Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Richard Nutt

Lösungsvorschlag zum 7. Übungsblatt

Analysis I

Winter Semester 2025/2026

Aufgabe 1:
(a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = 2^n(1 + (-1)^n) + 1$. Man bestimme

$$\liminf a_n, \ \liminf(a_{n+1}/a_n), \ \liminf \sqrt[n]{a_n}, \ \limsup \sqrt[n]{a_n}\,.$$

(b) Sei (a_n) rekursiv definiert durch $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1 = 2$.

(i) Zeigen Sie $\frac{3}{2} \le a_n \le 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Zeigen Sie, dass (a_n) eine Cauchyfolge ist und damit konvergiert.

(iii) Zeigen sie, dass der Grenzwert $a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ ist.

Hinweis zu (ii): Beispiel 2.31.

Bemerkung zu (iii): Der Grenzwert $a \approx 1,618\ldots$ ist der *Goldene Schnitt*.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
(a)(i) Bestimmung von $\liminf a_n$: Es ist

$$a_n = \begin{cases} 2^{n+1} + 1 & \text{für gerades } n, \\ 1 & \text{für ungerades } n. \end{cases} \tag{1}$$

Da $2^{n+1} + 1 \ge 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgern wir $c_n := \inf\{a_k \mid k \ge n\} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$\liminf a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 1.$$

Bemerkung: Aktuell ist der Limes Inferior (und auch Superior) nur für beschränkte Folgen definiert. Die Ausdrücke aus Gleichung (2.8) existieren in diesem speziellen Fall jedoch auch unabhängig von dieser Einschränkung und wurden oben berechnet. Streng genommen wäre zum aktuellen Stand der Vorlesung hier die Antwort, dass der Limes Inferior so nicht definiert ist. In einigen Wochen werden wir allerdings die Beschränktheitsvoraussetzung der Definition entfernen.

(ii) Bestimmung von $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}$: Aus (1) folgt, dass

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}+1} & \text{für gerades } n, \\ 2^{n+2} + 1 & \text{für ungerades } n. \end{cases}$$

Da $2^{n+2} + 1 \ge \frac{1}{2^{n+1}+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt

$$c_n := \inf\left\{\frac{a_{k+1}}{a_k} \mid k \ge n\right\} = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}+1} & \text{für gerades } n, \\ \frac{1}{2^{n+2}+1} & \text{für ungerades } n \end{cases} \le \frac{1}{2^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist

$$0 \le c_n \le \frac{1}{2^n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty),$$

und nach dem Sandwichlemma (Satz 2.10 b))

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} c_n = 0.$$

(iii) Bestimmung von $\limsup \sqrt[n]{a_n}$ und $\liminf \sqrt[n]{a_n}$: Wir zeigen zunächst, dass die Teilfolgen $(\sqrt[2k]{a_{2k}})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(\sqrt[2k-1]{a_{2k-1}})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent sind. Es gilt

$$2 = \sqrt[n]{2^n} \leq \sqrt[n]{2^{n+1}+1} \leq \sqrt[n]{2^{n+1}+2^{n+1}} = 2\sqrt[n]{4} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4} = 1$ nach Beispiel 2.11 b) gilt, folgern wir aus der obigen Ungleichung und dem Sandwichlemma, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{n+1}+1} = 2$ ist. Nach (1) ist $(\sqrt[2k]{a_{2k}})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(\sqrt[n]{2^{n+1}+1})$, also gilt auch $\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{a_{2k}} = 2$ nach Bemerkung 2.18 b). Weiterhin folgt unmittelbar aus (1), dass $(\sqrt[2k-1]{a_{2k-1}})_{k\in\mathbb{N}} = (1)_{k\in\mathbb{N}}$ und damit $\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k-1]{a_{2k-1}} = 1$ gilt. Somit sind die Teilfolgen $(\sqrt[2k]{a_{2k}})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(\sqrt[2k-1]{a_{2k-1}})_{k\in\mathbb{N}}$ tatsächlich konvergent und ihre Grenzwerte 1 und 2 sind nach Satz 2.20 Häufungspunkte von $(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Da jedes $\sqrt[n]{a_n}$ in $(\sqrt[2k]{a_{2k}})_{k\in\mathbb{N}}$ oder $(\sqrt[2k-1]{a_{2k-1}})_{k\in\mathbb{N}}$ liegt, folgt aus Lemma 2.22, dass 1 und 2 die einzigen Häufungspunkte von $(\sqrt[n]{a_n})$ sind. Nach Theorem 2.24 b) ist daher

$$\liminf \sqrt[n]{a_n} = 1 \text{ und } \limsup \sqrt[n]{a_n} = 2.$$

(b)(i) Wir zeigen $\frac{3}{2} \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ per vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Es ist $\frac{3}{2} \leq a_1 = 2$.

Induktionsschluss: Es sei $\frac{3}{2} \leq a_n \leq 2$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (IV). Dann gilt einerseits

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \overset{\text{(IV)}}{\leq} 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{2}{3} \leq 2,$$

und andererseits

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \overset{\text{(IV)}}{\geq} 1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Insgesamt gilt also $\frac{3}{2} \leq a_{n+1} \leq 2$ und der Induktionsschluss ist vollzogen.
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist $\frac{3}{2} \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Nach Aufgabenteil (i) ist $a_n \geq \frac{3}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit erhalten wir für alle $n \geq 2$

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - a_n| &= \left| \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) - \left(1 + \frac{1}{a_{n-1}}\right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} \right| = \frac{|a_n - a_{n-1}|}{a_n a_{n-1}} \leq \frac{|a_n - a_{n-1}|}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} \leq \frac{4}{9}|a_n - a_{n-1}|. \end{aligned}$$

Mit $q := \frac{4}{9} \in (0,1)$ folgern wir aus Beispiel 2.31, dass (a_n) eine Cauchyfolge ist.

(iii) Da nach Aufgabenteil (ii) die Folge (a_n) eine Cauchyfolge ist, folgt aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, dass (a_n) konvergent ist (vgl. Theorem 2.26). Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ ihr Grenzwert. Wie im letzten Übungsblatt folgert man dann mit Bemerkung 2.6 c) und Satz 2.7, dass

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{a_n} = 1 + \frac{1}{a}$$

(Man beachte hierbei, dass $a \neq 0$, also $1/a$ wohldefiniert ist, denn wegen $a_n \geq \frac{3}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt auch $a \geq \frac{3}{2}$ nach Satz 2.10 a).). Multiplikation mit a liefert die Gleichung $a^2 = a + 1$. Wir erhalten die Äquivalenzen

$$a^2 = a + 1 \iff 0 = a^2 - a - 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \iff a = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Da $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4}}{2} = -\frac{1}{2}$ und $a \geq \frac{3}{2}$ gilt, muss $a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ sein.

Aufgabe 2 (K):
(a) Bestimmen Sie die Anfangswerte $a_1 \in [0, \infty)$, für welche die durch $a_{n+1} = 1 + \frac{a_n^2}{4}$ rekursiv definierte Folge (a_n) konvergiert. Berechnen Sie auch den jeweiligen Grenzwert.

(b) Sei $(a_n)_n$ rekursiv definiert durch $a_{n+1} = \frac{1}{2+a_n^2}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1 = 0$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_n$ konvergiert.

Hinweis zu (b): Beispiel 2.31.

Bemerkung zu (b): Hier erfüllt der Grenzwert a die Gleichung $a^3 + 2a = 1$. Dies ist eine kubische Gleichung, welche sich mittels *Cardanischen Formeln* explizit lösen lässt. (Dies führt jedoch zu einem relativ komplizierten Ausdruck und ist nicht Teil der Vorlesung.)

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:
(a) Wir machen folgende Vorüberlegung: Angenommen, (a_n) konvergiert gegen ein $a \in \mathbb{C}$. Dann gilt mit Bemerkung 2.6 c) und Satz 2.7

$$a \overset{2.6\text{ c)}}{=} \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{a_n^2}{4} \overset{2.7}{=} 1 + \frac{a^2}{4}.$$

Somit erhalten wir

$$a = 1 + \frac{a^2}{4} \iff 4a = 4 + a^2 \iff 0 = (a-2)^2 \iff a = 2.$$

Somit ist $a = 2$ der einzig mögliche Grenzwert von (a_n). Wir untersuchen nun, für welche $a_1 \in [0, \infty)$ die Folge (a_n) gegen 2 konvergiert. Hierfür halten wir zunächst fest, dass (a_n) monoton wachsend ist.
Behauptung: Die Folge (a_n) ist wachsend.
Beweis: Wir müssen zeigen, dass $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{a_n^2}{4} - a_n = \frac{1}{4}\left(a_n^2 - 4a_n + 4\right) = \frac{1}{4}(a_n - 2)^2 \geq 0,$$

was wie gewünscht $a_{n+1} \geq a_n$ impliziert.

Konvergiert daher (a_n), so muss notwendigerweise $a_1 \leq 2$ gelten. Denn gilt $a_n \to 2$ $(n \to \infty)$, so folgt aus der Monotonie von (a_n), dass $a_1 \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und daher mit Satz 2.10 a) auch $a_1 \leq \lim_{n\to\infty} a_n = 2$. Wir haben also die Implikation

$$a_n \to 2 \quad (n \to \infty) \Longrightarrow a_1 \in [0, 2].$$

Wir zeigen nun, die Umkehrung obiger Implikation. Da (a_n) wachsend ist, müssen wir hierfür nach Satz 2.14 nur noch zeigen, das (a_n) nach oben beschränkt ist.
Behauptung: Sei $a_1 \in [0, 2]$. Dann ist die Folge (a_n) nach oben beschränkt und es gilt

$$0 \leq a_n \leq 2 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Wir beweisen obige Aussage durch vollständige Induktion.
Induktionsanfang: Es ist $a_1 \in [0, 2]$ nach Voraussetzung, also $0 \leq a_1 \leq 2$.
Induktionsschluss: Sei $0 \leq a_n \leq 2$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (IV). Dann gilt einerseits

$$a_n + 1 = 1 + \frac{a_n^2}{4} \overset{\text{(IV)}}{\leq} 1 + \frac{2^2}{4} = 1 + 1 = 2,$$

also $a_{n+1} \leq 2$. Andererseits gilt

$$a_{n+1} = 1 + \underbrace{\frac{a_n^2}{4}}_{\geq 0} \geq 1 \geq 0,$$

also auch $a_{n+1} \geq 0$. Insgesamt gilt also $0 \leq a_{n+1} \leq 1$.
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist $0 \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Somit ist im Fall $a_1 \in [0,2]$ die wachsende Folge (a_n) zusätzlich nach oben beschränkt. Nach Satz 2.14 und unserer Vorüberlegung gilt somit auch die Umkehrung obiger Implikation

$$a_n \to 2 \quad (n \to \infty) \Longleftarrow a_1 \in [0,2].$$

Insgesamt haben wir also gezeigt: Die Folge (a_n) kann nur gegen 2 konvergieren und es gilt

$$a_n \to 2 \quad (n \to \infty) \iff a_1 \in [0,2].$$

(b) Um zu zeigen, dass (a_n) eine Cauchy-Folge ist, weisen wir nach, dass die Folge kontraktiv ist, siehe Beispiel 2.31.

Zunächst zeigen wir, dass $a_n \in I := \left[0, \frac{1}{2}\right]$ gilt.

Da $a_n^2 \geq 0$ für alle n gilt, ist der Nenner $2 + a_n^2 \geq 2$. Daraus folgt:

$$0 < a_{n+1} = \frac{1}{2 + a_n^2} \leq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Die Folge (a_n) verläuft also vollständig im Intervall I.

Wir betrachten den Abstand zweier aufeinanderfolgender Glieder $|a_{n+1} - a_n|$.

$$|a_{n+1} - a_n| = \left| \frac{1}{2 + a_n^2} - \frac{1}{2 + a_{n-1}^2} \right| = \left| \frac{(2 + a_{n-1}^2) - (2 + a_n^2)}{(2 + a_n^2)(2 + a_{n-1}^2)} \right| = \frac{|a_{n-1}^2 - a_n^2|}{(2 + a_n^2)(2 + a_{n-1}^2)}.$$

Aus der dritten binomischen Formel $(x^2 - y^2 = (x-y)(x+y))$ folgt

$$= \frac{|a_{n-1} - a_n| \cdot (a_{n-1} + a_n)}{(2 + a_n^2)(2 + a_{n-1}^2)} = |a_n - a_{n-1}| \underbrace{\frac{a_n + a_{n-1}}{(2 + a_n^2)(2 + a_{n-1}^2)}}_{q}.$$

Da $a_n, a_{n-1} \in I$ gilt $q \leq \frac{1}{4}$. Somit

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{4} |a_n - a_{n-1}|$$

und induktiv folgt

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q^{n-1} |a_2 - a_1| = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \frac{1}{2}.$$

Nach Beispiel 2.31 ist $(a_n)_n$ somit eine Cauchy-Folge.

Aufgabe 3 (K):
Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen absolut konvergieren, konvergieren oder divergieren.

(a) $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(\sqrt{n} - 2)^2}{n^2 + \sqrt{n^4 + 1}}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{2n + \sqrt{n^2 + 1}}}{n^2 \sqrt{n}}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n^2}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}}{\sqrt[4]{n+2}}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
(a) Die Reihe $\sum_{n \geq 1} \frac{(\sqrt{n}-2)^2}{n^2 + \sqrt{n^4+1}}$ divergiert. Das zeigen wir, indem wir eine divergente Minorante angeben. Sei $a_n = \frac{(\sqrt{n}-2)^2}{n^2 + \sqrt{n^4+1}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann „verhält sich (a_n) wie $\frac{\sqrt{n}^2}{n^2} = \frac{1}{n}$ für $n \to \infty$“. Wir schätzen also nach unten ab:

$$a_n = \frac{(\sqrt{n} - 2)^2}{n^2 + \sqrt{n^4 + 1}} \geq \frac{(\sqrt{n} - \frac{\sqrt{n}}{2})^2}{n^2 + \sqrt{n^4 + 3n^4}} = \frac{\sqrt{\frac{n}{4}}^2}{n^2 + 2n^2} = \frac{1}{12} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{12} \frac{1}{n}$$

für $n \geq 16$, weil dann $\sqrt{n} \geq 4$ bzw. $\frac{\sqrt{n}}{2} \geq 2$. Somit ist $\sum_{n\geq 16} \frac{1}{12}\frac{1}{n}$ eine divergente Minorante für $\sum_{n\geq 16} a_n$. Satz 3.12 liefert, dass $\sum_{n\geq 16} a_n$ divergiert und dasselbe folgt für $\sum_{n\geq 1} a_n$.

(b) Die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{2n+\sqrt{n^2+1}}}{n^2\sqrt{n}}$ konvergiert absolut. Das zeigen wir mit dem Majorantenkriterium. Sei $a_n = \frac{\sqrt{2n+\sqrt{n^2+1}}}{n^2\sqrt{n}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann "verhält sich (a_n) wie $\frac{\sqrt{n+\sqrt{n^2}}}{n^2\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+n}}{n^2\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2}}{n^2}$ für $n \to \infty$". Wir schätzen also nach oben ab:

$$a_n = \frac{\sqrt{2n+\sqrt{n^2+1}}}{n^2\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{2n+\sqrt{n^2+3n^2}}}{n^2\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2n+2n}}{n^2\sqrt{n}} = \frac{2\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}} = 2\frac{1}{n^2}$$

weil $3n^2 \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist $\sum_n 2\frac{1}{n^2}$ eine konvergente Majorante für $\sum_n a_n$. Satz 3.12 liefert, dass die Reihe absolut konvergiert.

(c) Wir wenden das Leibnizkriterium an um zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{n\geq 2}(-1)^n \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^2}$ konvergiert. Sei $a_n = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^2}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Wir müssen zeigen, dass (a_n) eine fallende Nullfolge ist. Da

$$0 \leq \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^2} \leq \frac{\sqrt{n^2}}{n^2} = \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \geq 2$$

gilt und $(\frac{1}{n})$ eine Nullfolge ist, folgt aus dem Sandwichlemma (Satz 2.10 b)), dass auch (a_n) eine Nullfolge ist. Es verbleibt zu zeigen, dass (a_n) fallend ist. Da

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^2} = \sqrt{\frac{n^2-1}{n^4}} = \sqrt{\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} \quad \text{für alle } n \geq 2$$

gilt, ist es hierfür sinnvoll $\sqrt{x(1-x)}$ für $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ genauer zu untersuchen. Wir behaupten, dass für $0 \leq x \leq y \leq \frac{1}{2}$ auch $\sqrt{x(1-x)} \leq \sqrt{y(1-y)}$ gilt: Denn ist $0 \leq x \leq y \leq \frac{1}{2}$, so ist $y - x \geq 0$ und $0 \leq x + y \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ und daher

$$y(1-y) - x(1-x) = y - x - (y^2 - x^2) = \underbrace{(y-x)}_{\geq 0}\underbrace{[1-(y+x)]}_{\geq 0} \geq 0$$

$$\Longrightarrow x(1-x) \leq y(1-y) \Longrightarrow \sqrt{x(1-x)} \leq \sqrt{y(1-y)}.$$

Setzen wir nun $x \coloneqq \frac{1}{(n+1)^2}$ und $y \coloneqq \frac{1}{n^2}$ für $n \geq 2$, so folgt $0 \leq x \leq y \leq \frac{1}{2}$ und damit

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{(n+1)^2}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)} = \sqrt{x(1-x)} \leq \sqrt{y(1-y)} = \sqrt{\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} = a_n.$$

Also ist $(a_n)_{n\geq 2}$ fallend. Nach dem Leibnizkriterium konvergiert also die Reihe.
Bemerkung: Dass $(a_n)_{n\geq 2}$ fallend ist, kann man auch mit der „Brute-Force-Methode“ auf Kosten der Eleganz direkt zeigen: Für $n \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned}
a_{n+1} = \frac{\sqrt{(n+1)^2-1}}{(n+1)^2} &\leq \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^2} = a_n \\
\iff \quad & (n^2-1)(n+1)^4 \geq (n^2+2n+1-1)n^4 \\
\iff \quad & n^6 + 4n^5 + 5n^4 - 5n^2 - 4n - 1 \geq n^6 + 2n^5 \\
\iff \quad & 2n^5 + 5n^4 - 5n^2 - 4n - 1 \geq 0
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist aber für $n \geq 2$ stets erfüllt, da dann die Relationen $4n + 1 \leq 4n^2$, $n^2 \leq n^4$ gelten und somit auch

$$2n^5 + 5n^4 - 5n^2 - 4n - 1 \geq 2n^5 + 5n^4 - 5n^4 - 4n^4 \geq 2n^5 - 4n^4 = 2n^4(n-2) \geq 0.$$

Um zu zeigen, dass die Reihe nicht absolut konvergiert, suchen wir eine divergente Minorante. Da $n \geq 2$ haben wir auch $n^2 \geq 4$ oder äquivalent $-1 \geq -\frac{1}{4}n^2$. Es folgt

$$\left|(-1)^n\frac{\sqrt{n^2-1}}{n^2}\right| = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^2} \geq \frac{\sqrt{n^2-\frac{1}{4}n^2}}{n^2} = \frac{\sqrt{\frac{3}{4}n^2}}{n^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \geq 2.$$

Diese Abschätzung liefert die divergente Minorante $\sum_{n\geq 2} \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{n}$ für die Reihe $\sum_{n\geq 2} |a_n|$. Aus dem Minorantenkriterium folgt, dass die Reihe $\sum_{n\geq 2} |a_n|$ nicht konvergiert. Also konvergiert $\sum_{n\geq 2} a_n$ nicht absolut.

(d) Die Reihe $\sum_{n\geq 2} \frac{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}}{\sqrt[4]{n+2}}$ divergiert. Das zeigen wir, indem wir eine divergente Minorante angeben. Sei $a_n = \frac{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}}{\sqrt[4]{n+2}}$ für $n \geq 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a_n = \frac{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}}{\sqrt[4]{n+2}} &= \frac{(\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n})(\sqrt[4]{n+1}+\sqrt[4]{n})}{\sqrt[4]{n+2}\,(\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n})} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n+2}\,(\sqrt[4]{n+1}+\sqrt[4]{n})} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt[4]{n+2}\,(\sqrt[4]{n+1}+\sqrt[4]{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \end{aligned}$$

Wir erkennen, dass "(a_n) sich wie $\frac{1}{\sqrt[4]{n}\sqrt[4]{n}\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$ für $n \to \infty$ verhält". Wir schätzen also nach unten ab:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[4]{n+2}\,(\sqrt[4]{n+1}+\sqrt[4]{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} &\geq \frac{1}{\sqrt[4]{n+2}\cdot 2\sqrt[4]{n+2}\cdot 2\sqrt{n+2}} \\ &= \frac{1}{4(n+2)} \geq \frac{1}{4(n+n)} = \frac{1}{8}\,\frac{1}{n} \end{aligned}$$

für $n \geq 2$. Hierbei haben wir $\sqrt{n}, \sqrt{n+1} \leq \sqrt{n+2}$ und $\sqrt[4]{n}, \sqrt[4]{n+1} \leq \sqrt[4]{n+2}$ verwendet. Wir wissen, dass die Reihe $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{8}\frac{1}{n}$ divergiert. Sie ist also eine divergente Minorante für die Reihe $\sum_{n\geq 2} \frac{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}}{\sqrt[4]{n+2}}$, die damit nach dem Minorantenkriterium divergiert.

Aufgabe 4:
(a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen absolut konvergieren, konvergieren oder divergieren.

$$\text{(i)} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{2n+5}{n^3+\frac{3}{2}n^2+7}, \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{n+4}{2n^2-3n+3}.$$

Es sei $(a_k)_{k\geq 1}$ eine Folge. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(b) Ist $\sum_k a_k$ eine konvergente Reihe, dann konvergiert auch $\sum_k \mathrm{Re}(a_k)$ und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}(a_k) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right).$$

(c) Ist nun $(a_k)_{k\geq 1}$ reell und $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$\sum_{k\geq 1} a_k \text{ konvergiert} \iff \sum_{k\geq 1} \frac{a_k}{1+a_k} \text{ konvergiert.}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:
(a) (i) Die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{2n+5}{n^3+\frac{3}{2}n^2+7}$ konvergiert absolut. Das zeigen wir mit dem Majorantenkriterium. Sei $a_n = \frac{2n+5}{n^3+\frac{3}{2}n^2+7}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann „verhält sich (a_n) wie $\frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ für $n \to \infty$“. Wir schätzen also nach oben ab: Für $n \geq 5$ haben wir

$$a_n = \frac{2n+5}{n^3+\frac{3}{2}n^2+7} \leq \frac{2n+n}{n^3} = \frac{3n}{n^3} = 3\frac{1}{n^2}.$$

Somit ist $\sum_{n\geq 5} 3\frac{1}{n^2}$ eine konvergente Majorante für $\sum_{n\geq 5} a_n$. Damit konvergiert $\sum_{n\geq 5} a_n$ absolut nach Satz 3.12 und dasselbe folgt für $\sum_{n\geq 1} a_n$.

(ii) Die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{n+4}{2n^2-3n+3}$ divergiert. Das zeigen wir, indem wir eine divergente Minorante angeben. Sei $a_n = \frac{n+4}{2n^2-3n+3}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann „verhält sich (a_n) wie $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ für $n \to \infty$". Wir schätzen also nach unten ab: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{n+4}{2n^2-3n+3} \geq \frac{n}{2n^2+3} \geq \frac{n}{2n^2+3n^2} = \frac{1}{5}\frac{n}{n^2} = \frac{1}{5}\frac{1}{n},$$

da $3n^2 \geq 3$ gilt. Somit ist $\sum_n \frac{1}{5}\frac{1}{n}$ eine divergente Minorante für $\sum_n a_n$. Satz 3.12 liefert, dass $\sum_n a_n$ divergiert.

(b) **Behauptung**: Ist $\sum_k a_k$ eine konvergente Reihe, dann konvergiert auch $\sum_k \mathrm{Re}(a_k)$ und es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}(a_k) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$.
Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ seien $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ bzw. $s_n^{\mathrm{Re}} := \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}(a_k)$ die n-ten Partialsummen der Reihen $\sum_k a_k$ bzw. $\sum_k \mathrm{Re}(a_k)$. Nach Voraussetzung konvergiert die Reihe $\sum_k a_k$, und ihr Grenzwert wird (wie üblich) mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathbb{C}$ bezeichnet. Nach Definition der Reihenkonvergenz bedeutet dies, dass die Folge $(s_n)_{n\geq 1}$ gegen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert. Nach Satz 2.9 a) konvergiert damit auch die Folge $(\mathrm{Re}(s_n))_{n\geq 1}$ gegen $\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$. Nun gilt aber $(\mathrm{Re}(s_n))_{n\geq 1} = (s_n^{\mathrm{Re}})_{n\geq 1}$, denn wir haben

$$\mathrm{Re}(s_n) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}(a_k) = s_n^{\mathrm{Re}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also konvergiert auch $(s_n^{\mathrm{Re}})_{n\geq 1}$ gegen $\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$. Nach Definition der Reihenkonvergenz bedeutet dies, dass die Reihe $\sum_k \mathrm{Re}(a_k)$ konvergiert und dass ihr Grenzwert $\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$ ist, d.h., es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}(a_k) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)$.

(c) **Behauptung**: Sei $(a_k)_{k\geq 1}$ reell und $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sum_{k\geq 1} a_k \text{ konvergiert} \iff \sum_{k\geq 1} \frac{a_k}{1+a_k} \text{ konvergiert.}$$

Beweis: Wir zeigen die Äquivalenz mit Hilfe des Majorantenkriteriums.

$\Longrightarrow$: Sei $\sum_{k\geq 1} a_k$ konvergent. Wegen

$$0 \leq \frac{a_k}{1+a_k} \leq \frac{a_k}{1+0} \leq a_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

folgt aus dem Majorantenkriterium, dass dann auch $\sum_{k\geq 1} \frac{a_k}{1+a_k}$ konvergent ist.
$\Longleftarrow$: Sei $\sum_{k\geq 1} \frac{a_k}{1+a_k}$ konvergent. Dann ist nach dem notwendigen Kriterium für Reihenkonvergenz $\left(\frac{a_k}{1+a_k}\right)_{k\geq 1}$ eine Nullfolge. Wählen wir $\varepsilon := \frac{1}{2}$ in der Definition der Folgenkonvergenz, so sehen wir, dass es einen Index $K \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $k \geq K$

$$\frac{a_k}{1+a_k} \leq \frac{1}{2} \iff a_k \leq \frac{a_k}{2} + \frac{1}{2} \iff a_k \leq 1.$$

Somit gilt für alle $k \geq K$ auch

$$0 \leq a_k = (1+a_k)\frac{a_k}{1+a_k} \leq (1+1)\frac{a_k}{1+a_k} = 2\frac{a_k}{1+a_k}.$$

Es ist also $\sum_{k\geq K} \frac{2a_k}{1+a_k}$ eine Majorante für $\sum_{k\geq K} a_k$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert also $\sum_{k\geq K} a_k$ und damit auch $\sum_{k\geq 1} a_k$.