

Lösungsvorschlag zum 11. Übungsblatt

Analysis I

Winter Semester 2025/2026

Aufgabe 1 (K):

(a) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$, wobei $[\cdot]$ die Gauß-Klammer aus Beispiel 3.18 ist. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(b) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) = f(x^2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $f(y^{(2^{-n})}) = f(y)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $y \geq 0$ gilt, und folgern Sie, dass f konstant sein muss.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$ und (x_n) eine Folge in \mathbb{R} mit $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$. Wir müssen zeigen, dass $f(x_n) \rightarrow f(x)$ für $n \rightarrow \infty$. Hierzu unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall: $x \notin \mathbb{Z}$: Dann existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $k < x < k + 1$. Da $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $k < x_n < k + 1$ für $n \geq N$. Für diese x_n gilt dann $[x_n] = k = [x]$ und daher

$$\begin{aligned} f(x_n) &= [x_n] + \sqrt{x_n - [x_n]} \\ &= [x] + \sqrt{x_n - [x]} = [x] + \sqrt{(x_n - x) + x - [x]} \rightarrow [x] + \sqrt{x - [x]} = f(x) \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

wobei wir für die Konvergenzaussage die Stetigkeit der Wurzel ausgenutzt haben

2. Fall: $x \in \mathbb{Z}$: Dann ist wegen $[x] = x$ (also $x - [x] = 0$) auch $f(x) = x$. Da $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x - 1 < x_n < x + 1$ für alle $n \geq N$. Ist hierbei $x - 1 < x_n < x$, so ist $[x_n] = x - 1$ und daher $f(x_n) = [x_n] + \sqrt{x_n - [x_n]} = x - 1 + \sqrt{x_n - (x - 1)} = x = f(x)$, also $f(x_n) - f(x) = 0$. Anderenfalls ist $x \leq x_n < x + 1$, also $[x_n] = x = f(x)$ und damit

$$|f(x_n) - f(x)| = [x_n] + \sqrt{x_n - [x_n]} - x = \sqrt{x_n - x}.$$

Insgesamt erhalten wir also für $n \geq N$

$$|f(x_n) - f(x)| \leq \sqrt{x_n - x} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

wobei wir wieder die Stetigkeit der Wurzel ausgenutzt haben. Nach dem Sandwichkriterium ist also $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - f(x)| = 0$, was äquivalent ist zu $f(x_n) \rightarrow f(x)$ für $n \rightarrow \infty$.

(b) Sei $y \geq 0$. Wir beweisen zunächst

$$f(y^{(2^{-n})}) = f(y) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \tag{1}$$

per vollständiger Induktion. Für $n = 0$ ist die obige Identität trivial. Sei obige Identität für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr. Dann gilt

$$f(y^{(2^{-(n+1)})}) = f\left(\left(y^{(2^{-(n+1)})}\right)^2\right) = f(y^{(2^{-n})}) = f(y),$$

womit der Induktionsschluss vollzogen ist. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} y^{2^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{y} = 1$ nach Beispiel 2.11 b) und Bemerkung 2.18 b) gilt, folgern wir aus (1) und der Stetigkeit von f

$$f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y^{2^{-n}}) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} y^{2^{-n}}\right) = f(1).$$

Da $y \geq$ beliebig gewählt war, haben wir also $f(y) = f(1)$ für alle $y \geq 0$ gezeigt. Ist dagegen $y < 0$, so ist $-y > 0$ und daher folgt aus dem bereits Bewiesenen $f(y) = f(y^2) = f((-y)^2) = f(-y) = f(1)$. Somit gilt für $f(-y) = 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$, womit f konstant ist.

Aufgabe 2:

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Seien ferner $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \leq g(a)$ und $f(b) \geq g(b)$. Zeigen Sie, dass es ein $c \in [a, b]$ gibt mit $f(c) = g(c)$.

(b) Zeigen Sie, dass jedes reelle Polynom ungeraden Grades eine Nullstelle in \mathbb{R} besitzt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, und $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir definieren

$$h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = f(x) - g(x).$$

Dann ist h nach Satz 4.12 stetig und es gilt

$$h(a) = f(a) - g(a) \leq 0 \quad \text{und} \quad h(b) = f(b) - g(b) \geq 0.$$

Nach dem Nullstellensatz existiert daher ein $c \in [a, b]$ mit $h(c) = 0$. Aus der Definition von h folgt nun wie gewünscht $f(c) = g(c)$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und p ein reelles Polynom vom Grad n , d.h.,

$$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und a_0, a_1, \dots, a_n reelle Koeffizienten sind mit $a_n \neq 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $a_n = 1$ ist (denn es gilt $p(x) = 0$ genau dann, wenn $a_n^{-1} p(x) = 0$, und $a_n^{-1} p$ ist ein Polynom mit Koeffizienten b_0, b_1, \dots, b_n und $b_n = 1$). Für $x \neq 0$ erhalten wir unter Anwendung von Satz 3.38 a) und Satz 4.6 a)

$$\frac{p(x)}{x^n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \longrightarrow 1 + 0 + \dots + 0 + 0 = 1 \quad (x \rightarrow \pm\infty) \quad (2)$$

Insbesondere muss es Zahlen $a < 0$ und $b > 0$ geben mit

$$\frac{p(a)}{a^n} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{p(b)}{b^n} > 0$$

(denn anderenfalls wäre $p(x)/x^n \leq 0$ für alle $x \neq 0$ und daher nach Satz 4.6 f) auch $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x)/x \leq 0$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x)/x \leq 0$ gelten, im Widerspruch zu (2)). Aus obigen Ungleichungen erhalten wir

$$p(a) < 0 \quad \text{und} \quad p(b) > 0,$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $a^n < 0$ ist, da n ungerade ist. Da p als Polynom stetig ist, folgt aus dem Nullstellensatz die Existenz eines $x \in (a, b)$ mit $p(x) = 0$.

Aufgabe 3:

(a) Es sei $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existiere in \mathbb{R} . Zeigen Sie, dass dann f gleichmäßig stetig ist.

(b) Untersuchen Sie die Funktionen

$$(i) f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad (ii) g: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{\sin(2x)}{\sin(x)}$$

auf gleichmäßige Stetigkeit.

Hinweise zu (ii): Sie können ohne Beweis annehmen, dass $\sin(x) > 0$ für alle $x \in (0, \pi)$ und $\cos(0) = 1$ gelten. Beachten Sie Aufgabe 4 des 9. Übungsblattes.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(a) Angenommen, $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und der uneigentliche Grenzwert $c := \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \in \mathbb{R}$ existiere. Wir wollen zeigen, dass f gleichmäßig stetig ist.

Sei hierfür $\varepsilon > 0$. Da nach Annahme $c := \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ gilt, existiert nach Satz 4.5 c) ein $K := K_{\frac{\varepsilon}{2}} > 0$ mit

$$|f(x) - c| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } x \geq K. \quad (3)$$

Mit f ist auch die Einschränkung von f auf $[0, 2K]$, d.h., die Funktion

$$g: [0, 2K] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x),$$

stetig und nach Theorem 4.19 ist g sogar gleichmäßig. Also existiert ein $\delta > 0$ mit $\delta \leq K$ (dies können wir o.B.d.A. annehmen) und

$$x, y \in [0, 2K] \text{ mit } |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| = |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon. \quad (4)$$

Wir behaupten nun

$$x, y \in [0, \infty) \text{ mit } |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon. \quad (*)$$

Zum Nachweis von $(*)$ seien $x, y \in [0, \infty)$ mit $|x - y| \leq \delta$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: $x, y \in [0, 2K]$: Dann folgt $(*)$ direkt aus (4).

2. Fall: $x > 2K$ oder $y > 2K$: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $x > K$ gilt (anderenfalls vertauschen wir x und y). Dann gilt auch

$$y = x + (y - x) \geq x - |x - y| \geq x - \delta \geq 2K - \delta \geq K,$$

Daher können wir (3) anwenden und erhalten unter Anwendung der Dreiecksungleichung

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - c| + |f(y) - c| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Damit haben wir $(*)$ nachgewiesen, und da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, zeigt $(*)$ die gleichmäßige Stetigkeit von f .

(b) (i) Die Funktion f ist als Komposition stetiger Funktionen stetig. Für $x > 0$ gilt

$$0 \leq f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty).$$

Also existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ und es gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Nach Aufgabenteil (b) ist f gleichmäßig stetig.

(ii) Für $x \in (0, 1]$ gilt mit Aufgabe 4 des 9. Übungsblattes

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

Aus der Stetigkeit des Kosinus (s. Theorem 4.14) folgt daher

$$g(x) = \frac{\sin(2x)}{\sin(x)} = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\sin(x)} = 2\cos(x) \rightarrow 2\cos(0) = 2 \quad (x \rightarrow 0+).$$

Also hat g in $x_0 = 0$ eine stetige Fortsetzung, womit g nach Satz 4.21 b) gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 4 (K):

(a) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann besitzt f einen Fixpunkt, d.h., es existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$.

(b) Seien $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f(x) < g(x)$ für alle $x \in [0, 1]$. Zeigen Sie, dass es ein $\delta > 0$ gibt mit $f(x) + \delta \leq g(x)$ für alle $x \in [0, 1]$.

(c) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Gilt $f(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow -\infty$ und für $x \rightarrow \infty$, dann besitzt f ein Maximum.

Gilt die Aussage auch falls $f(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow -\infty$ und $f(x) \rightarrow c$ für $x \rightarrow \infty$ und ein $c > 0$?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(a) Da f beschränkt ist, existiert ein $M > 0$ mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Mit f ist nach Satz 4.12 auch

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x) - x$$

stetig, und es gilt $g(-M) > 0$ und $g(M) < 0$. Nach dem Nullstellensatz muss ein $x \in [-M, M]$ existieren mit $g(x) = 0$, also $f(x) = x$.

(b) Wir definieren

$$h: [0, 1] \rightarrow [0, 1], h(x) = g(x) - f(x).$$

Dann ist h nach Satz 4.12 stetig und nach Voraussetzung gilt $h(x) > 0$ für alle $x \in [0, 1]$. Nach Theorem 4.22 hat h ein Minimum, d.h., es existiert ein $x_0 \in [0, 1]$, mit $h(x) \geq h(x_0) =: \delta > 0$. Dies bedeutet $f(x) + \delta \leq g(x)$ für alle $x \in [0, 1]$.

(c) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, sodass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow -\infty$ und für $x \rightarrow \infty$ gelte. Wir müssen zeigen, dass f ein Maximum besitzt. Dabei können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass ein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x_0) > 0$ (denn anderenfalls wäre $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit trivialerweise $\max_{\mathbb{R}} f = 0$). Wir wählen nun irgendein $\varepsilon > 0$, sodass $0 < \varepsilon < f(x_0)$ gilt und entscheiden uns für $\varepsilon := f(x_0)/2$. Da nach Voraussetzung $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ gilt, existieren nach Satz 4.5 c) Konstanten $K_1, K_2 > 0$ mit

$$0 \leq f(x) \leq \frac{f(x_0)}{2} \quad \text{für alle } x \geq K_1,$$

$$0 \leq f(x) \leq \frac{f(x_0)}{2} \quad \text{für alle } x \leq -K_2.$$

Setzen wir $K := \max\{K_1, K_2\} > 0$, erhalten wir aus obigen Ungleichungen

$$0 \leq f(x) \leq \frac{f(x_0)}{2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| \geq K. \quad (5)$$

Insbesondere folgt hieraus $|x_0| < K$, also $x_0 \in (-K, K)$, da anderenfalls $0 \leq f(x_0) \leq \frac{f(x_0)}{2}$ gelten würde. Dies ist aber nur möglich, wenn $f(x_0) = 0$ gilt, im Widerspruch zur Wahl von x_0 .

Andererseits ist mit f auch die Einschränkung von f auf das Intervall $I := [-K, K]$, d.h., die Funktion

$$g: I \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x)$$

stetig. Nach dem Satz vom Maximum (Theorem 4.24) hat g ein Maximum, d.h., es existiert ein $x_1 \in I$ mit $f(x_1) = \max_I f$. Da x_0 in I liegt (s.o.), erhalten wir sofort $f(x_1) \geq f(x_0)$ und mit (5) daher

$$f(x_1) \geq f(x_0) > \frac{f(x_0)}{2} \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| \geq K. \quad (6)$$

Andererseits gilt nach Definition von x_1

$$f(x_1) = \max_{[-K, K]} f \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in [-K, K]. \quad (7)$$

Aus (7) und (6) folgt schließlich

$$f(x_1) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \text{ also } f(x_1) = \max_{\mathbb{R}} f.$$

Also hat f ein Maximum.

Der zweite Teil der Aufgabe ist zu verneinen, wie das folgende Beispiel zeigt. Zunächst konstruieren wir eine strikt monoton fallende, stetige Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow -\infty$ und $g(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$. Zum Beispiel

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \geq 1, \\ -x + 2, & x < 1. \end{cases}$$

Die Wahl $g(x) = \exp(-x)$ erfüllt dies z.B. auch nach Kapitel 4.4 der Vorlesung. Nach Theorem 4.34 ist dann

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{c}{1 + g(x)}$$

strikt monoton wachsend und besitzt somit kein Maximum. Weiter erfüllt f die gewünschten Eigenschaften $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.