Lösungsvorschlag zum 9. Übungsblatt

Analysis I

Winter Semester 2025/2026

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie die Menge der $z \in \mathbb{C}$, für welche die folgenden Potenzreihen konvergieren. In (e) reicht es, den Konvergenzradius der Potenzreihe zu berechnen.

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{7^n+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n!} z^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sqrt{n2^n} z^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \big(4+(-1)^n\big)^{-3n} z^{2n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n+\sqrt{n}+1}$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
(a) Es gilt

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{7^n+1} = \sum_{n\geq 0} a_n z^n,$$

wobei (a_n) durch die Teilfolgen $(a_{2n}) := (\frac{1}{7^n+1})$, $(a_{2n+1}) := (0)$ definiert ist. Wir behaupten $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \frac{1}{\sqrt{7}}$. In der Tat,

$$\frac{1}{7\sqrt[n]{2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{7^n+7^n}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{7^n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{7^n}} = \frac{1}{7} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach dem Sandwichlemma (Satz 2.10 b)) und Satz 2.11 b) ist also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{7^n+1}} = \frac{1}{7},$$

und mit Aufgabe 5 c) des 5. Übungsblattes erhalten wir schließlich

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{\sqrt[n]{7^n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

Die Teilfolge $(\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|})$ ist trivialerweise eine Nullfolge. Aus Lemma 2.22 und Theorem 2.24 folgt nun, dass $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt{7}}$ ist. Nach Definition 3.28 ist der Konvergenzradius

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{7}}} = \sqrt{7}.$$

Als nächstes müssen wir das Verhalten für $|z| = \rho$ gesondert betrachten.

Sei $|z| = \sqrt{7}$, also $|z|^{2n} = 7^n$. Wir prüfen zunächst die notwendige Bedingung, Korollar 3.6

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z^{2n}}{7^n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{7^n}{7^n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+7^{-n}} = 1 \neq 0$$

Da die Glieder keine Nullfolge bilden, divergiert die Reihe überall auf dem Rand $|z| = \sqrt{7}$.

(b) Es gilt

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n!} z^n = \sum_{n\geq 0} a_n z^n,$$

wobei wir $a_n := (-1)^n 2^{-n!}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert haben. Es gilt

$$0 \leq \sqrt[n]{|a_n|} = \left(\left|\frac{(-1)^n}{2^{(n-1)!n}}\right|\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)!} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

sodass wir mit Aufgabe 5 a) des 5. Übungsblattes und dem Sandwichlemma (Satz 2.10 b)) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ erhalten. Nach Definition 3.28 ist der Konvergenzradius $\rho = \infty$.

(c) Es gilt

$$\sum_{n\geq 0} \sqrt{n2^n} z^n = \sum_{n\geq 0} a_n z^n,$$

wobei wir $a_n := \sqrt{n2^n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert haben. Es gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left((n2^n)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} = \left((n2^n)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\sqrt[n]{n}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach Aufgabe 5 b), c) des 5. Übungsblattes und Satz 2.7 gilt daher $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt{2}$. Für den Konvergenzradius ρ folgt daher

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Sei $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Wieder folgt wegen Korollar 3.6 und

$$\left|\sqrt{n2^n} z^n\right| = \sqrt{n} \cdot \sqrt{2^n} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \sqrt{n} \cdot 2^{n/2} \cdot 2^{-n/2} = \sqrt{n}\,,$$

dass die Reihenglieder keine Nullfolge bilden. Die Reihe divergiert also überall auf dem Rand $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(d) Es gilt

$$\sum_{n\geq 0}(4 + (-1)^n)^{-3n} z^{2n} = \sum_{n\geq 0} a_n z^n,$$

wobei $(a_n)_{n\geq 0}$ durch die Teilfolgen $(a_{4n}) := (5^{-6n})$, $(a_{4n+1}) := (0)$, $(a_{4n+2}) := (3^{-6n-3})$ und $(a_{4n+3}) := (0)$ definiert ist. Damit sind die Teilfolgen $(\sqrt[4n]{|a_{4n}|}) = (5^{-\frac{3}{2}})$, $(\sqrt[4n+1]{|a_{4n+1}|}) = (0)$, $(\sqrt[4n+2]{|a_{4n+2}|}) = (3^{-\frac{3}{2}})$ und $(\sqrt[4n+3]{|a_{4n+3}|}) = (0)$ konstant und nach Lemma 2.22 und Theorem 2.24 gilt $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 3^{-\frac{3}{2}}$. Für den Konvergenzradius ρ folgt daher

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{3^{-\frac{3}{2}}} = \sqrt{27}.$$

Sei $|z| = \sqrt{27}$, also $|z|^{2n} = 27^n$. Wir untersuchen die Teilfolge für ungerade n ($n = 2k + 1$)

$$\left|a_n z^{2n}\right| = (4 - 1)^{-3n} \cdot 27^n = 3^{-3n} \cdot 27^n = \frac{27^n}{27^n} = 1$$

Da eine Teilfolge der Beträge gegen 1 konvergiert, bilden die Glieder keine Nullfolge. Die Reihe divergiert somit auf dem Rand $|z| = 3\sqrt{3}$.

(e) Es gilt

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n+\sqrt{n}+1} = \sum_{n\geq 0} a_n z^n,$$

wobei wir $a_n := \frac{1}{n+\sqrt{n}+1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ gesetzt haben. Wir behaupten, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

Es ist

$$\frac{1}{3n} = \frac{1}{n+n+n} \leq \frac{1}{n+\sqrt{n}+1} \leq \frac{1}{n+0+0} \leq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

also

$$\frac{1}{\sqrt[n]{3}\,\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Mit Hilfe des Sandwichlemmas (Satz 2.10 b)) folgern wir daher wie gewünscht

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1,$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3}} = 1$ nach Satz 2.7 und Beispiel 2.11 b) und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$ nach Satz 2.7 und Aufgabe 5 b) des 5. Übungsblattes gelten. Nach Definition 3.28 gilt für den Konvergenzradius

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Bemerkung zum Konvergenzradius:

Wir betrachten $|z| = 1$. *Fall $z = 1$:* In diesem Fall ist die Reihe gegeben durch $\sum \frac{1}{n+\sqrt{n}+1}$. Da $\frac{1}{n+\sqrt{n}+1} \geq \frac{1}{3n}$ für $n \geq 1$, folgt nach dem Minorantenkriterium und Beispiel 3.2 (harmonische Reihe), dass die Reihe divergiert.

Fall $|z| = 1, z \neq 1$ Wir verwenden das *Dirichlet-Kriterium* unten, beziehungsweise aus der Übung. Sei $a_n = \frac{1}{n+\sqrt{n}+1}$ und $b_n = z^n$, so ist $(a_n)_n$ eine fallende Nullfolge. Die Partialsummen $B_N = \sum_{n=0}^N z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}$ sind für $z \neq 1$ beschränkt durch $|B_N| \leq \frac{2}{|1-z|}$. Folglich konvergiert die Reihe für alle $z \neq 1$ auf dem Einheitskreis.

Der Vollständigkeit halber wiederholen wir hier nochmal Inhalte der Übung am Freitag.

Lemma 1 (Dirichlet Kriterium)**.** *Seien $a_n \in \mathbb{R}$ mit $(a_n)_n$ eine mononton fallende Nullfolge und $b_n \in \mathbb{C}$, für $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ und $(B_n)_n$ beschränkt. Dann existiert $\sum_{n=0}^\infty a_n b_n$.*

Lemma 2 (Partiellen Summation)**.** *Seien $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ und sei $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$. Dann*

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_k = a_{n+1} B_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} B_k (a_k - a_{k+1})\,.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die *Formel der partiellen Summation.* Dies geht zum Beispiel wieder mithilfe einer vollständigen Induktion. (Man kann die Aussage auch direkt ohne Induktion zeigen, indem man $\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_k (B_k - B_{k-1})$ schreibt und die Summen geschickt manipuliert. Versuchen Sie auch dies zur Übung, wenn sie unsicher mit Indexshifts sind.)

(IA) Für $n = 1$ ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{2} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 = a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_1 - a_2 b_1 = a_2(b_1 + b_2) + b_1(a_1 - a_2) = a_2 B_2 + B_1(a_1 - a_2)\,.$$

(IS) Die Behauptung gelte für ein festes aber beliebig $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt für $n+1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+2} a_k b_k &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_k\right) + a_{n+2}b_{n+2} \\
&\overset{IV}{=} a_{n+1}B_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} B_k(a_k - a_{k+1}) + a_{n+2}(B_{n+2} - B_{n+1}) \\
&= a_{n+2}B_{n+2} + \sum_{k=1}^{n} B_k(a_k - a_{k+1}) + a_{n+1}B_{n+1} - a_{n+2}B_{n+1} \\
&= a_{n+2}B_{n+2} + \sum_{k=1}^{n} B_k(a_k - a_{k+1}) + B_{n+1}(a_{n+1} - a_{n+2}) \\
&= a_{n+2}B_{n+2} + \sum_{k=1}^{n+1} B_k(a_k - a_{k+1})\,.
\end{aligned}$$

□

Zeigen wir nun das *Dirichlet Kriterium.*

Beweis. Es sei $s_N = \sum_{k=1}^{N} a_k b_k$ die N-te Partialsumme. Nach der gerdade gezeigten *Formel der partiellen Summation* gilt

$$s_N = a_N B_N + \sum_{k=1}^{N-1} B_k(a_k - a_{k+1})\,. \tag{1}$$

Da die Folge der Partialsummen B_N durch ein $M > 0$ beschränkt ist und a_N eine Nullfolge ist, folgt

$$0 \le |a_N B_N| \le |a_N| \cdot M \to 0\,,$$

das heißt, nach dem Sandwichlemma konvergiert $a_N B_N \to 0$ für $N \to \infty$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} B_k(a_k - a_{k+1})$ ist absolut konvergent, da

$$\sum_{k=1}^{N-1} |B_k(a_k - a_{k+1})| \le M \sum_{k=1}^{N-1} |a_k - a_{k+1}|\,,$$

wobei $a_k - a_{k+1} > 0$. Wir haben also eine Teleskopsumme vorliegen und es gilt

$$M \sum_{k=1}^{N-1} |a_k - a_{k+1}| = M \sum_{k=1}^{N-1} a_k - a_{k+1} = M(a_1 - a_N) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} M a_1\,.$$

Somit konvergieren beide Terme in Gleichung (1), das heißt der Reihenwert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ existiert. □

Aufgabe 2:
(a) Sei (a_n) ein beschränkte Folge mit $\liminf_{n\to\infty} |a_n| > 0$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_n a_n z^n$.

(b) Sei (a_n) eine Folge derart, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_n \neq 0$ für alle $n \ge n_0$. Weiter sei die Folge $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_n$ beschränkt. Zeigen Sie, dass für den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe $\sum_{n\ge 0} a_n z^n$ gilt

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 0 \quad &\Longrightarrow \quad \left(\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)^{-1} \le \rho \le \left(\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)^{-1}, \\
\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \rho = \infty\,.
\end{aligned}$$

Unter welchen hinreichenden Bedingungen kann also der Konvergenzradius mit dem „Quotientenkriterium“ berechnet werden?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:
(a) Sei (a_n) beschränkt und $\alpha := \underline{\lim}_{n\to\infty} |a_n| > 0$. Da (a_n) beschränkt ist, gibt es dann ein $M > 0$ mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da ferner $\alpha = \underline{\lim}_{n\to\infty} |a_n| > 0$ ist, gibt es nach Lemma 2.29 einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$|a_n| \geq \frac{\alpha}{2} =: m \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Somit ist also $m \leq |a_n| \leq M$ für alle $n \geq n_0$ und damit auch

$$\sqrt[n]{m} \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{M} \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Da nach Beispiel 2.11 b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{m} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M} = 1$ gilt, folgt mit dem Sandwichlemma (Satz 2.10 b))

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

Somit folgt für den Konvergenzradius von $\sum_n a_n z^n$:

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{1} = 1.$$

(b) Sei (a_n) eine Folge derart, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Weiter sei die Folge $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_n$ beschränkt.

Wir hatten in der Übung bereits gesehen, dass in diesem Fall

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

gilt. Wir wiederholen an dieser Stelle den Beweis nochmal. (In der Übung hatte sich ein kleiner Fehler in den Exponenten im Beweis eingeschlichen.)

(1) Angenommen, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =: \alpha > 0$. Dann ist auch $\beta := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 0$. Sei nun $\varepsilon \in (0, \alpha)$ beliebig, aber fest. Nach Lemma 2.29 existiert dann ein Index $n_1 \geq n_0$, sodass

$$\alpha - \varepsilon < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \beta + \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq n_1.$$

Per vollständiger Induktion folgt hieraus für alle $n \geq n_1$

$$|a_n| = \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \cdot \frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|} \cdots \frac{|a_{n_1+1}|}{|a_{n_1}|} \cdot |a_{n_1}| \geq (\alpha - \varepsilon)^{n-n_1} |a_{n_1}| = c_1 (\alpha - \varepsilon)^n$$

mit $c_1 := (\alpha - \varepsilon)^{-n_1} |a_{n_1}| > 0$ und analog

$$|a_n| \leq (\beta + \varepsilon)^{n-n_1} |a_{n_1}| = c_2 (\beta + \varepsilon)^n$$

mit $c_2 := (\beta + \varepsilon)^{-n_1} |a_{n_1}| > 0$. Durch Ziehen der n-ten Wurzel erhalten wir

$$\sqrt[n]{c_1} (\alpha - \varepsilon) \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{c_2} (\beta + \varepsilon) \quad \text{für alle } n \geq n_1.$$

Mit Beispiel 2.11 b) und Satz 2.30 b) erhalten wir durch den Grenzübergang $n \to \infty$

$$\alpha - \varepsilon \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \beta + \varepsilon.$$

Obige Ungleichungskette gilt nun für jedes $\varepsilon \in (0, \alpha)$, sodass mit Satz 1.20

$$\alpha \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \beta,$$

$$\text{also} \quad \beta^{-1} \leq \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} \leq \alpha^{-1}$$

folgt. Mit den Definitionen für α, β und ρ bedeutet dies gerade

$$\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)^{-1} \leq \rho \leq \left(\underline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)^{-1}.$$

(2) Angenommen, $\beta := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$. Genauso wie in (1) folgern wir

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|a_n|} \leq \beta = 0.$$

Da $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist die Ungleichung $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq 0$ nach Satz 2.30 b) klar. Damit erhalten wir insgesamt $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. Dies impliziert aber sofort $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$: In der Tat, wegen

$$0 \leq \underline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|a_n|} = 0$$

ist auch $\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, sodass Korollar 2.25 b) die Existenz von $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ liefert. Nach Definition 3.28 gilt also $\rho = \infty$.
Wir sehen also: Falls $\alpha := \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existiert, so gilt

$$\rho = \begin{cases} \alpha^{-1}, & \text{falls } \alpha > 0, \\ \infty, & \text{falls } \alpha = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 3 (K):
Bestimmen Sie die Menge der $z \in \mathbb{C}$, für welche die folgenden Potenzreihen konvergieren. In (d) reicht es, den Konvergenzradius der Potenzreihe zu berechnen.

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{3^n\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+1}} z^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right)^n z^{2n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} 2^{-n} 3^{(-1)^n n} z^{3n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n^2(n+1)} z^{(n^2)}$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
Um die Konvergenz von Potenzreihen zu untersuchen, ist der Konvergenzradius sehr hilfreich: Hat die Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ Konvergenzradius ρ, so konvergiert $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \rho$ (d.h. für $z \in B(0,\rho)$) und divergiert für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \rho$ (d.h. für $z \in \mathbb{C}\backslash\overline{B}(0,\rho)$). Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \rho$ (d.h. für $z \in S(0,\rho)$) hilft uns der Konvergenzradius nicht weiter. Hier müssen wir eine Einzelfallbetrachtung durchführen, um zu entscheiden, ob die Potenzreihe konvergiert oder nicht.

(a) Die Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} \frac{3^n\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+1}} z^n$ konvergiert genau für $z \in \overline{B}\left(0, \frac{1}{3}\right)$ (d.h. für jene $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq \frac{1}{3}$). Zuerst berechnen wir den Konvergenzradius. Wir setzen $a_n := \frac{3^n\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+1}}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt einerseits

$$\sqrt[n]{|a_n|} = 3\sqrt[n]{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+1}}} \leq 3\sqrt[n]{1} = 3 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und andererseits

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 3\sqrt[n]{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+n^7}}} = 3\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt[n]{n^{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}}}} = 3\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^3} \to 3,\ (n \to \infty).$$

Diese Abschätzung und das Sandwichlemma (Satz 2.10 b)) zeigen, dass $\sqrt[n]{|a_n|} \to 3$ für $n \to \infty$ und damit $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 3$. Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist also $\rho = \frac{1}{3}$.

Sei nun $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \frac{1}{3}$. Dann haben wir

$$|a_n z^n| = a_n |z|^n = \frac{3^n \sqrt{n}}{\sqrt{n^7+1}} \frac{1}{3^n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+1}} \le \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^7}} = n^{\frac{1}{2}-\frac{7}{2}} = n^{-3}$$

Das heißt, in diesem Fall ist die Reihe $\sum_n n^{-3}$ eine konvergente Majorante für $\sum_n a_n z^n$. Es folgt mit dem Majorantenkriterium, dass $\sum_n a_n z^n$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \frac{1}{3}$ absolut konvergiert. Insgesamt konvergiert die Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \le \frac{1}{3}$ (und das sogar absolut).

(b) Die Potenzreihe $\sum_n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right)^n z^{2n}$ konvergiert genau für $z \in B(0, \sqrt{2})$ (d.h. für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \sqrt{2}$). Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig. Wir wollen das Wurzelkriterium auf die Reihe anwenden. Es gilt

$$\sqrt[n]{\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right|^n |z|^{2n}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right) |z|^2 \to \frac{1}{2} |z|^2, \ (n \to \infty).$$

Somit konvergiert die Reihe, wenn $\frac{1}{2} |z|^2 < 1$ und divergiert, wenn $\frac{1}{2} |z|^2 > 1$. Das heißt sie konvergiert wenn $|z| < \sqrt{2}$ und divergiert, wenn $|z| > \sqrt{2}$. Der Konvergenzradius ist $\rho = \sqrt{2}$.

Sei nun $|z| = \sqrt{2}$. Dann gilt

$$\left|\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right)^n z^{2n}\right| = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right)^n \left(|z|^2\right)^n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right)^n 2^n = \left(1 + \frac{2}{2n+1}\right)^n$$

Diese Folge konvergiert nicht gegen Null, da $1 + \frac{2}{2n+1} \ge 1$. Das bedeutet, dass die Reihe $\sum_n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right)^n z^{2n}$ in diesem Fall divergiert.

(c) Die Potenzreihe $\sum_{n\ge 0} 2^{-n} 3^{(-1)^n n} z^{3n}$ konvergiert genau für $z \in B(0, \sqrt[3]{\frac{2}{3}})$, also für jene $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$. Sei $z \in \mathbb{C}$. Es gilt

$$\sqrt[n]{\left|\frac{3^{(-1)^n n}}{2^n} z^{3n}\right|} = \frac{3^{(-1)^n}}{2} |z|^3 = \begin{cases} \frac{3}{2} |z|^3 & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{6} |z|^3 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Offenbar ist also $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{-n} 3^{(-1)^n n} z^{3n}} = \frac{3}{2} |z|^3$, sodass die Potenzreihe konvergiert, wenn $\frac{3}{2} |z|^3 < 1$ und divergiert, wenn $\frac{3}{2} |z|^3 > 1$. Das bedeutet, sie konvergiert, wenn $|z| < \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ und divergiert, wenn $|z| > \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$. Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist somit $\rho = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

Sei nun $|z| = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, also $|z|^3 = \frac{2}{3}$. Dann gilt

$$\left|\frac{3^{(-1)^n n}}{2^n} z^{3n}\right| = \frac{3^{(-1)^n n}}{2^n} \frac{2^n}{3^n} = \frac{3^{(-1)^n n}}{3^n} = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ \left(\frac{1}{9}\right)^n & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Weil diese Folge keine Nullfolge ist, kann die Reihe $\sum_{n\ge 0} 2^{-n} 3^{(-1)^n n} z^{3n}$ in diesem Fall nicht konvergieren.

(d) Um den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n^2(n+1)} z^{(n^2)}$ zu bestimmen, betrachten wir

$$\sqrt[n]{\left|\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n^2(n+1)} z^{(n^2)}\right|} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n(n+1)} |z|^n = (e_{n+1} |z|)^n$$

mit der Folge (e_n) aus Beispiel 2.16 gegeben durch $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Es ist bekannt, dass $e_n \le \mathrm{e}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei zunächst $|z| < \frac{1}{\mathrm{e}}$. Dann haben wir $e_{n+1} |z| \le \mathrm{e} |z| < 1$ und somit

$$\sqrt[n]{\left|\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n^2(n+1)} z^{(n^2)}\right|} = (e_{n+1} |z|)^n \le (\mathrm{e} |z|)^n \to 0, \ (n \to \infty).$$

Das heißt $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2(n+1)} z^{(n^2)}\right|} = 0$ und das Wurzelkriterium liefert die Konvergenz der Reihe $\sum_n \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2(n+1)} z^{(n^2)}$.

Sei andererseits $|z| > \frac{1}{\mathrm{e}}$, also $|z| = \frac{1}{\mathrm{e}} + c$ für ein $c > 0$. Zu c gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $e_{n+1} \geq \mathrm{e} - c$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt wegen $e_n \geq 2$ und $1/\mathrm{e} < 1$ die Abschätzung

$$(e_{n+1}\,|z|)^n = \left(\frac{e_{n+1}}{\mathrm{e}} + ce_{n+1}\right)^n \geq \left(\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}} - \frac{c}{\mathrm{e}} + 2c\right)^n > (1-c+2c)^n = (1+c)^n.$$

für $n \geq n_0$. Die Folge $(1+c)^n$ ist unbeschränkt und hat keine konvergente Teilfolge. Insbesondere ist $\left(\sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2(n+1)} z^{(n^2)}\right|}\right)_n$ unbeschränkt und nach dem Wurzelkriterium divergiert die Reihe $\sum_n \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2(n+1)} z^{(n^2)}$ in diesem Fall.

Die Potenzreihe konvergiert also für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \frac{1}{\mathrm{e}}$ und divergiert für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \frac{1}{\mathrm{e}}$, also ist $\rho = \frac{1}{\mathrm{e}}$ der Konvergenzradius der Potenzreihe.

Aufgabe 4 (K):
Zeigen Sie: Für alle $u, v \in \mathbb{C}$ gelten

$$\begin{aligned}\sin(u \pm v) &= \sin(u)\cos(v) \pm \cos(u)\sin(v)\,,\\ \cos(u \pm v) &= \cos(u)\cos(v) \mp \sin(u)\sin(v)\,.\end{aligned}$$

Folgern Sie hieraus für $z, w \in \mathbb{C}$ die Identität

$$\sin(z) + \sin(w) = 2\sin\left(\tfrac{z+w}{2}\right)\cos\left(\tfrac{z-w}{2}\right).$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:
Seien $u, v \in \mathbb{C}$. Dann gilt nach dem Exponentialgesetz (Beispiel 3.25 a)) und der Euler-Identität (siehe Satz 3.33)

$$\begin{aligned}\cos(u+v) + i\sin(u+v) = e^{i(u+v)} &= e^{iu}e^{iv}\\ &= [\cos(u) + i\sin(u)]\,[\cos(v) + i\sin(v)]\\ &= [\cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)] + i\,[\sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v)]\ .\end{aligned}$$

Ein Vergleich von Real-und Imaginärteilen der linken und rechten Seite der Gleichung zeigt

$$\cos(u+v) = \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v) \quad \text{und} \quad \sin(u+v) = \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v).$$

Ersetzen wir v durch $-v$, erhalten wir unter Anwendung von Gleichungen (3.7) aus dem bereits Bewiesenen

$$\cos(u-v) = \cos(u+(-v)) = \cos(u)\cos(-v) - \sin(u)\sin(-v) = \cos(u)\cos(v) + \sin(u)\sin(v)$$

$$\sin(u-v) = \sin(u+(-v)) = \sin(u)\cos(-v) + \cos(u)\sin(-v) = \sin(u)\cos(v) - \cos(u)\sin(v).$$

Somit haben wir insgesamt

$$\sin(u \pm v) = \sin(u)\cos(v) \pm \cos(u)\sin(v) \tag{2}$$

$$\cos(u \pm v) = \cos(u)\cos(v) \mp \sin(u)\sin(v) \tag{3}$$

gezeigt. Seien nun $z, w \in \mathbb{C}$. Wir setzen $u := \frac{z+w}{2} \in \mathbb{C}$ und $v := \frac{z-w}{2} \in \mathbb{C}$. Dann gilt $z = u + v$ und $w = u - v$ und aus (2) folgern wir daher

$$\begin{aligned}\sin(z) + \sin(w) &= \sin(u+v) + \sin(u-v)\\ &= [\sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v)] + [\sin(u)\cos(v) - \cos(u)\sin(v)]\\ &= 2\sin(u)\cos(v) = 2\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z-w}{2}\right).\end{aligned}$$