Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Richard Nutt

Lösungsvorschlag zum 8. Übungsblatt

Analysis I

Winter Semester 2025/2026

Aufgabe 1:

(a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen absolut konvergieren, konvergieren oder divergieren.

(i) $\sum_{n\geq 0} \frac{4^n(1+2n)^n(1-n)^n}{(3+n)^{2n}\,2^n}$

(ii) $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{(5n)!}$

(iii) $\sum_{n\geq 1} (1+(-1)^n)^n \left(\frac{n+3}{4n}\right)^n$

(iv) $\sum_{n\geq 0} n^n \left(1-\frac{n}{n+1}\right)^{kn}$ für ein $k \in \mathbb{N}$

(v) $\sum_{n\geq 0} n^n \left(1-\sqrt[k]{\frac{n}{n+1}}\right)^n$ für ein $k \in \mathbb{N}$

Hinweis zu (v)*:* Erweitern Sie geschickt, vgl. Partialsummen der geometrischen Reihe in Beispiel 3.2b).

(b) Berechnen Sie den Reihenwert der folgenden Reihen.

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{3^k}$

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k+2}$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k}$

Hinweis zu (iii): Bestimmen Sie $A, B \in \mathbb{R}$ so, dass $\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k+1} + \frac{B}{k+2}$ (Partialbruchzerlegung). Dabei sind -1 und -2 die Nullstellen des Polynoms k^2+3k+2.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(a) (i) Die Reihe $\sum_{n\geq 0} \frac{4^n(1+2n)^n(1-n)^n}{(3+n)^{2n}\,2^n}$ divergiert. Das zeigen wir mit dem Wurzelkriterium. Sei $a_n = \frac{4^n(1+2n)^n(1-n)^n}{(3+n)^{2n}\,2^n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{4(1+2n)(n-1)}{(3+n)^2 2} = 2\frac{2n^2-n-1}{n^2+6n+9} \to 2\cdot 2 = 4,\ (n\to\infty).$$

Somit ist $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 4 > 1$. Das Wurzelkriterium (Satz 3.16) liefert die Divergenz der Reihe.

(ii) Die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{(5n)!}$ konvergiert absolut. Das zeigen wir mit dem Quotientenkriterium. Sei $a_n = \frac{n!}{(5n)!}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{(n+1)!}{(5n+5)!}\frac{(5n)!}{n!} = \frac{n+1}{5(n+1)(5n+4)\dots(5n+1)} \\ &= \frac{1}{5^5 n^5 + \ldots + 5!} \to 0,\ (n\to\infty).\end{aligned}$$

Somit ist $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{m\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0 < 1$. Das Quotientenkriterium (Satz 3.14) liefert die Konvergenz der Reihe.

(iii) Die Reihe $\sum_{n\geq 1}(1+(-1)^n)^n\left(\frac{n+3}{4n}\right)^n$ konvergiert absolut. Das zeigen wir mit dem Wurzelkriterium. Sei $a_n=(1+(-1)^n)^n\left(\frac{n+3}{4n}\right)^n$ für $n\in\mathbb{N}$. Dann gilt

$$b_n := \sqrt[n]{|a_n|}=|1+(-1)^n|\,\frac{n+3}{4n}\leq 2\frac{n+3}{4n}\quad \text{für } n\in\mathbb{N}.$$

Aus Satz 2.30 b) folgt daher

$$\limsup b_n\leq \limsup 2\frac{n+3}{4n}=\lim_{n\to\infty}2\frac{n+3}{4n}=\frac{1}{2}<1$$

Das Wurzelkriterium (Satz 3.16) liefert die absolute Konvergenz der Reihe.

(iv) Die Reihe $\sum_{n\geq 0}n^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)^{kn}$ konvergiert für $k\geq 2$ absolut. Für $k=1$ divergiert die Reihe.

Sei zunächst $k=1$. Dann

$$n^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)^n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\to\frac{1}{\mathrm{e}}\neq 0\,,$$

für $n\to\infty$. Die Reihenglieder bilden also keine Nullfolge. Nach dem Trivialkriterium Korollar 3.6 divergiert die Reihe.

Sei nun $k\geq 2$. Wir wenden das Wurzelkriterium an. Es gilt

$$n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)^k=n\left(\frac{1}{n+1}\right)^k\to 0\quad\text{für } n\to\infty\,.$$

Folglich ist $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|n^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)^{nk}\right|}=0<1$ und die Behauptung folgt aus dem Wurzelkriterium.

(v) Die Reihe $\sum_{n\geq 0}n^n\left(1-\sqrt[k]{\frac{n}{n+1}}\right)^n$ konvergiert für $k\geq 2$ absolut und divergiert für $k=1$.

Sei zunächst $k=1$. Wie zuvor

$$n^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)^n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\to\frac{1}{\mathrm{e}}\neq 0\,.$$

Die Reihenglieder bilden also keine Nullfolge. Nach dem Trivialkriterium Korollar 3.6 divergiert die Reihe.

Sei nun $k\geq 2$. Wir starten mit einer kleinen Vorüberlegung. Zunächst ist $z:=\frac{n}{n+1}$ betragsmäßig kleiner 1. Weiter gilt nach Beispiel 3.2

$$\frac{1-z^k}{1-z}=\sum_{i=0}^{k-1}z^i\iff(1-z)\sum_{i=0}^{k-1}z^i=1-z^k$$

für $k\in\mathbb{N}$.

Wir wollen wieder das Wurzelkriterium anwenden. Um den Wurzelterm loszuwerden erweitern wir also mit $\frac{\sum_{i=0}^{k-1}z^i}{\sum_{i=0}^{k-1}z^i}$, so ergibt sich für $n\in\mathbb{N}$

$$n\left(1-\sqrt[k]{\frac{n}{n+1}}\right)=n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{\sum_{i=0}^{k-1}z^i}=\frac{n}{n+1}\frac{1}{\sum_{i=0}^{k-1}z^i}\,.$$

Für $n\to\infty$ gilt für festes $i\in\mathbb{N}$, dass $z^i\to 1$. Also erhalten wir nach Satz 2.7

$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-\sqrt[k]{\frac{n}{n+1}}\right)=1\frac{1}{\sum_{i=0}^{k-1}1}=\frac{1}{k}<1\,.$$

Die Behauptung folgt aus dem Wurzelkriterium (Satz 3.16).

(b)(i) Wir formen die Reihe zu einer Teleskopsumme um

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\,.$$

Setzen wir dies in die Summe ein, so erhalten wir:

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{(N+1)!} \to 1$$

für $N \to \infty$.

(ii) Wir spalten die Reihe in zwei geometrische Reihen auf:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3^k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k$$

Nach Beispiel 3.2 gilt $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ für $|z| < 1$, also konvergiert nach Satz 2.7

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{3^k} = 3 + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}\,.$$

(iii) Zunächst faktorisieren wir den Nenner $k^2 + 3k + 2 = (k+1)(k+2)$. Anschließend führen wir eine Partialbruchzerlegung durch, d.h. wir wählen den Ansatz

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k+1} + \frac{B}{k+2}$$

und multiplizieren mit $(k+1)(k+2)$

$$1 = A(k+2) + B(k+1)$$

Anschließendes einsetzen der Nullstellen $k = -1$ und $k = -2$ liefert $A = 1$ und $B = -1$. Also

$$\frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\,.$$

(Wir werden das vermutlich nochmal in der Ana2 etwas ausführlicher behandeln.) Erneut handelt es sich um eine Teleskopsumme und wir erhalten

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{N+2} \to \frac{1}{2} \qquad \text{für } N \to \infty\,.$$

(iv) Wir klammern zunächst den von k unabhängigen Term aus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k}\,.$$

Aus dem binomischen Lehrsatz (Beispiel 0.3) folgt nun

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n\,.$$

Wir erhalten also eine geometrische Reihe und nach Beispiel 3.2 folgt somit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} = \frac{1}{1-3/4} - 1 = 3\,.$$

Aufgabe 2 (K):
(a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen absolut konvergieren, konvergieren oder divergieren.

(i) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^n}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{(n+1)^3}{3^n}$ (iii) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\binom{2n}{n}2^{-n}$

(b) Berechnen Sie den Reihenwert der folgenden Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1}\,.$$

Hinweis zu (b): Vergleiche Aufgabe 1(b)(iii).

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(a) (i) Die Reihe $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$ konvergiert absolut. Dies zeigen wir mit dem Wurzelkriterium. Sei $a_n=\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$ für $n\in\mathbb{N}$. Dann gilt

$$b_n := \sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n \quad \text{für } n\in\mathbb{N}.$$

Die hierdurch gegebene Folge (b_n) hat zwei Häufungspunkte. Nach Beispiel 2.16 der Vorlesung, Aufgabe 1 (a) des letzten Übungsblatts und Bemerkung 2.18 b) gelten

$$b_{2k}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{(-1)^{2k}}{2k}\right)^{2k}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k}\xrightarrow[2.18\text{ b)}]{2.16}\frac{1}{3}\mathrm{e},\ (k\to\infty),$$

$$b_{2k-1}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{(-1)^{2k-1}}{2k-1}\right)^{2k-1}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2k-1}\right)^{2k-1}\xrightarrow[2.18\text{ b)}]{6,\text{A2a)ii)}}\frac{1}{3\mathrm{e}},\ (k\to\infty).$$

Nach Satz 2.20 sind $\frac{1}{3}e$ und $\frac{1}{3e}$ Häufungspunkte von (b_n) und nach Lemma 2.22 gibt es keine weiteren. Da nach Korollar 2.25 der Limes superior der größte Häufungspunkt einer Folge ist, folgern wir wegen $1<\mathrm{e}<3$, also $\frac{1}{3\mathrm{e}}<\frac{1}{3}\mathrm{e}<1$ eben auch $\limsup b_n=\frac{1}{3}e<1$. Das Wurzelkriterium (Satz 3.16) liefert die absolute Konvergenz der Reihe.

(ii) Die Reihe $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{(n+1)^3}{3^n}$ konvergiert absolut. Das zeigen wir mit dem Wurzelkriterium. Sei $a_n=(-1)^n\frac{(n+1)^3}{3^n}$ für $n\in\mathbb{N}$. Dann gilt

$$b_n := \sqrt[n]{|a_n|}=\frac{\sqrt[n]{(n+1)^3}}{3}=\frac{1}{3}\big(\sqrt[n]{n+1}\big)^3.$$

Wir zeigen, dass $\sqrt[n]{n+1}\to 1$ für $n\to\infty$. Dann gilt nach Satz 2.7 b), dass $b_n\to\frac{1}{3}$ für $n\to\infty$. Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt[n]{n}\leq\sqrt[n]{n+1}\leq\sqrt[n]{n+n}=\sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n}$$

Da $\sqrt[n]{n}\to 1$ für $n\to\infty$ nach der Aufgabe 5 des 4. Übungsblattes sowie $\sqrt[n]{2}\to 1$ für $n\to\infty$ nach Beispiel 2.11 b) gilt, folgern wir aus dem Sandwichlemma (Satz 2.10 b)), dass $\sqrt[n]{n+1}\to 1$ für $n\to\infty$ gilt. Somit haben wir $\limsup b_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{3}<1$. Das Wurzelkriterium (Satz 3.16) liefert die absolute Konvergenz der Reihe.

(iii) Sei $a_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{1}{2^n}$. Wir zeigen mittels des Quotientenkriterium, dass die Reihe divergiert. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2\cdot 2^{n+1}}\cdot\frac{(n!)^2\cdot 2^n}{(2n)!}\\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2(n!)^2\cdot 2\cdot 2^n}\cdot\frac{(n!)^2\cdot 2^n}{(2n)!}\\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{2(n+1)^2}\to 2>1\,,\end{aligned}$$

für $n \to \infty$. Somit folgt die Behauptung aus Satz 3.14b).

(b) Wieder nutzen wir eine Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$$

Damit lässt sich die Reihe als Teleskopsumme schreiben. Wir betrachten die Partialsumme

$$\begin{aligned} s_N &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{N}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k+1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{k=2}^{N-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{N+1}\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right]. \end{aligned}$$

Also $s_N \to \frac{3}{4}$ für $N \to \infty$.

Aufgabe 3 (K):
(a) Sei $\sum_n a_n$ eine absolut konvergente Reihe und (b_n) eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass $\sum_n a_n b_n$ absolut konvergiert. Finden Sie weiter Folgen (a_n) und (b_n) so, dass $\sum_n a_n$ konvergiert, (b_n) beschränkt ist, aber $\sum_n a_n b_n$ divergiert.

(b) Es sei (a_n) definiert durch $a_n := \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass zwar die Reihe $\sum_n a_n$ konvergiert, aber das Cauchyprodukt von $\sum_n a_n$ mit sich selbst divergiert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
(a) **Behauptung**: Sei $\sum_n a_n$ eine absolut konvergente Reihe und (b_n) eine beschränkte Folge. Dann ist $\sum_n a_n b_n$ absolut konvergent.

Beweis: Da (b_n) nach Voraussetzung beschränkt ist, existiert ein $M > 0$ so, dass $|b_n| \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\sum_n a_n$ nach Voraussetzung absolut konvergiert, ist $\sum_n |a_n|$ und damit auch $\sum_n M\,|a_n|$ konvergent. Somit ist wegen

$$0 \le |a_n b_n| = |a_n||b_n| \le M|a_n| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

die Reihe $\sum_n M\,|a_n|$ eine konvergente Majorante für $\sum_n |a_n b_n|$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert also $\sum_n a_n b_n$ absolut.

Für den zweiten Teil der Aufgabe betrachten wir (a_n) und (b_n) gegeben durch $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ und $b_n = (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum_n a_n$ konvergent nach dem Leibnizkriterium und (b_n) (durch 1) beschränkt. Aber wegen $a_n b_n = (-1)^{2n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum_n a_n b_n = \sum_n \frac{1}{n}$ die harmonische Reihe, die nach Beispiel 3.2 d) divergiert.

(b) Mit dem Leibnizkriterium sehen wir leicht, dass $\sum_n a_n$ konvergiert. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} > \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt[3]{n+2} > \sqrt[3]{n+1} \quad \Longleftarrow \quad n+2 > n+1.$$

Also ist die durch $\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$ gegebene Folge monoton fallend. Es ist auch klar, dass dies eine Nullfolge ist. Daher liefert das Leibnizkriterium die Konvergenz von $\sum_n (-1)^{n+1}\sqrt[3]{n+1}$

Jetzt zeigen wir, dass das Cauchyprodukt von $\sum_n a_n$ mit sich selbst divergiert. Die Koeffizienten des Cauchyprodukts sind

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}a_k = (-1)^{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}\sqrt[3]{n-k+1}}.$$

Wir wollen zeigen, dass die Folge (c_n) keine Nullfolge ist. Es reicht den Betrag der Folgenglieder zu betrachten:

$$|c_n| = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)(n-k+1)}}.$$

Wir betrachten die Summanden genauer. Nach Aufgabe 1 b) des 2. Übungsblattes gilt

$$\begin{aligned}(k+1)(n-k+1) &\leq \left(\frac{k+1+n-k+1}{2}\right)^2 = \frac{(n+2)^2}{4} \\ \implies \quad \sqrt[3]{(k+1)(n-k+1)} &\leq \frac{(n+2)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{4}} \\ \implies \quad \frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)(n-k+1)}} &\geq \frac{\sqrt[3]{4}}{(n+2)^{\frac{2}{3}}}\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Abschätzung

$$|c_n| \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt[3]{4}}{(n+2)^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{4}\frac{n+1}{(n+2)^{\frac{2}{3}}} \geq \sqrt[3]{4}\frac{n}{(3n)^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{4}{9}}\, n^{1-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{4}{9}}\, n^{\frac{1}{3}}$$

Weil die Folge mit den Gliedern $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\, n^{\frac{1}{3}}$ nach oben unbeschränkt ist, ist (c_n) keine Nullfolge, sodass das Cauchyprodukt $\sum c_n$ divergiert.

Aufgabe 4:
Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, sodass

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{für alle } z \in B(0,1).$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:
Für $z \in B(0,1)$ konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{n\geq 0} z^n$ absolut und nach Beispiel 3.2 b) gilt in diesem Fall $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. Mit Satz 3.24 folgern wir daher

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} z^k z^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{für } z \in B(0,1),$$

wobei wir $a_n \coloneqq n+1$ für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert haben. Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ erfüllt also das Gewünschte.