

Lösungsvorschlag zum 12. Übungsblatt

Analysis I

Winter Semester 2025/2026

Aufgabe 1 (K):

Der *Sinus hyperbolicus* und *Kosinus hyperbolicus* sind definiert durch

$$\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

(b) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ und $\cosh(-x) = \cosh(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

(c) $\sinh(x) < \sinh(y)$ für $x < y$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh(x) = -\infty$. Folgern Sie, dass \sinh bijektiv ist und berechnen Sie die Umkehrfunktion \sinh^{-1} .

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Aus der binomischen Formel erhalten wir dann

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = [a^2 + 2ab + b^2] - [a^2 - 2ab + b^2] = 4ab.$$

Sei nun $x \in \mathbb{R}$. Setzen wir $a := \frac{1}{2}e^x$ und $b := \frac{1}{2}e^{-x}$, so erhalten wir aus obiger Gleichung

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab = 4 \left(\frac{1}{2}e^x \frac{1}{2}e^{-x} \right) = e^{x-x} = 1,$$

wobei wir im vorletzten Schritt das Exponentialgesetz ausgenutzt haben.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gelten

$$\sinh(-x) = \frac{1}{2} \left(e^{-x} - e^{-(-x)} \right) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -\sinh(x),$$

$$\cosh(-x) = \frac{1}{2} \left(e^{-x} + e^{-(-x)} \right) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x).$$

(c) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Da die Exponentialfunktion streng wachsend ist, folgt $e^x < e^y$ und wegen $-y < -x$ daher auch $e^{-y} < e^{-x}$ bzw. $-e^{-x} < -e^{-y}$. Wir folgern deshalb

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) < \frac{1}{2}(e^y - e^{-x}) < \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) = \sinh(y).$$

Da \sinh monoton ist, existieren die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh(x)$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh(x)$ und es gelten

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \sinh(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh(x) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \sinh(x) = -\sup_{x \in \mathbb{R}} \sinh(x),$$

wobei wir für die zweite letzte Gleichung $\inf A = -\sup(-A)$ für jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ und $\sinh(-x) = -\sinh(x)$, $x \in \mathbb{R}$, aus Aufgabenteil b) verwendet haben. Aus (4.11) folgt, dass $\{e^x : x \geq 0\}$ nach oben unbeschränkt ist und wegen $\sinh(x) \geq \frac{1}{2}(e^x - 1)$ für $x \geq 0$ ist damit auch $\{\sinh(x) : x \geq 0\}$ nach oben unbeschränkt. Damit ist $\sup_{x \in \mathbb{R}} \sinh(x) = \infty$ und daher

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \sinh(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh(x) = -\sup_{x \in \mathbb{R}} \sinh(x) = -\infty.$$

Wir wollen nun folgern, dass \sinh bijektiv ist. Dazu müssen wir zeigen, dass \sinh injektiv und surjektiv ist.

Injektivität: Wir haben bereits gezeigt, dass \sinh streng wachsend ist. Insbesondere ist \sinh injektiv.

Surjektivität: Sei $y \in \mathbb{R}$. Aus den Beziehungen $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh(x) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh(x) = \infty$ erhalten wir Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\sinh(a) < y < \sinh(b)$. Da \sinh als Komposition stetiger Funktionen stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass es ein $x \in (a, b)$ geben muss mit $\sinh(x) = y$. Dies zeigt, dass \sinh surjektiv ist.

Insgesamt folgt also, dass \sinh bijektiv ist. Wir wollen nun \sinh^{-1} berechnen. Sei hierfür $y \in \mathbb{R}$. Da wir bereits bewiesen haben, dass \sinh bijektiv ist, gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\sinh(x) = y$, also

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = y &\iff e^x(e^x - e^{-x}) = 2ye^x \iff (e^x)^2 - 2y(e^x) - 1 = 0 \\ &\iff (e^x - y)^2 = 1 + y^2 \iff e^x = y \pm \sqrt{1 + y^2}. \end{aligned}$$

Da $e^x > 0$ und $y < \sqrt{1 + y^2}$ gelten, muss $e^x = y + \sqrt{1 + y^2}$, also $x = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$ sein. Damit ist

$$\sinh^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \sinh^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}).$$

Aufgabe 2:

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen $(f_n)_n$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz. Berechnen Sie gegebenenfalls auch die Grenzfunktion.

- (a) $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; f_n(x) = nx(1 - x)^n$,
 (b) $g_n: [a, 1] \rightarrow \mathbb{R}; g_n(x) = nx(1 - x)^n$, wobei $a \in (0, 1)$ sei.

Hinweis: Für $q \in [0, 1)$ ist $(nq^n)_n$ eine Nullfolge (dies folgt z.B. daraus, dass die Reihe $\sum_{n \geq 0} nq^n$ nach dem Wurzelkriterium konvergiert.)

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(a) Die Folge $(f_n)_n$ konvergiert punktweise aber nicht gleichmäßig auf gegen die Nullfunktion

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 0.$$

• Punktweise Konvergenz:

Wir müssen zeigen, dass für jedes feste, aber beliebig gewählte $x \in [0, 1]$ die Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(x) = 0$ konvergiert. Hierzu machen wir eine Fallunterscheidung:

1. *Fall:* $x = 0$. Dann ist $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und damit gilt (trivialerweise) $f_n(0) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

2. *Fall:* $x \in (0, 1]$. Mit dem Hinweis (setze $q := 1 - x \in [0, 1)$) erhalten wir

$$0 \leq f_n(x) = nx(1 - x)^n \leq n(1 - x)^n \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Nach dem Sandwichlemma gilt also $f_n(x) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Insgesamt haben wir also gezeigt: Für alle $x \in [0, 1]$ gilt $f_n(x) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und damit die punktweise Konvergenz von (f_n) gegen f .

• Gleichmäßige Konvergenz:

Angenommen, f_n würde gleichmäßig gegen f konvergieren. Dann gälte $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, und für jede Folge (x_n) in $[0, 1]$ erhielten wir dann die Abschätzung

$$0 \leq f_n(x_n) = |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

also nach dem Sandwichlemma $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = 0$. Insbesondere gälte $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\frac{1}{n}) = 0$. Allerdings ist

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e} \neq 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Widerspruch!

(b) Sei $a \in (0, 1)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist g_n die Einschränkung von f_n auf $[a, 1]$, und da f_n nach Aufgabenteil (a) punktweise gegen f konvergiert, ist klar, dass auch (g_n) punktweise gegen die Einschränkung von f auf $[a, 1]$ konvergiert, d.h., gegen $g: [a, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) = 0$. Die Funktionenfolge (g_n) konvergiert sogar gleichmäßig gegen g : Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g(x)| &= g_n(x) = nx(1-x)^n \leq n(1-a)^n \quad \text{für alle } x \in [a, 1], \\ \implies \|g_n - g\|_\infty &\leq n(1-a)^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

da $1-a \in (0, 1)$. Nach dem Sandwichkriterium gilt also $\|g_n - g\|_\infty \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Somit konvergiert g_n gleichmäßig gegen g .

Aufgabe 3 (K):

(a) Untersuchen Sie folgende Funktionenfolgen $(f_n)_n$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

$$(i) \quad f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; \quad f_n(x) = e^{-\frac{x}{n}}, \quad (ii) \quad f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f_n(x) = \frac{2x}{1+(nx)^2}.$$

(b) Sei $(f_n)_n$ eine Funktionenfolge mit $f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert.

Zeigen Sie: Gilt $f_n(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$) für jedes $n \in \mathbb{N}$, dann gilt auch $f(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$).

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(a) (i) Die Folge $(f_n)_n$ konvergiert punktweise gegen die Funktion $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = 1$: Denn für jedes feste $x \in [0, \infty)$ ist $(-\frac{x}{n})_n$ eine Nullfolge, sodass aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{x}{n}} = e^{(\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{x}{n})} = e^0 = 1$$

folgt. Allerdings ist die Konvergenz nicht gleichmäßig, denn es gilt

$$\|f_n - f\|_\infty = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Wir wollen (1) beweisen. Sei hierzu $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion $|f_n - f| = f - f_n$ ist nichtnegativ und wachsend (warum genau?), also gilt

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in [0, \infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, \infty)} (f(x) - f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - f_n(x)). \quad (2)$$

Nun gilt nach (4.11) des Skriptes und Satz 3.38 a)

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty)$$

und daher wegen der Stetigkeit der n -ten Wurzel (s. Beispiel 4.35) auch

$$f_n(x) = e^{-\frac{x}{n}} \stackrel{4.47 \text{ e)}}{=} (e^{-x})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e^{-x}} \rightarrow \sqrt[n]{0} = 0 \quad (x \rightarrow \infty).$$

Hieraus, aus (2) und Satz 4.6 a) folgt nun wie gewünscht

$$\|f - f_n\|_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - f_n(x)) = 1 - 0 = 0.$$

Somit gilt (1), sodass $(\|f_n - f\|_\infty)_n$ keine Nullfolge sein kann. Damit konvergiert (f_n) nicht gleichmäßig gegen f .

(ii) Die Folge $(f_n)_n$ konvergiert gleichmäßig auf \mathbb{R} gegen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = 0$ (und damit auch insbesondere punktweise). Zunächst bemerken wir, dass für $a > 0$ die Ungleichung $\frac{2a}{1+a^2} \leq 1$ gilt, denn wir haben

$$(1-a)^2 \geq 0 \iff 1-2a+a^2 \geq 0 \iff \frac{2a}{1+a^2} \leq 1.$$

Mit Hilfe dieser Ungleichung erhalten wir (mit $a := n|x|$)

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{2|x|}{1 + (n|x|)^2} = \frac{1}{n} \frac{2n|x|}{1 + (n|x|)^2} \leq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } x \in \mathbb{R},$$

und damit

$$0 \leq \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Also konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f (und damit auch insbesondere punktweise).

(b) Wir benutzen die Charakterisierung aus Satz 4.5 c). Sei hierfür $\varepsilon > 0$. Wir müssen nun ein $K > 0$ finden, sodass $|f(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \geq K$. Da (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert, existiert ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_{n_0} - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3)$$

Da nach Voraussetzung $f_{n_0}(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ gilt, existiert ferner nach Satz 4.5 c) ein $K > 0$ mit

$$|f_{n_0}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } x \geq K. \quad (4)$$

Nun erhalten wir aus (3) und (4) für alle $x \geq K$

$$|f(x)| \leq |f_{n_0}(x) - f(x)| + |f_{n_0}(x)| \leq \|f_{n_0} - f\|_\infty + |f_{n_0}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt also aus Satz 4.5 c), dass $f(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$.

Aufgabe 4:

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ gleichmäßig stetig. Konvergiert $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, so ist auch f gleichmäßig stetig.
- (b) Sei $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) = g(x + \frac{1}{n})$.
- (i) Dann konvergiert $(f_n)_n$ punktweise gegen g .
 - (ii) Ist g gleichmäßig stetig, dann konvergiert $(f_n)_n$ auch gleichmäßig gegen g .
 - (iii) Finden sie ein stetiges, beschränktes g so, dass $(f_n)_n$ nicht gleichmäßig gegen g konvergiert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(a) Sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen ein $\delta > 0$, sodass

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x, y \in D \text{ mit } |x - y| \leq \delta.$$

Da nach Voraussetzung (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert, ist $(\|f_n - f\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Insbesondere existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f - f_{n_0}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (5)$$

Da weiter f_{n_0} gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta = \delta_{\varepsilon, n_0} > 0$, sodass

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } x, y \in D \text{ mit } |x - y| \leq \delta. \quad (6)$$

Dieses δ liefert nun das Gewünschte: Sind $x, y \in D$ mit $|x - y| \leq \delta$, so folgt mit (5) und (6)

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| \\ &\leq \|f - f_{n_0}\|_\infty + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + \|f - f_{n_0}\|_\infty \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist f gleichmäßig stetig.

(b) (i) Weil g als stetig vorausgesetzt wurde und für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Folge $(x + \frac{1}{n})_n$ gegen x konvergiert für $n \rightarrow \infty$, folgt

$$f_n(x) = g(x + \frac{1}{n}) \rightarrow g(x) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Also konvergiert $(f_n)_n$ punktweise gegen g .

(ii) Sei nun zusätzlich g gleichmäßig stetig. Wir wollen zeigen, dass $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen g konvergiert. Sei hierfür $\varepsilon > 0$ gegeben. Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von g folgt nun die Existenz eines $\delta > 0$, sodass

$$|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - y| \leq \delta.$$

Sei $n_0 > \frac{1}{\delta}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$ auch $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \delta$ und daher

$$|f_n(x) - g(x)| = \left| g\left(x + \frac{1}{n}\right) - g(x) \right| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0 \text{ und } x \in \mathbb{R}.$$

Da die rechte Seite der obigen Abschätzung *unabhängig* von $x \in \mathbb{R}$ ist, erhalten wir

$$\|f_n - g\|_\infty \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Dies zeigt, dass $(\|f_n - g\|_\infty)$ eine Nullfolge ist und damit (f_n) gleichmäßig gegen g konvergiert.

(iii) Sei $g(x) = \sin(x^2)$. Da der Sinus stetig und durch 1 beschränkt ist, erfüllt g die Voraussetzungen. Wir betrachten die Folge der Maxima z_n von g und definieren eine weitere Folge x_n mit Abstand $1/n$ dazu

$$\begin{aligned} z_n &:= \sqrt{2\pi n^2 + \frac{\pi}{2}} \quad \implies \quad g(z_n) = \sin\left(2\pi n^2 + \frac{\pi}{2}\right) = 1, \\ x_n &:= z_n - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Wir untersuchen den Abstand $|f_n(x_n) - g(x_n)|$

Die Funktion f_n nimmt bei x_n gerade ihr Maximum an

$$f_n(x_n) = g\left(x_n + \frac{1}{n}\right) = g(z_n) = 1.$$

Weiter betrachten wir nun $g(x_n)$. Es gilt

$$x_n^2 = \left(z_n - \frac{1}{n}\right)^2 = z_n^2 - \frac{2z_n}{n} + \frac{1}{n^2} = \left(2\pi n^2 + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{2\sqrt{2\pi n^2 + \frac{\pi}{2}}}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Für $n \rightarrow \infty$ folgt $\frac{2\sqrt{2\pi n^2}}{n} \rightarrow 2\sqrt{2\pi}$. Der Term $2\pi n^2$ entfällt wegen der Periodizität des Sinus. Also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{2\pi}\right) = \cos(2\sqrt{2\pi}).$$

Da $2\sqrt{2\pi}$ kein Vielfaches von 2π ist, ist $\cos(2\sqrt{2\pi}) \neq 1$ und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_n) - g(x_n)| = |1 - \cos(2\sqrt{2\pi})| > 0.$$

Das Supremum der Differenz konvergiert also nicht gegen 0. Die Konvergenz ist somit nicht gleichmäßig.

Erinnerung: Anmeldung zum Übungsschein

Wir möchten Sie daran erinnern, dass Sie sich im Campus Management System für den Übungsschein anmelden müssen, damit wir Ihnen (bei Erfüllen der Kriterien) den Übungsschein verbuchen können. Bitte melden Sie sich daher so schnell wie möglich und bis spätestens zum **22. Februar** für den Übungsschein im Campus Management System an.