

Lösungsvorschlag zum 10. Übungsblatt

Analysis I

Winter Semester 2025/2026

Aufgabe 1:

(a) Seien $(x_n)_n, (y_n)_n$ reelle Folgen. Es gelte $y_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Zeigen Sie: Ist $(x_n)_n$ nach unten beschränkt, dann gilt $x_n + y_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$.

Was kann geschehen, wenn $(x_n)_n$ nicht nach unten beschränkt ist?

(b) Zeigen Sie dass die folgenden Grenzwerte existieren und bestimmen Sie deren Wert.

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x}{x + 1} - x \right) \qquad (ii) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(a) Es sei (x_n) nach unten beschränkt. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $x_n \geq -m$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei nun $K \in \mathbb{N}$. Da $y_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, existiert für die Schranke $K' := K + m \in \mathbb{N}$ ein Index $N_{K'} \in \mathbb{N}$, sodass $y_n \geq K'$ für alle $n \geq N_{K'}$. Wir folgern

$$x_n + y_n \geq -m + K' = -m + (K + m) = K \quad \text{für alle } n \geq N_{K'}.$$

Da $K \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt war, folgt $x_n + y_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$.

Ist $(x_n)_n$ nicht nach unten beschränkt, so lässt sich keine Aussage über Konvergenz treffen, wie die folgenden Beispiele zeigen:

Setze $x_n := -y_n + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$, so konvergiert $x_n + y_n = c \rightarrow c$.

Setze $x_n := -y_n + (-1)^n$, so divergiert $x_n + y_n = (-1)^n$, ist aber beschränkt mit Häufungspunkten ± 1 .

Setze $x_n := -y_n + n(-1)^n$, so divergiert $x_n + y_n = n(-1)^n$ und ist unbeschränkt und konvergiert auch nicht im uneigentlichen Sinne.

Setze $x_n := -2y_n$, so konvergiert $x_n + y_n = -y_n \rightarrow -\infty$ im uneigentlichen Sinne.

(b) (i) Wir bringen den Ausdruck zunächst auf einen gemeinsamen Hauptnenner

$$2f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 1} - x = \frac{x^2 + 3x - x(x + 1)}{x + 1} = \frac{x^2 + 3x - x^2 - x}{x + 1} = \frac{2x}{x + 1}.$$

Wir zeigen nun, dass dieser Ausdruck gegen 2 konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt für $x \geq \frac{1}{\varepsilon}$

$$\frac{2}{1 + \varepsilon} = \frac{2x}{x + \frac{1}{\varepsilon}x} \leq \frac{2x}{x + 1} \leq 2,$$

d.h. $\left| \frac{2x}{x+1} - 2 \right| \leq 2 - \frac{2}{1+\varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} \leq 2\varepsilon$. Es folgt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x}{x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x + 1} = 2.$$

(ii) Sei $x_n \rightarrow 1$ mit $x_n \geq 0$ eine beliebige Folge. Um die Wurzeln $\sqrt{\cdot}$ und $\sqrt[3]{\cdot}$ loszuwerden, substituieren wir $x_n = u_n^6$, wobei 6 gerade das kleinste gemeinsame Vielfache von 2 und 3 ist. (Man beachte, dass die Funktion $p: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), x \mapsto x^6$ bijektiv ist, d.h. wir finden für jedes x_n ein solches u_n .) Daraus folgt für die einzelnen Terme

$$\sqrt[3]{x_n} = \sqrt[3]{u_n^6} = u_n^2 \quad \text{und} \quad \sqrt{x_n} = \sqrt{u_n^6} = u_n^3.$$

Da p als Polynom stetig ist, gilt insbesondere $u_n \rightarrow 1$. Also

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^2 - 1}{u^3 - 1}.$$

Da Zähler und Nenner bei $u = 1$ eine Nullstelle besitzen, können wir den Faktor $(u - 1)$ herauskürzen. Es gilt (binomische Formel, bzw. Polynomdivision)

$$u^2 - 1 = (u - 1)(u + 1) \quad \text{und} \quad u^3 - 1 = (u - 1)(u^2 + u + 1).$$

Also

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{(u - 1)(u + 1)}{(u - 1)(u^2 + u + 1)} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u + 1}{u^2 + u + 1} = \frac{2}{3}.$$

Aufgabe 2 (K):

Seien $(x_n)_n, (y_n)_n$ reelle Folgen. Es gelte $y_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$.

(a) Zeigen Sie: Ist $(x_n)_n$ beschränkt, dann gilt $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

(b) Zeigen Sie: Ist $x_n \geq \delta$ für ein $\delta > 0$, so gilt $x_n y_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$.

(c) Zeigen Sie: Konvergiert $(x_n)_n$ nicht gegen Null und gilt $x_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gibt es eine Teilfolge (x_{n_j}) von $(x_n)_n$ so, dass $x_{n_j} y_{n_j} \rightarrow -\infty$ für $j \rightarrow \infty$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

Seien $(x_n)_n, (y_n)_n$ reelle Folgen. Es gelte $y_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$.

(a) Es sei (x_n) beschränkt. Dann existiert ein $M > 0$, sodass $|x_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $y_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, existiert wieder für die Schranke $K' := K + m \in \mathbb{N}$ ein Index $N_{K'} \in \mathbb{N}$, sodass $y_n \geq K'$ für alle $n \geq N_{K'}$. Wir folgern Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Es existiert ein Index $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$

$$y_n > \frac{M}{\varepsilon}.$$

Für $n \geq N$ ergibt sich

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - 0 \right| = \frac{|x_n|}{y_n} \leq \frac{M}{y_n} < \frac{M}{\frac{M}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Folglich, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$.

(b) Da $y_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, existiert wieder für die Schranke $K' := K + m \in \mathbb{N}$ ein Index $N_{K'} \in \mathbb{N}$, sodass $y_n \geq K'$ für alle $n \geq N_{K'}$. Sei $K > 0$ eine beliebige Schranke. Für $n \geq N_{\frac{K}{\delta}}$ ergibt sich

$$x_n \cdot y_n \geq \delta \cdot y_n > \delta \cdot \frac{K}{\delta} = K.$$

Da $K > 0$ beliebig war, folgt nach Definition 3.36 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \infty$.

(c) Angenommen, (x_n) konvergiert nicht gegen Null und es gilt $x_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der Verneinung der Konvergenz gegen Null ergibt sich: Es existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass es für jeden (noch so großen) Index $N \in \mathbb{N}$ einen Index $n \geq N$ gibt mit $|x_n| = |x_n - 0| > \varepsilon$. Letztere Ungleichung ist äquivalent zu $x_n < -\varepsilon$, da nach Voraussetzung $x_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Also haben wir (etwas kompakter aufgeschrieben):

$$\exists \varepsilon > 0: \forall N \in \mathbb{N}: \exists n \geq N: x_n < -\varepsilon. \quad (*)$$

Aus (*) folgern wir, dass es eine Teilfolge $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ gibt mit $x_{n_j} < -\varepsilon$ für alle $j \in \mathbb{N}$: Denn setzen wir $N := 1$ in (*), so sehen wir, dass ein $n \geq 1$ mit $x_n < -\varepsilon$ existiert und wir setzen $n_1 := n$. Ist n_j für ein $j \in \mathbb{N}$ definiert, so liefert (*) mit $N := n_j + 1$ einen Index $n \geq n_j + 1$ mit $x_n < -\varepsilon$ und wir setzen $n_{j+1} := n$. Auf diese Weise wird eine wachsende Folge (n_j) rekursiv so definiert, dass $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ eine wohldefinierte Teilfolge von (x_n) ist mit der gewünschten Eigenschaft $x_{n_j} < -\varepsilon$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Sei nun $K \in \mathbb{N}$ und sei $K' \in \mathbb{N}$ mit $K' \geq \frac{K}{\varepsilon}$. Da $y_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, existiert zu K' ein Index $N_{K'} \in \mathbb{N}$, sodass $y_n \geq K'$ für alle $n \geq N_{K'}$. Es folgt

$$x_{n_j} y_{n_j} < (-\varepsilon) y_{n_j} \leq (-\varepsilon) K' \leq -K \quad \text{für alle } j \geq N_{K'}.$$

Da $K \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt war, folgt $x_{n_j} y_{n_j} \rightarrow -\infty$ für $j \rightarrow \infty$.

Aufgabe 3 (K):

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$. Weiter sei $x_0 \in (a, b)$ und $w \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie folgende Äquivalenz:

Es gilt $f(x) \rightarrow w$ für $x \rightarrow x_0$ genau dann, wenn $f(x) \rightarrow w$ für $x \rightarrow x_0^-$ und $f(x) \rightarrow w$ für $x \rightarrow x_0^+$.

(b) Zeigen Sie dass die folgenden Grenzwerte existieren und bestimmen Sie deren Wert.

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + \alpha x + \beta} - x) \qquad (ii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|}$$

In (i) seien hierbei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha, \beta \geq 0$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(a) Zunächst einmal ist jedes $x_0 \in D := (a, b)$ ein Häufungspunkt von D . Denn für $x_0 \in D$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq b - x_0$ definiert $x_n := x_0 + \frac{1}{n}$, $n \geq n_0$, eine Folge $(x_n)_{n \geq n_0}$ eine Folge in D mit $x_n \rightarrow x_0$ für $n \rightarrow \infty$.

„ \implies “: Dies folgt unmittelbar aus den Definitionen von $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

„ \impliedby “: Sei $\varepsilon > 0$. Da nach Voraussetzung $w = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ gilt, existieren nach Satz 4.5 b) Zahlen $\delta_\varepsilon^- > 0$ und $\delta_\varepsilon^+ > 0$, sodass

$$|f(x) - w| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \in (a, b) \text{ mit } x_0 - \delta_\varepsilon^- \leq x < x_0 \text{ und}$$

$$|f(x) - w| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \in (a, b) \text{ mit } x_0 < x \leq x_0 + \delta_\varepsilon^+.$$

Setzen wir $\delta_\varepsilon := \min\{\delta_\varepsilon^-, \delta_\varepsilon^+\} > 0$, so sind für $x \in (a, b)$ mit $0 < |x - x_0| \leq \delta_\varepsilon$ beide obigen Ungleichungen erfüllt (denn nach Definition von δ_ε gilt dann $x_0 - \delta_\varepsilon^- \leq x - \delta_\varepsilon \leq x < x_0$ falls $x < x_0$ und $x_0 < x \leq x_0 + \delta_\varepsilon \leq \delta_\varepsilon^+$ falls $x > x_0$). Somit folgern wir

$$|f(x) - w| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \in (a, b) \text{ mit } 0 < |x - x_0| \leq \delta_\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, existiert nach Satz 4.5 a) also $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ und es gilt $w_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

(b) (i) Seien $\alpha, \beta \geq 0$ und $(x_n)_{n \geq 1}$ eine beliebige Folge mit $x_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Dann gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $x_n > 0$ für alle $n \geq n_0$. Für diese x_n gilt dann

$$\sqrt{x_n^2 + \alpha x_n + \beta} - x_n = \frac{(\sqrt{x_n^2 + \alpha x_n + \beta})^2 - x_n^2}{\sqrt{x_n^2 + \alpha x_n + \beta} + x_n} = \frac{\alpha x_n + \beta}{\sqrt{x_n^2 + \alpha x_n + \beta} + x_n} = \frac{\alpha + \frac{\beta}{x_n}}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{x_n} + \frac{\beta}{x_n^2}} + 1}.$$

Nach Satz 3.38 a) sind $(\frac{\alpha}{x_n})$, $(\frac{\beta}{x_n})$ und $(\frac{\beta}{x_n^2})$ Nullfolgen. Mit Satz 2.7 und Aufgabe 5 c) des 4. Übungsblattes folgt daher

$$\sqrt{x_n^2 + \alpha x_n + \beta} - x_n = \frac{\alpha + \frac{\beta}{x_n}}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{x_n} + \frac{\beta}{x_n^2}} + 1} \rightarrow \frac{\alpha + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} = \frac{\alpha}{2} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Da $(x_n)_{n \geq 1}$ mit $x_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ beliebig gewählt war, folgt, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + \alpha x + \beta} - x) = 0$ existiert und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + \alpha x + \beta} - x) = \frac{\alpha}{2}.$$

(ii) Sei $(x_n)_{n \geq 1}$ eine Folge mit $x_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$0 \leq \frac{x_n^2}{|x_n|} = \frac{|x_n|^2}{|x_n|} = |x_n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

da mit $(x_n)_{n \geq 1}$ auch $(|x_n|)_{n \geq 1}$ eine Nullfolge ist. Aus dem Sandwichlemma folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{|x_n|} = 0$. Da $(x_n)_{n \geq 1}$ mit $x_n \rightarrow 0$, $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, beliebig gewählt war, folgt, dass $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|}$ existiert und

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|} = 0.$$

Aufgabe 4:

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend, d.h., für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$ gilt $f(x) \leq f(y)$.

Sei weiterhin $x_0 \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass die links- und rechtsseitigen Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ existieren.

(b) Zeigen Sie $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

(c) Zeigen Sie: f ist stetig in $x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 3 (a) für „ \Leftarrow “.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(a) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir definieren die nichtleere Menge $A := \{f(x) \mid x \in \mathbb{R} \text{ mit } x < x_0\}$ und bemerken, dass A durch $f(x_0)$ nach oben beschränkt ist: In der Tat, ist $a \in A$, so existiert $x \in \mathbb{R}$ mit $x < x_0$ und $a = f(x)$. Da f monoton wachsend ist, folgt dann $a = f(x) \leq f(x_0)$. Somit ist $y := \sup A \in \mathbb{R}$ wohldefiniert.

Sei nun $(x_n)_n$ eine Folge in $(-\infty, x_0)$ mit $x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$). Wir zeigen $f(x_n) \rightarrow y$ ($n \rightarrow \infty$). Sei hierfür $\varepsilon > 0$. Aus der Charakterisierung des Supremums aus Satz 1.18 a) sehen wir, dass es dann ein $a \in A$ gibt mit $y - \varepsilon < a$, d.h. es existiert ein $x < x_0$, sodass

$$y - \varepsilon < f(x).$$

Da $x_n \rightarrow x_0$ für $n \rightarrow \infty$ und $x < x_0$ gilt, gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $x < x_n$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Mit der Monotonie von f folgt hieraus $f(x) \leq f(x_n)$ für alle $n \geq n_0$. Wir erhalten also

$$y - \varepsilon < f(x) \leq f(x_n) \leq y \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

wobei die letzte Ungleichung wegen $f(x_n) \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a \leq y = \sup A$ für alle $a \in A$ gilt. Insbesondere zeigt dies

$$|f(x_n) - y| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgern wir $f(x_n) \rightarrow y$ für $n \rightarrow \infty$. Da $(x_n)_{n \geq 1}$ in $(-\infty, x_0)$ mit $x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$) beliebig gewählt war, folgt die Existenz von $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ und dass $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = y$ gilt.

Die Existenz von $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ zeigt man analog (man definiere $B := \{f(x) \mid x \in \mathbb{R} \text{ mit } x > x_0\}$ und zeige $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf B$).

(b) Seien A und B wie in Aufgabenteil (a). Dann gilt nach Aufgabenteil (a)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup A \leq f(x_0) \leq \inf B = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

(c) „ \implies “: Sei f stetig in x_0 . Dann gilt $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Insbesondere gilt $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ und $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, und damit $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

„ \impliedby “: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und angenommen, es gelte $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$. Nach Aufgabenteil (a) muss

dann aber $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ gelten. Aus Aufgabe 3 (a) folgt nun, dass $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ gilt. Also ist f in x_0 stetig.

Bemerkung: Aus Aufgabenteilen (b) und (c) folgt, dass die Unstetigkeitsstellen einer monoton wachsenden Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aus „Sprungstellen“ besteht, d.h., es gilt

$$\{x_0 \in \mathbb{R}: f \text{ ist nicht stetig in } x_0\} = \{x_0 \in \mathbb{R}: \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)\}.$$

Aufgabe 5:

(a) Stellen Sie $h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; h(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}$ als Komposition stetiger Funktionen dar.

(b) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) = \begin{cases} 1 - 2x - x^2, & x < 0, \\ c(x-2)^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

stetig ist.

(b) Sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \exists n \in \mathbb{N}: x = \frac{n-1}{n} \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \{\frac{n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle Punkte $x \in [0, 1]$, in denen f stetig ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

(a) Wir definieren die Funktionen $f_1, f_2, f_3: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = \sqrt{x} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass obige Funktionen stetig sind. Deshalb ist $h = \frac{f_1+f_3}{f_1+f_2f_3}$ nach Satz 4.12 stetig.

(b) Sei zunächst $x_0 < 0$ und $(x_n)_{n \geq 1}$ mit $x_n \rightarrow x_0$ für $n \rightarrow \infty$. Wir bemerken, dass $g(x) = p(x)$ für alle $x < 0$, wobei $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, p(z) = 1 - 2z - z^2$. Da $x_n \rightarrow x_0 < 0$ ($n \rightarrow \infty$), existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n < 0$ für alle $n \geq n_0$ (wähle $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < -x_0$ in der Definition der Konvergenz). Also gilt $(g(x_n))_{n \geq n_0} = (p(x_n))_{n \geq n_0}$. Da p als Polynom stetig ist, gilt $p(x_n) \rightarrow p(x_0)$ für $n \rightarrow \infty$. Somit muss auch $g(x_n) \rightarrow p(x_0) = g(x_0)$ für $n \rightarrow \infty$. Da $(x_n)_{n \geq 1}$ mit $x_n \rightarrow x_0$ für $n \rightarrow \infty$ beliebig gewählt war, folgt, dass $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$, also die Stetigkeit von g in x_0 . Genauso zeigt man auch, dass g in x_0 für $x_0 > 0$ stetig ist.

Nach Aufgabe 3 a) ist g in 0 stetig genau dann, wenn $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$. Nun ist

$$g(0) = 4c, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - 2x - x^2 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} c(x-2)^2 = 4c.$$

Es muss also $c = \frac{1}{4}$ sein.

(c) Sei zunächst $x_0 = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\min\{|x - \frac{m-1}{m}| \mid m \in \mathbb{N}, m \neq n\} = \frac{1}{n(n+1)}$ (warum genau?). Wir wählen $\delta > 0$, sodass $\delta < \frac{1}{n(n+1)}$ gilt. Dann gilt

$$f(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$$

Aus Satz 4.5 a) folgt nun $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, aber es gilt $f(x_0) = 1$ nach Definition von f . Also ist f in x_0 nicht stetig.

Sei nun $x_0 \in [0, 1]$, aber $x_0 \neq \frac{n-1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}) = [0, 1)$, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n-1}{n} < x_0 < \frac{n}{n+1}$. Nach Definition von f gilt $f(x) = 0$ für alle $x \in (\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1})$. Hieraus folgt sofort $f(x_0) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Also ist f in x_0 stetig.

Damit gilt also

$$\{x \in [0, 1] \mid f \text{ ist stetig in } x\} = [0, 1] \setminus \left\{ \frac{n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$