkt) ist.
Behauptung: Es gilt $1 \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Beweis: Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion.
Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Aussage klar, da $1 = a_1 \leq 2$.
Induktionsschluss: Wir nehmen an, dass $1 \leq a_n \leq 2$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt (IV). Dann folgern wir einerseits

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \overset{\text{(IV)}}{\leq} \sqrt{2+2} = 2,$$

und andererseits

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \overset{(IV)}{\geq} \sqrt{2+1} \geq \sqrt{0+1} = 1.$$

Somit folgern wir insgesamt $1 \leq a_{n+1} \leq 2$.
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Behauptung also wahr.

Wir zeigen nun, dass (a_n) wachsend ist.
Behauptung: Die Folge (a_n) ist wachsend.
Beweis: Wir müssen zeigen, dass $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $1 \leq a_n \leq 2$ (s.o.) und damit

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \overset{a_n \geq 1 > 0}{=} \sqrt{a_n^2 \left(\frac{2}{a_n^2} + \frac{1}{a_n}\right)} = a_n \sqrt{\frac{2}{a_n^2} + \frac{1}{a_n}} \overset{a_n \leq 2}{\geq} a_n \sqrt{\frac{2}{2^2} + \frac{1}{2}} = a_n \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a_n.$$

Also ist (a_n) wachsend.

Wir haben also gezeigt, dass (a_n) nach oben beschränkt und wachsend ist. Nach Theorem 2.14 ist damit (a_n) konvergent und es existiert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ in $\mathbb{R}$. Wir zeigen nun, dass $a = 2$ ist.

Behauptung: Es gilt $a = 2$.
Beweis: Wenn wir Bemerkung 2.6 c), Satz 2.7 und Aufgabe 5 c) des 4. Übungsblattes auf die Definition der a_n anwenden, erhalten wir

$$a \overset{\text{2.6 c)}}{=} \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_n} \underset{\text{Ü4A5c)}}{\overset{2.7}{=}} \sqrt{2 + a}.$$

Quadrieren ergibt $a^2 = 2 + a$, also $a^2 - a - 2 = 0$. Durch quadratische Ergänzung erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 = a^2 - a - 2 &= \left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) - 2 - \frac{1}{4} \\ &= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \\ \iff a - \frac{1}{2} &= \pm\frac{3}{2} \\ \iff a &= -\frac{1}{2} \text{ oder } a = 2. \end{aligned}$$

Da aber $1 \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt nach Satz 2.10 a) auch $1 \leq a$. Somit scheidet $a = -\frac{1}{2}$ aus, und es muss $a = 2$ sein.

(ii) Wir zeigen zunächst, dass (b_n) beschränkt (und damit insbesondere auch nach unten beschränkt) ist.
Behauptung: Es gilt $0 < b_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Beweis: Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Aussage klar, da nach Voraussetzung $0 <= \frac{1}{2} = c_1 < 1$ gilt.
Induktionsschluss: Wir nehmen, an dass $0 < b_n < 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt (IV). Nach Aufgabe 1 (ii) des zweiten Übungsblattes ist dann $\frac{1}{b_n} > 1$. Da $2n + 1 > 0$ ist, folgt $\frac{1}{b_n} + 2n + 1 > 1 + 0 = 1$. Mit Aufgabe 1 (ii) des 2. Übungsblattes folgt dann aus der Ungleichung $\frac{1}{b_n} + 2n + 1 > 1 > 0$ auch

$$0 < b_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{b_n} + 2n + 1} < 1. \tag{3}$$

Somit folgern wir insgesamt $0 < b_{n+1} < 1$.
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Behauptung also wahr.
Wir zeigen, dass (b_n) monoton fallend ist.
Behauptung: Die Folge (b_n) ist fallend.
Beweis: Wir müssen zeigen, dass $b_{n+1} \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 < b_n < 1$ (s.o.) und damit

$$b_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{b_n} + 2n + 1} = \frac{1}{\frac{1+(2n+1)b_n}{b_n}} = \frac{1}{1 + (2n+1)b_n} b_n \leq \frac{1}{1+0} b_n = b_n.$$

Also ist (b_n) fallend.

Nach Theorem 2.14 ist damit (b_n) konvergent und es existiert $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ in $\mathbb{R}$.

Behauptung: Es gilt $b = 0$.
Beweis: Wir formen zunächst die Definition der b_{n+1} um:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{\frac{1}{b_n} + 2n + 1} = \frac{b_n}{1 + (2n+1)b_n} \\ \iff b_{n+1} &\left[1 + (2n+1)b_n\right] = b_n \\ \iff b_{n+1}b_n &= (b_n - b_{n+1}) \cdot \frac{1}{2n+1}. \end{aligned}$$

Wenn wir Bemerkung 2.6 c) und Satz 2.7 auf die letzte Gleichung anwenden, erhalten wir

$$b^2 \overset{2.6\text{ c)}}{=} \lim_{n\to\infty} b_{n+1}b_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - b_{n+1}) \cdot \frac{1}{2n+1} \overset{2.7}{=} 0 \cdot 0 = 0,$$

Aus $b^2 = 0$ folgt sofort wie gewünscht $b = 0$.

(b) O.B.d.A. sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Da a ein Häufungspunkt der Folge ist, existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ mit $a_{n_k} \to a$.

Wir zeigen zunächst, dass $(a_n)_n$ nach oben durch a beschränkt wird. Angenommen, es gäbe ein n_0 mit $a_{n_0} > a$. Aufgrund der Monotonie gilt alle $n \geq n_0$, dass $a_n \geq a_{n_0} > a$. Wählt man $\varepsilon = a_{n_0} - a > 0$, so lägen fast alle Folgenglieder außerhalb der ε-Umgebung von a, d.h. a ist kein Häufungspunkt. Folglich $a_n \leq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Somit ist $(a_n)_n$ durch a beschränkt und nach Voraussetzung monoton. Nach Theorem 2.14. ist die Folge somit konvergent. Weiter ist a ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$. Nach Korollar 2.21 ist ihr Grenzwert jedoch bereits der einzige Häufungspunkt, weshalb $a_n \to a$ folgt.

Aufgabe 4:
(a) Sei $(a_n)_n$ eine Folge. Zeigen Sie: Die Folge $(a_n)_n$ konvergiert genau dann, wenn jede der Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
Gilt die Aussage auch, wenn nur die Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$, aber nicht $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ als konvergent angenommen werden?

(b) Sei $(b_n)_n$ eine Folge, sodass für jedes feste $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ die Teilfolge $(b_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. Ist dann auch $(b_n)_n$ konvergent?
Hinweis: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:
(a) Sei $(a_n)_n$ eine Folge. Zu zeigen ist die Äquivalenz

$$(a_n) \text{ konvergiert.} \iff (a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}, (a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}} \text{ und } (a_{3k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ konvergieren.}$$

$\Longrightarrow$: Ist $(a_n)_n$ konvergent, so ist nach Bemerkung 2.18 b) auch jede Teilfolge von $(a_n)_n$ konvergent, also insbesondere auch die Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$.

$\Longleftarrow$: Seien $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent. Wir wollen Korollar 2.25 anwenden: Hierzu müssen wir zeigen, dass $(a_n)_n$ beschränkt ist und nur einen Häufungspunkt hat.

(i) Beschränktheit:
Nach Satz 2.4 a) sind $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ als konvergente Folgen beschränkt, d.h., es existieren Konstanten $M_1, M_2 > 0$ mit $|a_{2k}| \leq M_1$ und $|a_{2k-1}| \leq M_2$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da aber $\mathbb{N} = \{2k-1 \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ gilt (jede natürliche Zahl ist entweder gerade oder ungerade), folgt mit $M := \max\{M_1, M_2\}$ unmittelbar $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist$(a_n)_n$ beschränkt.

(ii) Häufungspunkte:
Nach Voraussetzung sind $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent, es existieren also die Grenzwerte $a := \lim_{k\to\infty} a_{2k}$ und $b := \lim_{k\to\infty} a_{2k-1}$. Nach Satz 2.20 sind a und b Häufungspunkte von $(a_n)_n$ und da jedes a_n in $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ oder $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ liegt, kann es nach Lemma 2.22 keine weiteren Häufungspunkte geben. Es verbleibt also $a = b$ zu zeigen: Da $(a_{6k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist, folgt aus Bemerkung 2.18 b)

$$a = \lim_{k\to\infty} a_{2k} \overset{2.18\text{ b)}}{=} \lim_{k\to\infty} a_{6k} \overset{2.18\text{ b)}}{=} \lim_{k\to\infty} a_{3k}. \tag{4}$$

Ebenso gilt, dass $(a_{6k-3})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist, sodass auch

$$b = \lim_{k\to\infty} a_{2k-1} \overset{2.18\text{ b)}}{=} \lim_{k\to\infty} a_{6k-3} \overset{2.18\text{ b)}}{=} \lim_{k\to\infty} a_{3k}. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt also wie gewünscht

$$a = \lim_{k\to\infty} a_{3k} = b.$$

Wir haben also gezeigt, dass $(a_n)_n$ beschränkt ist und nur einen Häufungspunkt hat (nämlich a). Nach Korollar 2.25 konvergiert damit $(a_n)_n$ gegen a.

Als Gegenbeispiel für die zweite Aussage sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Beispiel 2.3 c) divergent, aber die Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (1)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}} = (-1)_{k\in\mathbb{N}}$ sind jeweils konstant und nach Beispiel 2.3 a) konvergent.

(b) Nein, im Allgemeinen muss $(b_n)_n$ nicht konvergent sein. Man betrachte z.B.

$$b_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ eine Primzahl ist,} \\ 0, & \text{falls } n \text{ keine Primzahl ist.} \end{cases}$$

Damit ist $(b_n) = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, ...)$. Sei nun $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ beliebig, aber fest. Dann ist kn durch k teilbar und daher für alle $n \geq 2$ keine Primzahl. Somit ist $b_{kn} = 0$ für alle $n \geq 2$ und damit $(b_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent (mit Grenzwert 0). Da $k \geq 2$ beliebig gewählt war, sehen wir, dass die Teilfolgen $(b_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $k \geq 2$ Nullfolgen, also insbesondere konvergent sind. Damit ist 0 nach Satz 2.20 ein Häufungspunkt von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wäre nun $(b_n)_n$ konvergent, so dürfte es nach Korollar 2.25 keinen weiteren Häufungspunkt geben. Da es allerdings unendlich viele Primzahlen gibt, ist 1 auch ein Häufungspunkt von $(b_n)_n$. Also kann $(b_n)_n$ nicht konvergent sein.